Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicações

Fermín S. V. Bazán

Universidade Federal de Santa Catarina

Departamento de Matemática

E-mail: fermin@mtm.ufsc.br

http//:www.mtm.ufsc.br/~fermin

Rio de Janeiro, 27 de Julho 2003

Conteúdo

Capitulo 1: Generalidades (Gohberg, Gantmacher)

Capitulo 2: Aplicações Correntes

- Recuperação de Harmônicos (Prob. HR)
- Identificação de Sistemas Vibratórios, Solução de EDP's, etc.

Capitulo 3: Sensibilidade de Autovalores

- Noções de Condicionamento de um Problema (Gautschi 1997)
- Sensibilidade de Autoval. de Polinômios Matriciais (Tisseur 2000)

Capitulo 4: Sensibilidade de Autovalores em Problemas HR (Bazán 2000-2003)

Capitulo 5: Computação de Autovalores

Apêndice:

- Álgebra linear numérica: Conceitos básicos, SVD (Singular Value Decomposition), Problemas de Quadrados Mínimos, etc.

Definições Básicas

Polinômio matricial de grau m :

$$P_m(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$A_j \in \mathbb{C}^{q\times q},\ j = 0\colon m.$$

Ex.: $m = 2$, $q = 1$ (polinômio escalar)

$$P_2(\lambda) = 3\lambda^2 - 4\lambda + 1$$

Ex.: $m = 1$, $q = 2$

$$P_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -2\lambda + 5 & \lambda \end{bmatrix}$$

Definições:

- $\lambda \in \mathbb{C}$ é autov. de $P_m(\lambda)$ se

  $$\det(P_m(\lambda)) = 0 \text{ Eq. Caract. de } P_m(\lambda)$$

- x e y são autovetores de $P_m(\lambda)$ associado a λ, à direita e à esquerda, respectivamente, se

  $$P(\lambda)x = 0, \quad x \neq 0, \quad y^*P(\lambda) = 0 \quad y \neq 0.$$

Prob. de autov. polin. mat. (PAPM): Dado $P_m(\lambda) = A_m\lambda^m + \cdots + A_1\lambda + A_0$, $A_j \in \mathbb{C}^{q\times q}$, encontrar $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{C}^q$ tal que

$$P(\lambda)x = 0, \quad y^*P(\lambda) = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Se $q = 1$, Prob. de Autov. é o Prob. de encontrar os zeros (raízes) de um Polinômio escalar:

$$P_m(\lambda) = a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0,\ a_j \in \mathbb{C},$$

Prob. de Autov. Matricial Padrão (PAMP):

$$Ax = \lambda x \quad (q > 1,\ m = 1)$$

Prob. de Autov. Generalizado (PAG):

$$Ax = \lambda Bx \quad (q > 1,\ m = 1)$$

Prob. de Autov. Quadrático (PAQ):

$$(A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0)x = 0, \quad (q > 1,\ m = 2)$$

Como as entradas de $P_m(\lambda)$ são pol. de grau $\leq m$,

$$\mathrm{p}(\lambda) = \det(P_m(\lambda)) \quad \text{é de grau} \leq m \times q$$

- Se A_m é não singular, $P_m(\lambda)$ tem $m \times q$ autovalores finitos.
- Se A_m é singular, grau de $\mathrm{p}(\lambda) = r < m \times q$, e $P_m(\lambda)$ tem r autovalores finitos e $m \times q - r$ autovalores ∞.

Obs. λ's distintos podem ter o mesmo autovetor

Ex.:

$$P_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathsf{p}(\lambda) = -6\lambda^5 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1,$$

k	1	2	3	4	5	6
λ_k	1/3	1/2	1	$\imath$	-$\imath$	∞
x_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Linearização

Se $P_m(\lambda)$ é mônico $(A_m = I)$,

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & I_q \\ -A_0 & -A_1 & & \cdots & -A_{m-1} \end{bmatrix}, \ \widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \\ \vdots \\ \lambda^{m-2} x \\ \lambda^{m-1} x \end{bmatrix},$$

$$C_1 \widehat{x} = \lambda \widehat{x} \Leftrightarrow P_m(\lambda) x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$C_1 - \lambda I : \text{Linearização de } P_m(\lambda)$$

Se $A_m \neq I$ é não singular, usar polinômio mônico com coef. $\breve{A}_k = A_m^{-1} A_k, k = 1 \colon m-1$.

Se A_m é singular, utiliza-se a linearização

$$A - \lambda B =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I_q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & I_q \\ -A_0 & -A_1 & & \cdots & -A_{m-1} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_q & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix}.$$

J. Demmel Cap. 4, p. 174

Teorema 1 *Seja $Q(\lambda) = A - \lambda B \in C^{n\times n}$ regular. Se B é não singular, todos os autoval. de $Q(\lambda)$ são finitos e iguais aos de $B^{-1}A$. Se B é singular, (λ) tem autoval. ∞ com multiplicidade $n - \mathrm{rank}(B)$. Se A é não singular, os autoval. de $Q(\lambda)$ são os recíprocos dos autoval. de $A^{-1}B$, e autoval. nulos de $A^{-1}B$ correspondem a autoval. ∞ de $Q(\lambda)$.*

Método para PAG $Ax = \lambda Bx$ (B não singular):

(a) Resolva o sistema $BC = A$ e encontre C,

(b) Resolva o PAMP associado à matriz C (usando QR, por ex.)

