Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicações

Fermín S. V. Bazán

Universidade Federal de Santa Catarina

Departamento de Matemática

E-mail: fermin@mtm.ufsc.br

http//:www.mtm.ufsc.br/~fermin

Rio de Janeiro, 29 de Julho 2003

Algumas Aplicações

1. Solução de EDP's: Vibrações Livres de uma Corda

Método de Galerkin: (Strang e Fix)

$\mathcal{A} : X \longrightarrow Y$ Op. linear e X, Y espaços com produto interno $<,>_X$, $<,>_Y$.

$$\mathcal{A}x = y, \quad x =?$$

Ideia básica: Construir $x_N \approx x$, $x_N \in X_N \subset X$.

Se $\{\psi_j\},\ k = 1\colon N$, base de X_N,

$$x_N = \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k, \quad \text{Resíduo:} \quad r = y - \mathcal{A}x_N,$$

Os c_k são calculados através da condição:

$$r \perp X_N, \quad \text{ou equiv.} \quad < r, \psi_j >= 0. \tag{1}$$

Cond. (1) é equiv. a

$$Ac = b, \tag{2}$$

$$a_{k,j} =< \mathcal{A}\psi_k, \psi_j >, \quad b_k =< y, \psi_k >$$

Equação da Onda:

$$\begin{cases} u_{tt} + \epsilon a(x) u_t = u_{xx}, \; x \in [0, \pi], \; \epsilon > 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \\ u(0,x) = h(x), \;\; u_t(0,x) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\text{Sol. Aprox. } u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) \sin(kx) \tag{4}$$

Produto interno: $< f, g >= \int_0^\pi f(x) g(x) dx.$

Base: $\psi_k = \sin(kx), \quad k = 1 \colon n.$
Resíduo:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + \epsilon a(x) \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [\ddot{q}_k(t) + \epsilon a(x) \dot{q}_k(t) + k^2 q_k(t)] \sin(kx) \end{aligned}$$

Cond. de Galerkin:

$$r \perp \psi_j, \;\; \Leftrightarrow \;\; \int_0^\pi r \sin(kj) dx = 0, \;\; j = 1 \colon n.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} M\ddot{q}(t) + \epsilon C \dot{q}(t) + K q(t) = 0, \\ q(0) = \widehat{h} \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{q}(0) = 0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5}$$

$$M = \frac{\pi}{2} I_n, \quad K = \frac{\pi}{2}\mathrm{diag}(1, 2^2, \ldots, n^2),$$ e C tal que

$$c_{k,j} = \int_0^\pi a(x)\sin(kx)\sin(jx)dx.$$

Cálculo de $q(t) = [q_1(t), \ldots, q_n(t)]^T$:

Polinômio Quadrático Associado

$$P(\lambda) = M\lambda^2 + \epsilon C\lambda + K,$$

X : matriz de autovet./vet. gen. à direita de $P(\lambda)$

Λ : matriz de autovalores

$$q(t) = Xe^{\Lambda t}\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}^{2n},$$

As condições iniciais

$$q(0) = \widehat{h}, \quad \dot{q}(0) = 0$$

implicam que α : é solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} X \\ X\Lambda \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} \hat{h} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resumo:

$$\begin{cases} u_{tt} + \epsilon a(x) u_t = u_{xx},\ x \in [0,\pi],\ \epsilon > 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \\ u(0,x) = h(x), \quad u_t(0,x) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

Sol. Aprox.

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) \sin(kx)$$

Método de Galerkin:

$$\begin{cases} M\ddot{q}(t) + \epsilon C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0, \\ q(0) = \widehat{h} \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{q}(0) = 0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{7}$$

Polinômio Quadrático: $P(\lambda) = M\lambda^2 + \epsilon C\lambda + K$,

X, Λ : matrizes de autovet/vet. gen. e autoval. de $P(\lambda)$

Sol. de (7): $q(t) = Xe^{\Lambda t}\alpha$,

$$\alpha = \begin{bmatrix} X \\ X\Lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{h} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resultados Numéricos:

$$\begin{cases} u_{tt} + \epsilon a(x) u_t = u_{xx}, \ x \in [0, \pi], \ \epsilon > 0, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. \\ u(0, x) = h(x), \quad u_t(0, x) = 0, \end{cases}$$

