Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicações

Fermín S. V. Bazán

Universidade Federal de Santa Catarina

Departamento de Matemática

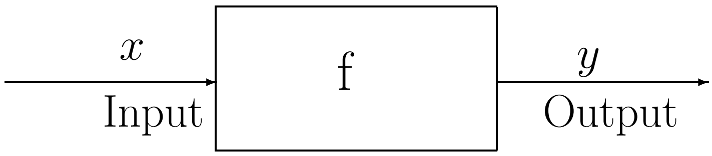
E-mail: fermin@mtm.ufsc.br

http//:www.mtm.ufsc.br/~fermin

Rio de Janeiro, 30 de Julho 2003

Sensibilidade de Autovalores

1. Condicionamento de um problema



$f : X \to Y$, X, Y : Esp. normados ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, etc.),
$x \in X$: entrada, $\quad y = f(x) \in Y$: resposta

Ex. 1: Solução de um sistema linear

$$Ax = b, \; x =?$$

$$\begin{aligned} f :\; & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & b \mapsto x = f(b) = A^{-1}b \end{aligned}$$

Ex. 2: Cálculo de raízes de um polinômio

$$P(\lambda) = 0, \quad \lambda =?$$

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \\ & \quad a = [a_0, \ldots, a_{n-1}]^T \mapsto \lambda = f(a), \; / \\ & a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n_1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0. \end{aligned}$$

Como se comporta a resposta (solução) do problema perante pequenas variações nos dados de entrada ?

- Prob. *bem condicionado:* pequenas variações nos dados de entrada produzem pequenas variações na resposta.
- Prob. *mal condicionado:* pequenas variações nos dados de entrada podem produzir grandes perturbações nos dados de saída.

Caso 1: $X = Y = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y = f(x) \neq 0$

$$\delta x : \text{variação em } x$$
$$\delta y = f(x+\delta x) - f(x) : \text{variação em } y$$

Variação absoluta:

$$\delta y = f(x+\delta x) - f(x) = f'(x)\delta x + \mathcal{O}(\delta x)^2.$$

O erro abs. em y devido a variações de tamanho $|\delta x|$ pode ser grande se $|f'(x)|$ é grande !

Variação relativa:

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{x f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{\delta x}{x} + \mathcal{O}(\delta x),$$

O erro relat. em y devido a variações relativas em x pode ser grande se $|xf'(x)|/|f(x)|$ é grande !

A sensibilidade do problema depende dos números

$|f'(x)|$ ou $|xf'(x)|/|f(x)|$ (Número de condição)

$$\kappa(f)(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{|\delta x| \leq \delta} \dfrac{|\delta y|}{|\delta x|}, & \text{para erros abs.} \\ \\ \lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{|\delta x| \leq \delta} \dfrac{|\delta y|}{|y|} \Big/ \dfrac{|\delta x|}{|x|}, & \text{para erros relat,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |f'(x)|, & \text{para erros absolutos} \\ \\ \left| \dfrac{xf'(x)}{f(x)} \right|, & \text{para erros relativos.} \end{cases}$$

Exemplo: Calcular $y = log(x)$.

Neste caso, $f(x) = log(x)$:

$$\kappa(f)(x) = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{1}{log(x)} \right|.$$

$\kappa(f)(x)$ é grande para $x \approx 1$ e o problema é mal condicionado.

Caso 2: $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$,

$$f : X \to Y \Leftrightarrow f_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ j = 1 : n$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y_j = f_j(x_1, \ldots, x_m),\ j = 1 : n,$$

$\delta y_j = f_j(x + \delta x) - f_j(x)$: variação da j-ésima comp. devido a var. em todas as variáveis $x_i,\ i = 1 : m$.

$$\delta y_j = f_j(x + \delta x) - f_j(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, \delta x_i.$$

$$\begin{aligned} |\delta y_j| \ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right| \ |\delta x_i| \leq \max_i |\delta x_i| \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right| \\ &\leq \max_i |\delta x_i| \cdot \max_j \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right|, \end{aligned}$$

Usando a norma do máximo:

$$\|\delta y\|_\infty \leq \|Jf\|_\infty \|\delta x\|_\infty,$$

$$Jf \text{ : matriz Jacobiana de } f.$$

A variação absoluta em y a variações absolutas em x depende do número $\|Jf\|_\infty$ (Número de Condição ?)

