MTM5005 - Conjuntos Numéricos - 2011/01
Prof. Gilles Gonçalves de Castro
Lista complementar 2

---

1) Mostre que a soma nos inteiros satisfaz:

a) Está bem definida.

b) $m + n = n + m \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$ (comutatividade),

c) $m + (n + p) = (m + n) + p \quad \forall m, n, p \in \mathbb{Z}$ (associatividade),

d) $0 = [(0, 0)]$ é único número inteiro que satisfaz $m + 0 = 0 + m = m \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ (elemento neutro),

e) para cada $m \in \mathbb{Z}$ existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $m + p = p + m = 0$,

2) Mostre que o produto nos inteiros satisfaz:

a) Está bem definido.

b) $m.n = n.m \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$ (comutatividade),

c) $m.(n.p) = (m.n).p \quad \forall m, n, p \in \mathbb{Z}$ (associatividade),

d) $1 = [(1, 0)]$ é único número inteiro que satisfaz $m.1 = 1.m = m\ \forall m \in \mathbb{Z}$ (elemento neutro),

e) Se $m.p = n.p$ e $p \neq 0$ então $m = n$ (lei do cancelamento),

f) $m.(n + p) = m.n + m.p$ (distributividade),

g) se $m.n = 1$ então $m = n = 1$ ou $m = n = -1$ (e consequentemente 1 e -1 são os únicos elementos inversíveis nos inteiros).

3) Mostre que a relação $\leq$ nos inteiros satisfaz:

a) $n \leq n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ (reflexiva).

b) Se $m \leq n$ e $n \leq m$ então $m = n$ (anti-simétrica).

c) Se $m \leq n$ e $n \leq p$ então $m \leq q$ (transitiva).

d) Para quaisquer dois inteiros n, m temos que $m \leq n$ ou $m \geq n$ (total). Note que pode valer as duas desigualdades (ver item b).

e) Dados dois inteiros n, n então é válida uma e apenas uma das condições: $m < n$ ou $m > n$ ou $m = n$ (tricotomia).

f) Se $m \leq n$ então $m + p \leq n + p \quad \forall p \in \mathbb{Z}$.

g) Se $m \leq n$ então $m.p \leq n.p \quad \forall p \geq 0$.

h) Se $m \leq n$ então $m.p \geq n.p \quad \forall p \leq 0$.

(Observação: o item e) segue direto do item d), mas também podemos fazer o contrário: mostrar primeiro o item e) e tirar o item d) como consequência.)

4) Mostre que todo número inteiro é um natural ou o oposto de um natural, e que zero é o único que é os dois ao mesmo tempo.

5) Mostre que a soma e o produto nos racionais definidos em sala independem da escolha de representante. E mostre que com a ordem definida em sala $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado completo (ver páginas 222 e 229 do livro Fundamento de Aritmética do Hygino).