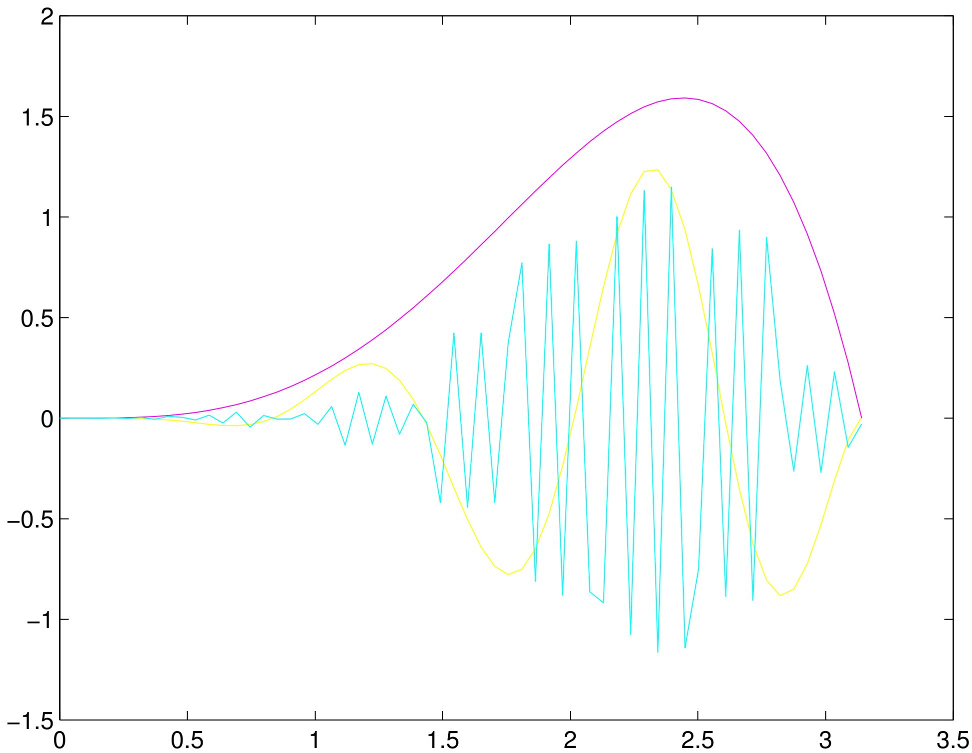
$$a(x) = x^2(\pi - x)^2 - \delta, \quad \delta = 2.7, \quad \epsilon = 0.1$$

Posição Inicial:

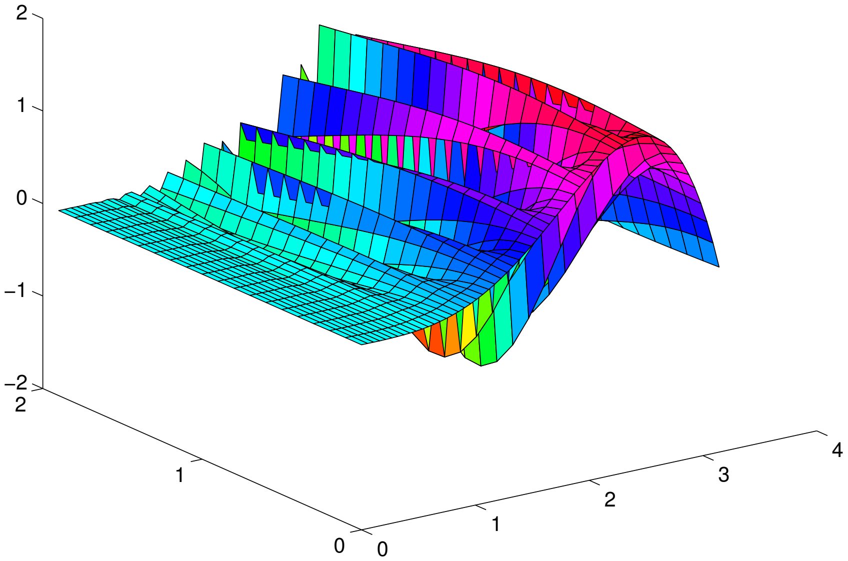
$$u(0, x) = h(x) = -0.1x^{7/2}(x - \pi)$$

$n = 80$

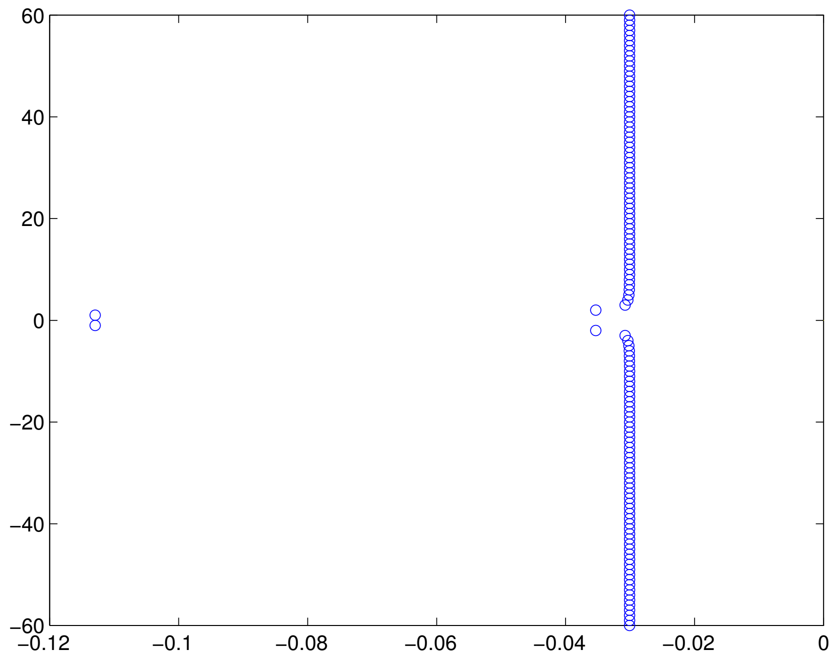
Posição da Corda em três tempos diferentes