Definição 1 Número de condição do problema f, no ponto x :

$$\kappa(f)(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{\|\delta x\| \le \delta} \dfrac{\|\delta f\|}{\|\delta x\|}, & \text{(err. abs.)} \\ \lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{\|\delta x\| \le \delta} \dfrac{\|\delta f\|}{\|f(x)\|} / \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}. & \text{(err. relat.)} \end{cases}$$

Qual a sensib. do prob. de calcular as raízes de

$$p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \quad a_0 \neq 0, ?$$

Assuma: ν é uma raiz simples, ou seja,

$$p(\nu) = 0, \quad p'(\nu) \neq 0.$$

Aqui: $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ \nu = \nu(a),\ a = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]^T$. definida implicitamente através de

$$\nu(a)]^n + a_{n-1}[\nu(a)]^{n-1} + \cdots + a_j[\nu(a)]^j + \cdots + \\ + a_1[\nu(a)] + a_0 = 0.$$

A sensib. do prob. depende da norma da matriz Jacobiana:

$$J(\nu) = [\frac{\partial \nu}{\partial a_0}, \frac{\partial \nu}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial \nu}{\partial a_{n-1}}]$$

Número de condição da raiz ν, na norma-2 (erros abs.)

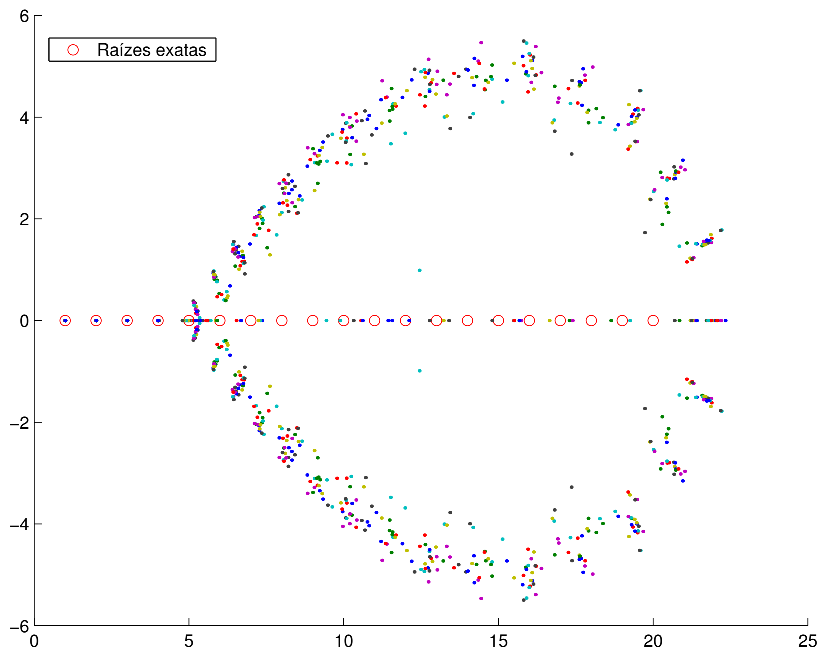
$$\kappa(\nu)(a) = \frac{1}{|p'(\nu)|}\sqrt{1 + |\nu|^2 + |\nu|^4, \ldots, +|\nu|^{2(n-1)}},$$

Para o Polinômio de Wilkinson:

$$p(t) = \prod_{j=1}^{20}(t - j) = (t-1)(t-2)\cdots(t-20).$$

A raiz $v = 15$ tem aprox.

$$\kappa(\nu)(a) \approx \frac{1.67 \times 10^9 \times 15^{14}}{5!14!} \approx 5.1 \times 10^{13}.$$



Qual a Sensib. do Problema de calcular a sol. de um sistema de eq. lineares?