Golub e Van Loan Cap. 7, p. 377 (Fat. de Schur Generalizada)

Teorema 2 *Seja $P(\lambda) = A - \lambda B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Então existem Q, Z ortogonais, e T, S triangulares superiores tal que*

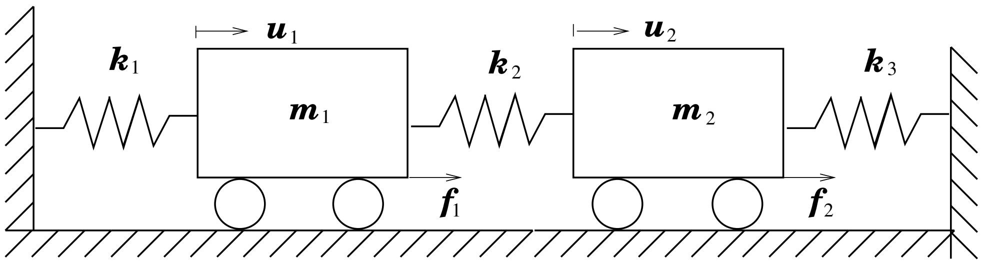
$$Q^*AZ = T, \quad \text{e} \quad Q^*BZ = S.$$

Se para algum $k, t_{k,k} = s_{k,k} = 0$, então $\Lambda(P(\lambda)) = \mathbb{C}$, caso contrário

$$\Lambda(P(\lambda)) = \{t_{i,i}/s_{ii}, s_{ii,} \neq 0\}.$$

Prob. Aut. Pol. Mat. Quadrático

Motivação: Sistema vibratório massa mola



Aplicando a Lei de Newton à massa m_1 :

$$f_1 - k_1 u_1 - k_2(u_1 - u_2) = m_1 \ddot{u}_1, \text{ ou}$$

$$m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = f_1. \qquad (1)$$

Procedendo analogamente com a massa m_2 :

$$m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3)u_2 = f_2. \qquad (2)$$

(1) e (2) formam o sistema:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

Sistema de EDO's: $M\ddot{u}(t) + Ku(t) = f(t), \quad u(t) = ?$

Sistemas de EDO's de Segunda Ordem: (Sistemas elétricos, mecânicos, etc):

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t), \qquad (3)$$

M, C, K são $n \times n$, u, f funções vetoriais $n \times 1$

Solução Geral:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t),$$

$u_h(t)$: solução do Sistema Homogêneo Associado,

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = 0,$$

$u_p(t)$: solução particular do sistema (3).

Ideia básica para calcular $u_h(t)$: Procurar "candidatos" da forma

$$u(t) = e^{\lambda t}x, \quad x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq 0. \qquad (4)$$

Funções da forma (4) são soluções do problema homogêneo, se λ, x satisfazem o Prob. de autov. Mat. Quadrático:

$$P(\lambda)x = (M\lambda^2 + C\lambda + K)x = 0.$$

Prob. de autov. Mat. Quadrático (PAMQ):

$$P(\lambda)x = (M\lambda^2 + C\lambda + K)x = 0.$$

Neste caso, $m = 2$, $q = n$, portanto

$$\text{grau de } \det(P(\lambda)) \leq 2n$$

- Existem até $2n$ autovetores (nesse caso eles são necessariamente LD).
- Espectro $\Lambda(P(\lambda))$ é formado por $2n$ autovalores

Se X é matriz de autovetores/autovetores generalizados, J uma matriz de Jordam, e

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ XJ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} M^{-1},$$

$u_h(t) = Xe^{Jt}x_0$, x_0 : vetor de constantes arbit.
$u_p(t) = Xe^{Jt}\int_0^t e^{-Js}Yf(s)ds.$

Solução do Sist. não Homogêneo (Gohberg, Cap. 8):

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = Xe^{Jt}\left(x_0 + \int_0^t e^{-Js}Yf(s)ds\right).$$

Espectro do Polinômio Matricial Quadrático $P(\lambda) = M\lambda^2 + C\lambda + K.$ como função das características das Matrizes M, C, K, $M > 0$ significa M definida positiva

Matrizes Envolvidas	Tipo de Autoval.	Tipo de Autovet.
M não-singular	$2n$ λ's finitos	
M singular	λ's finitos e ∞	
M, C, K reais	λ's reais ou em pares $(\lambda, \bar{\lambda})$	Se $\{\lambda, x\}$ é auto-par $\{\bar{\lambda}, \bar{x}\}$ é auto-par
M, C, K Hermit.	λ's reais ou em pares $(\lambda, \bar{\lambda})$	Se $\{\lambda, x\}$ é auto-par $\{\bar{\lambda}, x\}$ é auto-par e x autovet. à esq.
M, C, K Hermit. $M > 0$, $C, K \geq 0$	Re$(\lambda) \leq 0$	
M, K Hermit. $M > 0$, $C = -C^*$	λ's imag. puros ou em pares $(\lambda, -\bar{\lambda})$	Se $\{\lambda, x\}$ é auto-par $\{-\bar{\lambda}, x\}$ é auto-par e x autovet. à esq.
M, K Reais Simét. $M > 0$, $K > 0$, $C = -C^*$	λ's imag. puros	