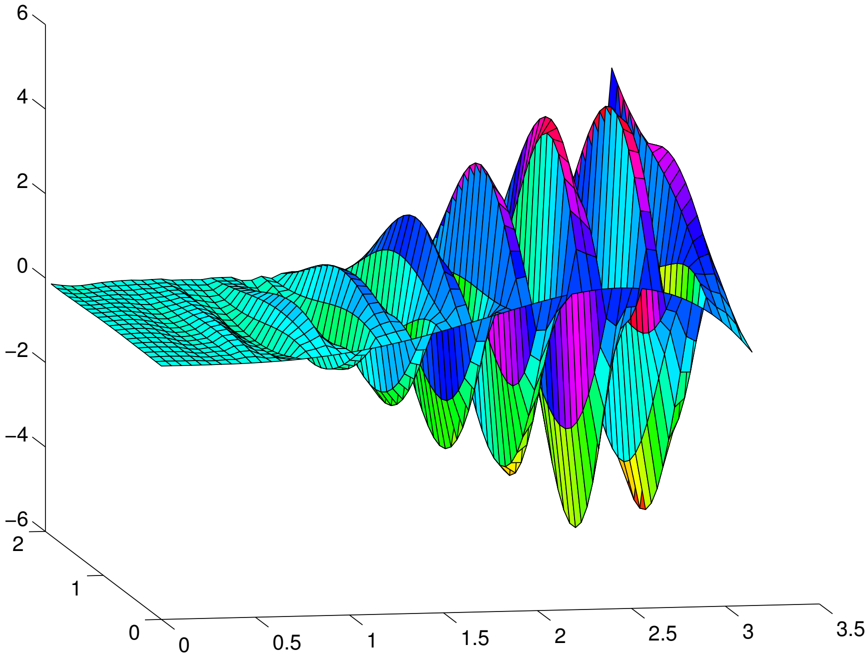
Posição da corda em fatias de tempo:



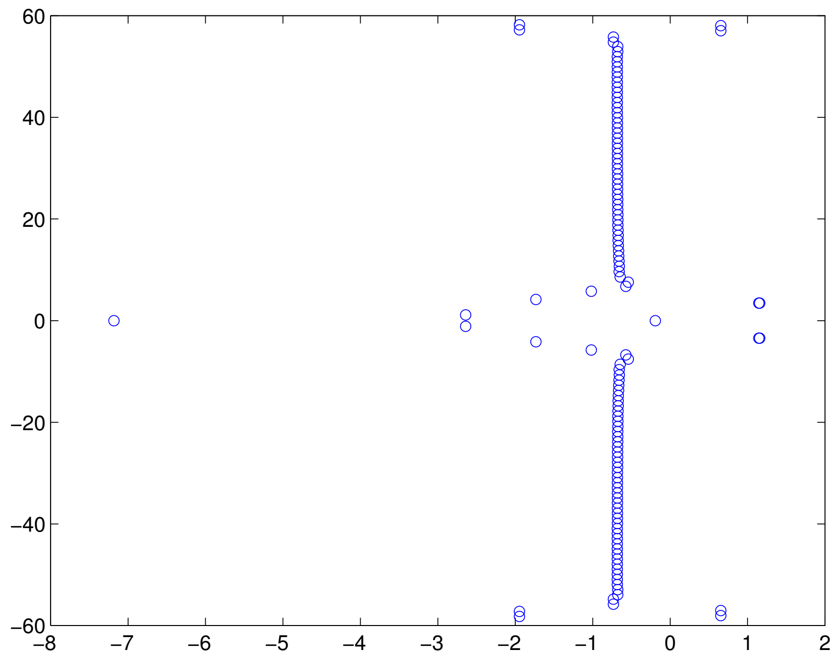
Espectro do Polinômio Quadratico:



Posição da corda em fatias de tempo, $\epsilon = 2.5$:



Espectro do Polinômio Quadratico:



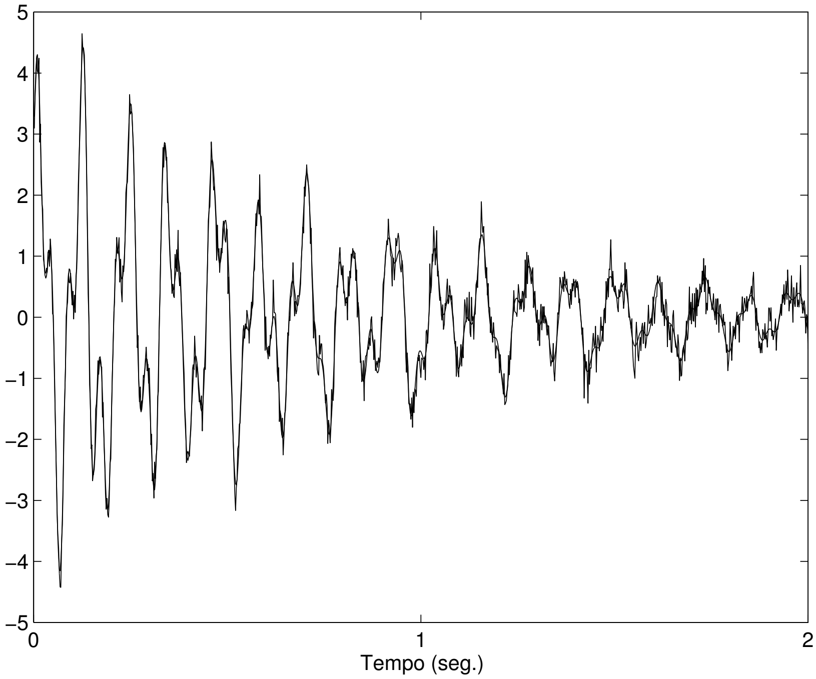
2. Recuperação de Harmônicos (HR)

Modelo Exponencial:

$$s_k = \sum_{j=1}^{d} r_j \lambda_j^k = \sum_{j=1}^{d} r_j e^{(\alpha_j + \imath\omega_j)\Delta t k},$$