$$\textbf{Problema:} \quad Ax = b, \quad x =?$$

Formulação teórica:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$b \mapsto x = f(b) = A^{-1}b \ \ (\ b\text{: dados de ent.})$$

Neste caso: Jacobiana: $Jf(b) = A^{-1}$.

$$\kappa(f)(b) = \begin{cases} \|A^{-1}\| & (\text{ err. abs. }) \\[2ex] \dfrac{\|b\|\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}b\|} & (\text{err. relat.}) \end{cases}$$

O problema de resolver o sistema linear $Ax = b$ pode ser muito sensível a pequenas variações em b quando $\|A^{-1}\|$ é muito grande.

No caso de errros relativos:

$$\kappa(f)(b) \leq \|A\|\|A^{-1}\|.$$

e a cota pode ser atingida para certo vetor b !

Qual a Sensib. do Problema de calcular os autovalores de uma matriz?

Formulação teórica:

$f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C},$

$A \mapsto \lambda = f(A)$

Sujeito a $Ax = \lambda x$ (A: dados de ent.)

Se $\delta\lambda$: variação em λ (simples) devido a uma variação δA em A, e y autovetor à esquerda

$$\delta\lambda = \frac{y^*\delta A x}{y^* x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|\delta\lambda|}{\|\delta A\|_2} \leq \frac{\|x\|_2\|y\|_2}{|y^* x|}.$$

$$\kappa(\lambda, A) \leq \lim_{\|\delta A\|_2 \to 0} \frac{|\delta\lambda|}{\|\delta A\|_2} \leq \frac{\|x\|_2\|y\|_2}{|y^* x|}.$$

$\kappa(\lambda, A)$ pode ser muito grande quando $|y^* x| \approx 0$ e neste caso o autovalor λ pode ser muito sensível a pequenas perturbações em A! (típico para matrizes não simétricas, veja exemp. pag. 56)

2. 1 Sensibilidade de Autoval. de Pol. Matriciais: Abordagem Polinomial

$P_m(\lambda) = \lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_0$: Pol. exato

$\widetilde{P}_m(\lambda) = \lambda^m + \widetilde{A}_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \widetilde{A}_0$: ($\widetilde{A}_l \approx A_l$)

Se $\lambda + \delta\lambda$: autovalor de $\widetilde{P}_m(\lambda)$ e $x + \delta x$: autovetor associado, e

$$\|\delta A_0, \delta A_1, \cdots, \delta A_{m-1}\|_2 \leq \delta, \quad \delta A_l = \widetilde{A}_l - A_l$$

Para autovalores simples (Tisseur e Higham 2000):

$$\kappa(\lambda, P) = \lim_{\delta \to 0} \sup \left\{ \frac{|\delta\lambda|}{\delta} \right\}$$

Sujeito a $\quad \widetilde{P}_m(\lambda + \delta\lambda)(x + \delta x) = 0.$

Teorema 2 *Se λ autov. simples, x, y : autovet. associados,*

$$\kappa(\lambda, P) = \eta \frac{\|y\|_2 \|x\|_2}{|y^* P'_m(\lambda) x|},$$

com $\eta = \sqrt{1 + |\lambda|^2 + |\lambda|^4 + \cdots + |\lambda|^{2(m-1)}}.$

2.2 Sensibilidade de Autoval. de Pol. Matriciais: Abordagem da Matriz Companheira

C_A : matriz companheira em blocos assoc. a $P_m(\lambda)$:

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & I_q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & I_q \\ -A_0 & -A_1 & & \cdots & -A_{m-1} \end{bmatrix}$$

λ : autovalor simples

ℓ, r : autovetores associados, à esquerda e à direita, respect.

Número de Condição de Wilkinson (Wilkinson 1963)

$$\kappa(\lambda, C_A) = \frac{\|\ell\|_2 \|r\|_2}{|\ell^* r|}.$$

Ambos os números $\kappa(\lambda, P)$ $\kappa(\lambda, C_A)$ são de tamanhos comparáveis

Ex.: Um Prob. de Autovalor Quadrático.

