Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicações

Fermín S. V. Bazán

Universidade Federal de Santa Catarina

Departamento de Matemática

E-mail: fermin@mtm.ufsc.br

http//:www.mtm.ufsc.br/~fermin

Rio de Janeiro, 01 de Agosto 2003

Análise de Sensib. e Erro em Prob. HR

Caso Polinomial Escalar

Preliminares.: W_M : Matriz de Vandermonde $d \times M$

$$W_M = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{M-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \lambda_d^2 & \cdots & \lambda_d^{M-1} \end{bmatrix}.$$

Objetivo: Deduzir limitantes para $\kappa(W_M) = \|W_M\|_2 \|W_M^\dagger\|_2$.

Teorema 1 *Se* $\lambda_j \neq \lambda_i$, $|\lambda_j| < 1$, $\beta = min|\lambda_j|$. *Então, para* $M > d$, $\|W_M^\dagger\|_2$ *decresce monotonicamente com* M, *e para* $M = p \cdot d$, $p \geq 1$

$$\|W_M^\dagger\|_2 \leq \frac{\|W_d^{-1}\|_2}{\sqrt{1 + \beta^{2d} + \beta^{4d} + \cdots + \beta^{2(p-1)d}}}. \quad (1)$$

Se $\hat{f}_M$: *solução de norma mínima do sistema*

$$W_M f = \Lambda^M e,$$

onde $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_d), e = [1, 1, \cdots, 1]^T \in \mathbb{R}^d$.
Então $\lim_{M \to \infty} \|\hat{f}_M\|_2 \to 0.$

Teorema 2 (Bazán 2000) *Defina*

$$\alpha = \max_j |\lambda_j|, \quad \beta = \min_j |\lambda_j|, \quad \delta = \min_{\substack{j \neq k \\ j,k}} |\lambda_j - \lambda_k|.$$

Então, para $M > d \geq 2$,

$$\kappa_2(W_M) = \|W_M\|_2 \|W_M^\dagger\|_2 \leq \frac{1}{2}\left(\eta + \sqrt{\eta^2 - 4}\right), \quad \textit{sendo} \;\; \eta = \rho - d + 2, \tag{2}$$

$$\rho = d\left[1 + \frac{(d-1) + \|\hat{f}_M\|_2^2 + \prod_{j=1}^d |\lambda_j|^2 - \sum_{j=1}^d |\lambda_j|^2}{(d-1)\delta^2}\right]^{\frac{d-1}{2}} \phi_M(\alpha, \beta), \tag{3}$$

$$\phi_M(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \alpha^{2(N-1)}}{1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots + \beta^{2(N-1)}}}. \tag{4}$$

Consequência:

$\kappa_2(W_M)$ é moderado quando M é suficientemente grande e $|\lambda_j| \approx 1$
($\kappa_2(W_M) \approx 1$)

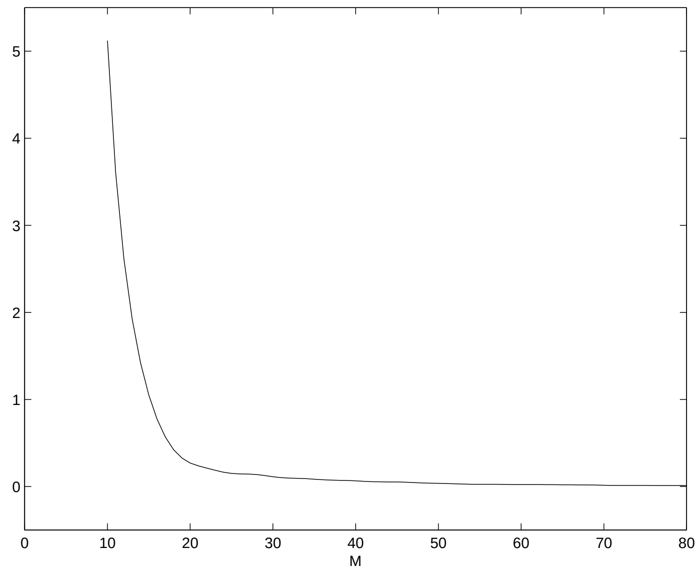
Análise de $\kappa(W_M)$: Um problema proveniente de Ressonância Magnética Nuclear (NMR) Van Huffel, 1995.

Parâmetros do Sinal (livre de ruídos)

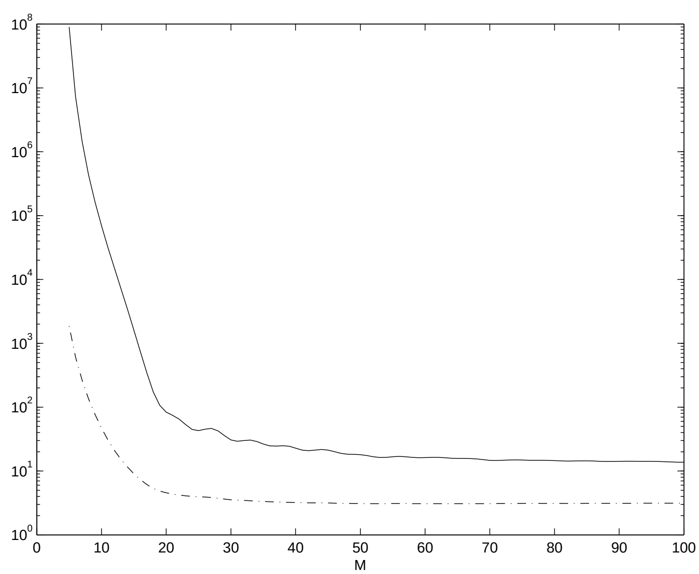
$$s_k = \sum_{j=1}^{d} r_l \lambda_l^k, \quad k = 0, 1, \ldots L.$$