$r_j, \lambda_j \in \mathbb{C}$, $|\lambda_j| \leq 1$, $\lambda_j \neq \lambda_k$, Δt : Taxa Amostragem

Problema HR: Dada $\widetilde{s}_k = s_k + \epsilon_k \in \mathbb{C},\ \ k = 0\colon L.$



Encontrar

- d : Número de componentes
- Estimarivas para r_j, α_j, ω_j (λ_j)

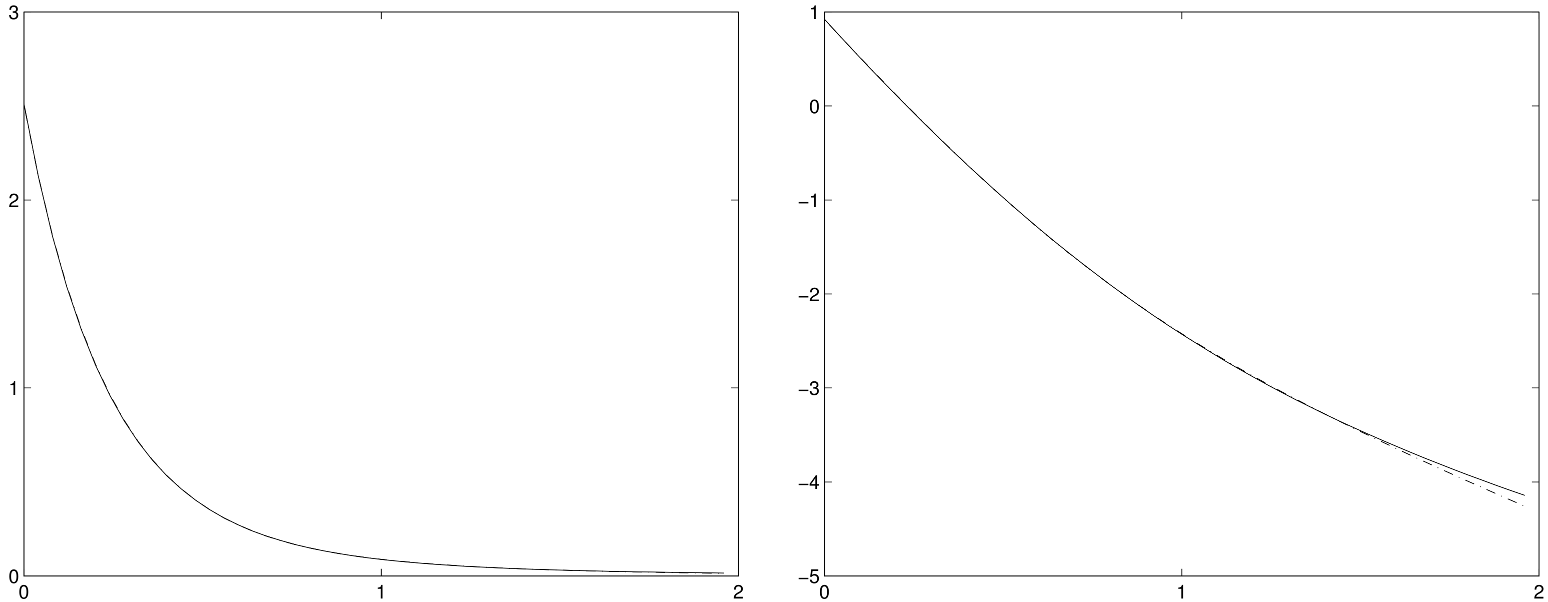
Aplicações Correntes:

- Ressonância Magnética Nuclear (NMR) (valor de pH de tecidos, concentração de metabolismo, etc)
- Procesamento digital de voz
- Estimativa de Frequências de vibração e amortecimentos de sistemas vibratórios.
- Biologia, Geofísica, etc

Dificuldades

- O número de componentes é desconhecido
- Os sinais são contaminados por ruídos
- Sinais compostos por exponenciais com parâmetros muito diferentes podem fornecer curvas muito próximas umas das outras

$$\mathsf{s}_1(t) = 0.305e^{-t/0.633} + 2.202e^{-t/0.225}$$
$$\mathsf{s}_2(t) = 0.0951e^{-t} + 0.8607e^{-t/0.333} + 1.557e^{-t/0.2}.$$



(a) (b)

(a): $\mathsf{s}_1(t)$, $\mathsf{s}_2(t)$. (b): Mesmos sinais em escala semilogaritmica

2.1. Abordagem Polinomial (Prony 1795)

Os λ's são zeros de um Polinômio de grau d

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{d}(\lambda - \lambda_j) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \lambda^d,$$

com c_j $(j = 1\colon d-1)$ satisfazendo

$$\sum_{j=0}^{d} c_j s_{j+i} = 0.$$

Método: Assumindo d conhecido, $L = 2d$

1. Resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_d \\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{d+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{L-d} & s_{L-d+1} & \cdots & s_{L-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{d-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s_{d+1} \\ s_{d+2} \\ \vdots \\ s_L \end{bmatrix},$$

2. Construir o polinômio $P(\lambda)$ e determinar suas raízes

$$\lambda_j = e^{(\alpha_j + \imath\omega_j)\Delta t}.$$

3. Usar os λ's para determinar os coef. r_j.

As raízes de um polinômio podem ser sensíveis a pequenas perturbações nos coeficientes