$P_2(\lambda) = \lambda^2 I + A_1\lambda + A_0$: Pol. associado ao sistema

$$M\ddot{q}(t) + \epsilon C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0, \quad \epsilon > 0.$$

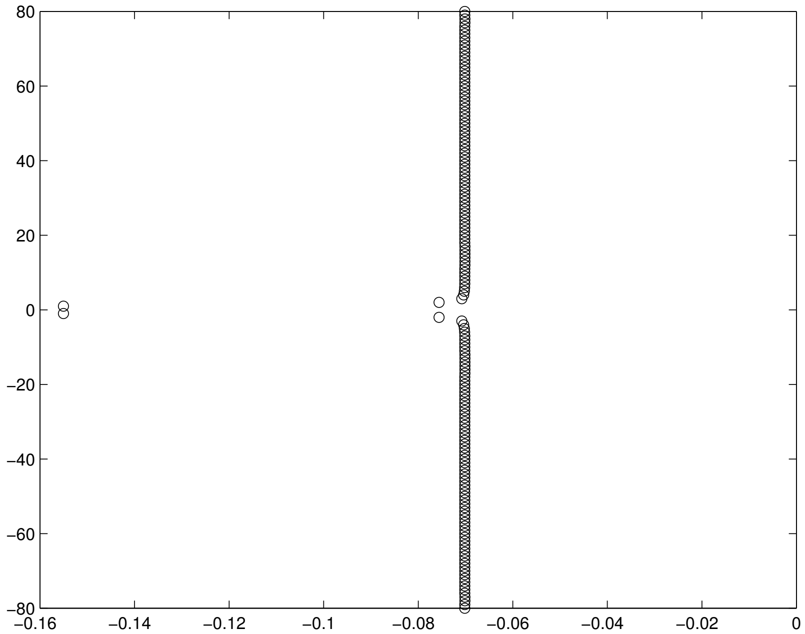
$$M = \frac{\pi}{2}I, \; K = \frac{\pi}{2}\mathrm{diag}(1^2, \cdots, n^2), \; C = [c_{k,j}]$$

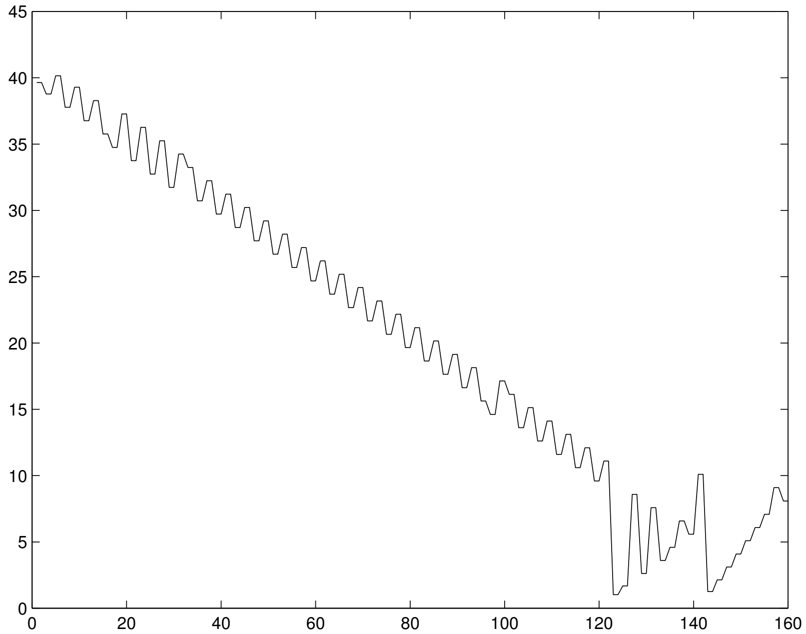
$$c_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{se } k+j \text{ for ímpar,} \\ 12\pi\left[\dfrac{1}{(k+j)^4} - \dfrac{1}{(k-j)^4}\right] & \text{se } k+j \text{ for par e } k \neq j, \\ \dfrac{\pi^5}{60} - \dfrac{2.7\pi}{2} + \dfrac{3\pi}{4k^2} & \text{se } k = j \;. \end{cases}$$