l	r_l	λ_l	$\|\lambda_l\|$	δ_l^2
1	5.8921 + 1.5788$\imath$	0.6342 - 0.7463$\imath$	0.9794	0.1786
2	9.5627 + 2.5623$\imath$	0.8858 - 0.4067$\imath$	0.9747	0.0644
3	5.7956 + 1.5529$\imath$	0.9663 - 0.1661$\imath$	0.9805	0.0644
4	2.7046 + 0.7247$\imath$	0.9642 + 0.2174$\imath$	0.9884	0.0100
5	16.4207 + 4.3999$\imath$	0.8811 + 0.2729$\imath$	0.9224	0.0100

Comportamento de $\|\hat{f}_M\|^2$ como função de M



Limitante superior para $\kappa_2(W_M)$: linha sólida, $\kappa_2(W_M)$: linha pontilhada (ambos em escala logarítmica) .



Sensibilidade dos Autovalores do sinal: Abordagem Polinomial através da Matriz Companheira

$P_m(\lambda) = \lambda^m + \lambda^{m-1}c_{m-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0,\ m \geq d.$
C_a : matriz companheira associada a $P_m(\lambda)$,

$$C_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{m-1} \end{bmatrix}_{m\times m}.$$

λ_j é raiz de $P_m(\lambda) \Leftrightarrow C_a x = \lambda_j x.\ j = 1 : d.$

Teorema 3 *Se* $\alpha = \max_j |\lambda_j|$, *então*

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda_j, C_a) &= \sqrt{1 + |\lambda_j|^2 + |\lambda_j|^4 + \cdots + |\lambda_j|^{2(m-1)}} \times \\ &\times \sqrt{\|W^\dagger e_j\|_2^2 + \|(C_{\mathcal{Q}} - \lambda_j I)^{-1} C_{\mathcal{Q}} W_m^\dagger e_j\|_2^2} \\ &\leq \sqrt{1 + |\lambda_j|^2 + |\lambda_j|^4 + \cdots + |\lambda_j|^{2(m-1)}} \times \\ &\times \|W_M^\dagger\|_2 \sqrt{1 + \frac{\sqrt{d}\ \alpha^m}{1 - |\lambda_j|}}. \end{aligned}$$

λ_j pode ser muito sensível a pequenas perturbações ($\kappa(\lambda_j, C_a)$ grande!) quando $|\lambda_j| \approx 1$.

Análise de Sensib.: Abordagem da Matriz Companheira Projetada.

$\mathcal{V}_{m\times d}$: base ortonormal para $\mathcal{R}(W_m^*) = \mathcal{R}(H(\ell)^*)$.

$\mathcal{C}_a = \mathcal{V}^* C_a \mathcal{V}$: Projeção de C_a sobre $\mathcal{R}(H(\ell)^*)$.

Teorema 4 (Bazán 2003)

$$\Lambda(\mathcal{C}_a) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}.$$

$$\begin{aligned}\kappa(\lambda_j, \mathcal{C}_a) &= \sqrt{1 + |\lambda_j|^2 + |\lambda_j|^4 + \cdots + |\lambda_j|^{2(m-1)}}\,\|W_m^\dagger e_j\|_2 \\ &\leq \left[1 + \frac{d - 1 + \|\hat{f}_m\|_2^2 + \prod_{j=1}^d |\lambda_j|^2 - \sum_{j=1}^d |\lambda_j|^2}{(d-1)\delta_j^2}\right]^{n(n-1)/2}.\end{aligned} \tag{5}$$

Consequências:

- Os autovalores λ_j são menos sensíveis quando extraídos da Matriz Companheira projetada $\mathcal{C}_a$ $(d \times d)$!
- $\kappa(\lambda_j, \mathcal{C}_a) \approx 1$ quando M é grande e $|\lambda_j| \approx 1$.

Análise de Erro: Caso Escalar

Sinal disponível: $\widetilde{s}_k = s_k + \epsilon_k,\ k = 1, \ldots, L.$

Matriz de Informações: $\widetilde{H}(\ell) = H(\ell) + E\ (M \times N)$

Subespaço Sinal disponível: $\widetilde{\mathcal{V}} \approx \mathcal{V}$.

Matriz Companheira Projetada: $\widetilde{\mathcal{C}}_a = \widetilde{\mathcal{V}}^* \widetilde{C}_a \widetilde{\mathcal{V}}$:

$\lambda_j, \widetilde{\lambda}_j$: Autovalores de $\mathcal{C}_a$ e $\widetilde{\mathcal{C}}_a$.

Resultado Clássico (Wilkinson 1963)

$$|\widetilde{\lambda}_j - \lambda_j| \leq \kappa(\lambda_j, \mathcal{C}_a)\|\widetilde{\mathcal{C}}_a - \mathcal{C}_a.\|_2$$

Teorema 5 (Bazán 2003) *Se* $\min\{M, N\}$ *é suficientemente grande e* $|\lambda_j| \approx 1$,

$$|\widetilde{\lambda}_j - \lambda_j| \approx \sin(\theta),$$

$\sin(\theta)$: *ângulo entre os subespaços gerados por* $\widetilde{\mathcal{V}}$ *e* $\mathcal{V}$.

- Autovalores associados a sinais levemente amortecidos ($|\lambda_j| \approx 1$) tornam-se pouco sensíveis a ruídos desde que a matriz de informações seja suficientemente grande !

F I M