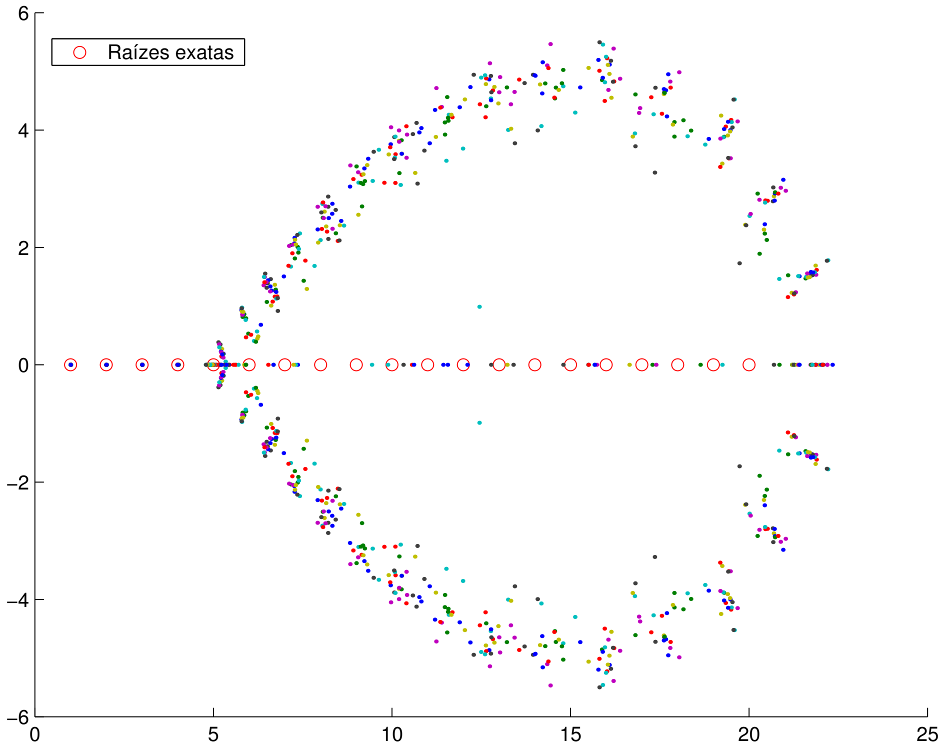
Pol. Wilkinson (Wilkinson 1963)

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \prod_{j=1}^{20}(\lambda - j) = (\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-20). \\ &= \lambda^{20} + c_{19}\lambda^{19} + \cdots + c_1\lambda + c_0. \end{aligned}$$

Polinômio com coeficientes perturbados:

$$\widetilde{p}(\lambda) = \lambda^{20} + \widetilde{c}_{19}\lambda^{19} + \cdots + \widetilde{c}_1\lambda + \widetilde{c}_0.$$

$$\widetilde{c}_j = c_j(1 + \epsilon * r_j), \quad \epsilon = 10^{-10},\ r \in [-1, 1]$$



Generalização:

$$H(\ell) = \begin{bmatrix} s_\ell & s_{\ell+1} & \cdots & s_{\ell+N-1} \\ s_{\ell+1} & s_{\ell+2} & \cdots & s_{\ell+N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{\ell+M-1} & s_{\ell+M} & \cdots & s_{\ell+M+N-2} \end{bmatrix}_{M\times N}, \quad \ell \geq 0.$$

$$= V_M \Lambda^l R V_N^T,$$

$$V_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_d \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_d^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{M-1} & \lambda_2^{M-1} & \cdots & \lambda_d^{M-1} \end{bmatrix}_{M\times d},$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_d), \quad \text{e} \quad R = \mathrm{diag}(r_1, \cdots, r_d).$$

Teorema 1 *Se $M, N \geq d$,*

$$\mathrm{rank}(H(\ell)) = n.$$

Consequência: Se o sinal é livre de ruídos o número de componentes do sinal pode ser detectado do rank de $H(\ell)$

Teorema 2 *Seja*

$$P_N(\lambda) = \lambda^N + c_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0,$$

tal que $c = [c_0, \ldots, c_{N-1}]^T$ *é solução de*

$$H(\ell)c = -H(\ell+1)e_N, \tag{8}$$

Então $\Lambda(P(\lambda)) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\} \cup \{\lambda_1^{(e)}, \ldots \lambda_{N-d}^{(e)}\}$. *Ainda mais, se c é a sol. de norma mínima* (c^+)*, então* $|\Lambda(P(\lambda))| < 1$.

λ_j $(j = 1\colon d)$: Zeros do sinal,
$\lambda_k^{(e)}$ $(k = 1\colon N-d)$: Zeros espúrios.

Método:

1. Resolver (8) usando M, N suficientemente grandes.

2. Encontrar as raízes de $P_N(\lambda)$

3. Separar as raízes λ's das $\lambda^{(e)}$'s

- O cálculo de c^+ precisa da SVD (Decomp. Val. Singulares)
- Trabalho computacional desnecessário com N grande.