Os espectro de $P_m(\lambda)$ (equiv. de C_A) é formado por autovalores complexos conjugados e a sensibilidade dos autovalores depende de ϵ e a dimensão n

Resultados Numéricos

$$n = 80, \quad \epsilon = 0.11$$

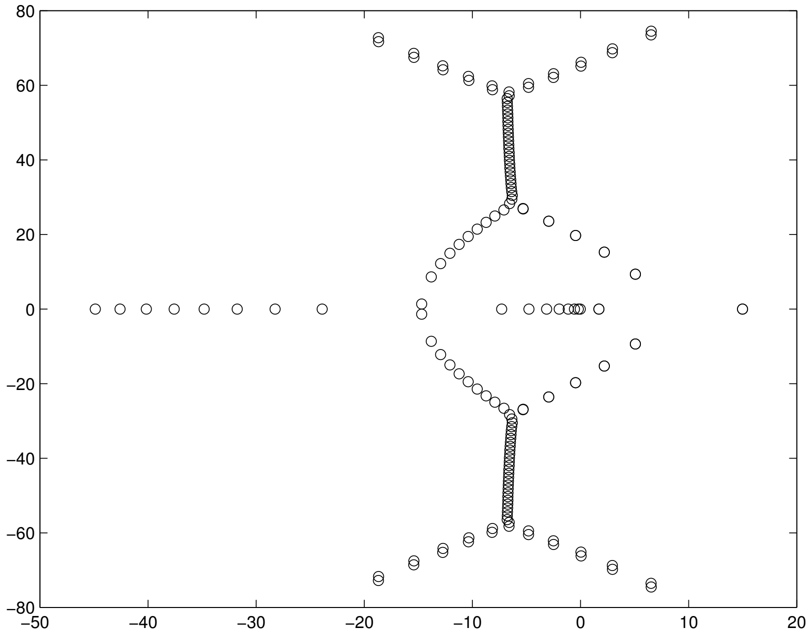


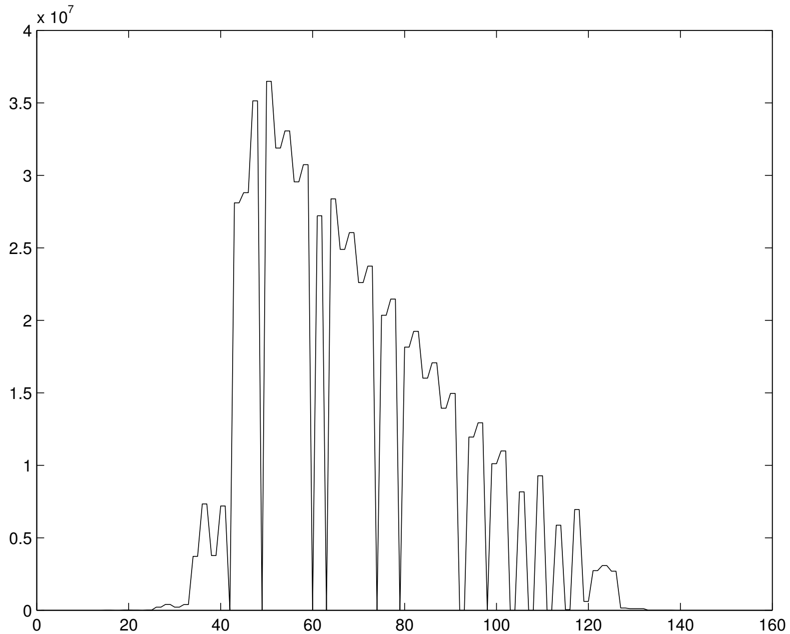


Esquerda: Autovalores de $P_2(\lambda)$. Direita: $\kappa(\lambda, C_A)$

Resultados Numéricos

$$n = 80, \quad \epsilon = 11.25$$





Esquerda: Autovalores de $P_2(\lambda)$. Direita: $\kappa(\lambda, C_A)$