2.2. Abordagem de Subespaço

Matriz de Inform. : $H(\ell) = V_M \Lambda^l R V_N^T, \ \ \ell \geq 0.$

Espaço Coluna (Espaço Sinal): span$(H(\ell)) =$ span(V_M).

$$V_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_d \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_d^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{M-1} & \lambda_2^{M-1} & \cdots & \lambda_d^{M-1} \end{bmatrix}_{M\times d},$$

Ideia chave: Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ são tal que

$\mathcal{A} : M-1$ primeiras linhas de V_M

$\mathcal{B} : M-1$ últimas linhas de V_M

$$\mathcal{A}\Lambda = \mathcal{B}.$$

Se A, B são formadas analogamente mas a partir de <u>outra base</u> $\mathcal{V}$ do Espaço Sinal, então existe T $d \times d$ (matriz de Transição) tal que

$$AT = B, \quad \Lambda(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}.$$

Como calcular $\mathcal{V}$? Como calcular T ?

Método de Kung

A matriz de transição é calculada via psedo-inversão:

$$AT = B \Leftrightarrow T_{\mathsf{K}} = A^{\dagger}B.$$

$A^{\dagger}$: Pseudo-inversa de A.

Método: (S. Kung (1984)

1. Calcular a SVD da matriz de Informação:

$$H(0) = [U_1\ U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} = U_1\Sigma_1 V_1^*.$$

e escolher como base do Sub. Sinal o span(U_1).

2. Particionar

$$U_1 = \begin{bmatrix} u^* \\ A \end{bmatrix}_{M\times d} = \begin{bmatrix} B \\ v^* \end{bmatrix}_{M\times d}, u, v \in \mathbb{C}^d$$

3. Calcular a matriz de transição de acordo com

$$\begin{aligned} T_{\mathsf{K}} &= A^{\dagger}B \\ &= (I + \frac{uu^*}{1-u^*u})A^*B. \end{aligned}$$

Resumo:

- Abordagem Polinomial: As raízes do polinômio

$$P_N(\lambda) = \lambda^N + c_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

  são calculadas como autovalores da matriz

$$C_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{N-1} \end{bmatrix}_{N\times N} .$$

- Métodos de subespaço reduzem o custo do problema de autovalor de $N \times N$ para $d \times d$.

- No caso de dados com ruídos a SVD associa a parte "mais importante" da matriz de informações $\widetilde{H} = H + E$ aos maiores valores singulares.

$$\widetilde{H}(0) = [\widetilde{U}_1\ \widetilde{U}_2] \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\Sigma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{V}_1^* \\ \widetilde{V}_2^* \end{bmatrix}$$

  Neste caso, utiliza-se a SVD "truncada"

$$\widetilde{H}(0) \approx \widetilde{U}_1\widetilde{\Sigma}_1\widetilde{V}_1^*$$

  e procede-se como no caso livre de ruídos.

SVD (Singular Value Decomposition):
Toda matriz A $m \times n$ pode ser fatorada como

$$A = U \Sigma V^T, \tag{9}$$

$$U = [u_1, \ldots, u_n]_{m \times m}, \quad V = [v_1, \ldots, v_n]_{n \times n}$$

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots \sigma_n = 0,$$

Decomp. (9) é equiv. a:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_n u_n v_n^T \tag{10}$$

Resultado Importante: Se

$$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T \tag{11}$$

$$\text{Então: } \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1} \tag{12}$$

Consequência: Se $\sigma_k \gg \sigma_{k+1} \approx 0$, então $A \approx A_k$

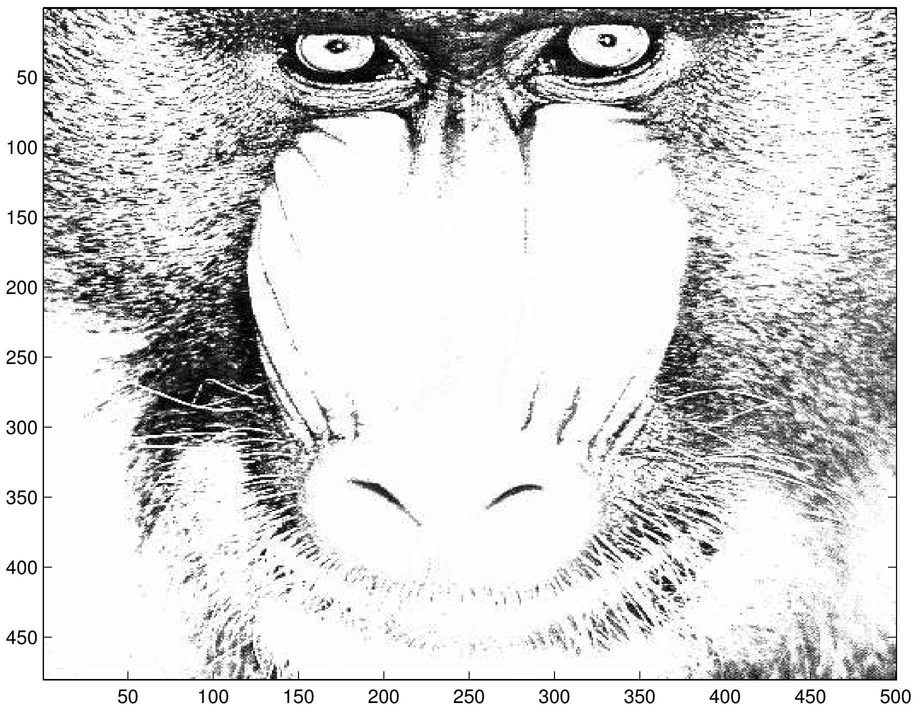


Figura 1: Imagem original

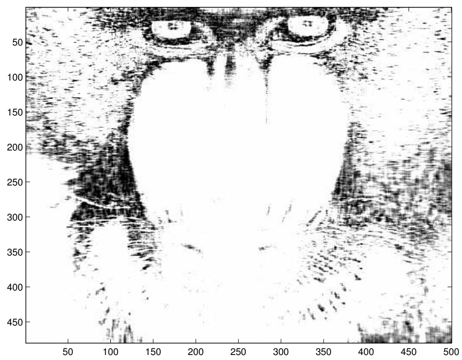


Figura 2: k=40

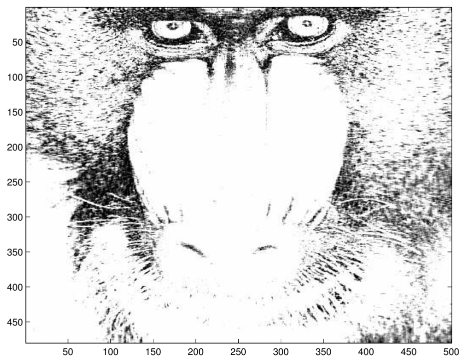


Figura 3: k=80

3. Identificação de Sistemas

Modelo Linear Contínuo

$$\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t), \end{cases}$$

Modelo Linear Discreto

$$\mathcal{S}: \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= A_d \mathbf{x}_k + B_d \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= C_d \mathbf{x}_k + D_d \mathbf{u}_k, \end{cases}$$

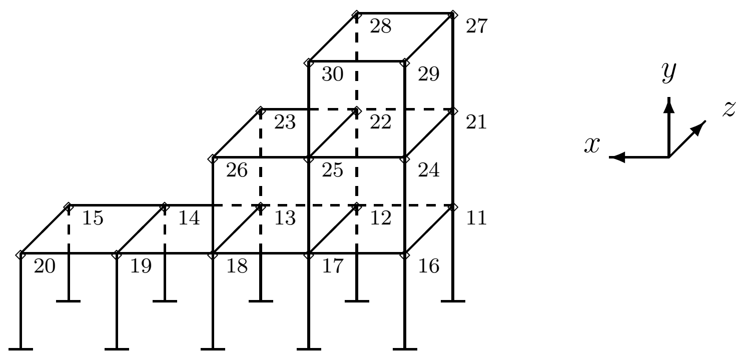
A : Matriz do Sistem $(n \times n)$,
B : Matriz de Controle $(n \times q)$,
C : Matriz de Observação $(p \times n)$,
D : Matriz de Transmissão $(p \times q)$,
n : Ordem do Sistema

Prob. 1: Dados q sinais de entrada e p sinais de saída, encontrar as matrizes A, B, C, D .

Modelo de Segunda Ordem:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t).$$

M, C, K : Matrizes $n \times n$ (Massa, Amortec. e Rig.)



Protótipo de um prédio de 3 andares

Prob. de Autov.: $P(\mu)x = (M\mu^2 + C\mu + K)x = 0.$

Autovalores : $\mu_j = \alpha_j + \imath\omega_j$,
α_j : Amortecimento
ω_j : Frequências naturais de vibração
x_j : Modos de vibração

Prob. 2: Dados q sinais de entrada e p sinais de saída, encontrar as frequências naturais, fat. de amort. e modos de vibração do sistema.

Como se relacionam os sinais de entrada/saída: f, u com os auto-pares de $P(\mu)$?

Sistema no domínio de Laplace:

$$(Ms^2 + Cs + K)\mathsf{u}(s) = \mathsf{f}(s),$$

$\mathsf{u}(s) = \mathcal{L}(u(t))$, $\mathsf{f}(s) = \mathcal{L}(f(t))$,

Relações entrada/saída:

Dom. Laplace : $\mathsf{u}(s) = \mathsf{H}(s)\mathsf{f}(s)$,

$\mathsf{H}(s) = (Ms^2{+}Cs{+}K)^{-1},\ s \in \mathbb{C}$, (Matriz de Transf.)

Dom. Tempo : $u(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau$.

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\mathsf{H}(s)] \quad \text{(Matriz. Resposta ao Imp.)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j x_j^T e^{\mu_j t} + x_j \bar{x}_j^T e^{\bar{\mu}_j t}, \end{aligned}$$

Para q entradas e p saídas:

$$h(t) = \phi\,\mathrm{diag}(e^{\mu_1 t}, \cdots, e^{\mu_n t}, e^{\bar{\mu}_1 t}, \cdots, e^{\bar{\mu}_n t})\ L,$$

$\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_n, \bar{\phi}_1, \ldots, \bar{\phi}_n]_{p\times 2n}$,
$L^T = [l_1, \ldots, l_n, \bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n]_{q\times 2n}$

ϕ_j : j-ésimo modo do sistema
l_j : j-ésimo fator de participação modal

Como calcular os parâmetros modais: $\{\phi_j, l_j, \mu_j\}$, a partir de dados discretos $h_0, h_1, \ldots, h_L$?

3.1 Abordagem Polinomial Matricial

$H_{rs}(\ell)$: Matriz Hankel em blocos de ordem $M \times N$ com $M = r \times p,\ \ N = s \times q$,

$$H_{rs}(\ell) \ = \ \begin{bmatrix} h_\ell & h_{\ell+1} & \cdots & h_{\ell+s-1} \\ h_{\ell+1} & h_{\ell+2} & \ldots & h_{\ell+s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{\ell+r-1} & h_{\ell+r} & \cdots & h_{\ell+r+s-2} \end{bmatrix},\ \ell \geq 0$$

$$= \ \mathcal{O}_r \Lambda^\ell \mathcal{C}_s,$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n), \ \ \lambda_j = e^{\mu_j \Delta t}$$

$$\mathcal{O}_r = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi\Lambda \\ \vdots \\ \phi\Lambda^{r-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_s = [L \ \Lambda L \ \cdots \ \Lambda^{s-1} L].$$

Teorema 3 *Sempre que* $\min\{r, s\} \geq 2n$, *tem-se*

$$\boxed{\mathrm{rank}(\mathcal{O}_r) = \mathrm{rank}(\mathcal{C}_s) = \mathrm{rank}(H_{r,s}(\ell)) = 2n, \ \ \ell \geq 0.}$$

Método das referências Múltiplas

Ideia chave: como

$$H_{r,s}(\ell) = [\breve{h}_1(\ell),\ \breve{h}_2(\ell),\ \ldots \breve{h}_s(\ell)],$$
$$h_j(\ell) = \mathcal{O}_r \Lambda^{\ell+j} L, \quad j = 1:s$$

$\exists$ matrizes $A_0, A_1, \ldots, A_{s-1}$ $q \times q$, tal que

$$\breve{h}_1(\ell)A_0 + \breve{h}_2(\ell)A_1 + \cdots + \breve{h}_s(\ell)A_{s-1} = \breve{h}_s(\ell+1).$$

Equiv.:

$$\mathcal{O}_r \Lambda^\ell \mathcal{C}_s \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{s-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}_r \Lambda^{\ell+s} L \Longleftrightarrow \mathcal{C}_s \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{s-1} \end{bmatrix} = \Lambda^s L.$$

$$\Downarrow$$

$$LA_0 + \Lambda L A_1 + \cdots + \Lambda^{s-2} L A_{s-1} + \Lambda^{s-1} L A_{s-1} = \Lambda^s L.$$

$\Rightarrow \{\lambda_j, l_j\}$ são auto-pares do polinômio matricial:

$$P_s(\lambda) = I\lambda^s - A_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots - A_1\lambda - A_0,$$

Método: (Vold, Roklin)

1. Para ℓ fixo, encontrar A_j, $j = 1\colon s-1$ a partir do sistema linear em blocos
$$H_{r,s}(\ell)X_A = -\breve{h}_s(\ell+1).$$
2. Determinar auto-pares $\{\lambda_j, l_j\}$ (l_j autovetor à esquerda) do polinômio
$$P_s(\lambda) = I\lambda^s + A_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$
a partir da matriz companheira
$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_0 \\ I_q & 0 & \cdots & 0 & -A_1 \\ 0 & I_q & \cdots & 0 & -A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_q & -A_{s-1} \end{bmatrix}. \qquad (13)$$
3. Separar os auto-pares de interesse e encontar a matriz de modos ϕ usando a relação $\phi\Lambda^k L = h_k$.

- Problema de autovalor de ordem $q \times s$ potencialmente elevada.
- $\Lambda(C_A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n\} \cup \{\lambda_j^{(e)}\}_{j=1}^{s\times q-2n}$
  Como separar os λ's dos $\lambda^{(e)}$'s ?

Método de Subespaço: Opt. Pseudo-Inv. Alg.

$$H_{r,s}(\ell) = [U_1\ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^T$$

Relação chave:

$$H_{r,s}(\ell+1) = H_{r,s}(\ell) C_A, \quad \ell \geq 0,$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathcal{C}_s C_A = \Lambda \mathcal{C}_s.$$
$$\Updownarrow$$
$$A_{BB} \doteq V_1^T C_A V_1 = (\mathcal{C}_s V_1)^{-1} \Lambda (\mathcal{C}_s V_1).$$

Método: (Bazán e Bavastri 1996)

1. Para ℓ fixo, calcule a SVD da matriz $H_{r,s}(\ell)$ e estime a ordem do sistema através do número de valores singulares não nulos dessa matriz.
2. Calcule os autovalores λ's a partir da matriz A_{BB} e os fatores de participação modal como
   $$L^T = [I_q \ \ 0]_{q \times q \cdot s} V_1 X.$$
   X sendo matriz de autov. à esq. de A_{BB}.
3. Calcule os modos ϕ_j analogamente ao metodo polinomial.

Resumo:

- Abordagem Polinomial: Os autovalores λ's são autovalores do polinômio

$$P_s(\lambda) = I\lambda^s + A_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

e calculadas da matriz companheira em blocos

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_0 \\ I_q & 0 & \cdots & 0 & -A_1 \\ 0 & I_q & \cdots & 0 & -A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_q & -A_{s-1} \end{bmatrix}_{(q\times s)\times(q\times s)} .$$

- Métodos de subespaço reduzem o custo do problema de $(q \times s) \times (q \times s)$ para $2n \times 2n$.

- No caso de dados com ruídos a SVD associa a parte "mais importante" da matriz de informações $\widetilde{H} = H + E$ aos maiores valores singulares.

$$\widetilde{H}(0) = [\widetilde{U}_1 \; \widetilde{U}_2] \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\Sigma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{V}_1^* \\ \widetilde{V}_2^* \end{bmatrix}$$

Neste caso, utiliza-se a SVD "truncada"

$$\widetilde{H}(0) \approx \widetilde{U}_1 \widetilde{\Sigma}_1 \widetilde{V}_1^*$$

e procede-se como no caso livre de ruídos.