H-Cálculo 1 - PAM

Prof.: Ivan Pontual Costa e Silva— 1ª Prova (Admissão) — 20/03/09

ALUNO(A):____

Leia com Atenção:

- Contarão pontos a clareza das idéias e a precisão no raciocínio; evite escrever em excesso ou pouco demais.
- Ao fazer as questões 2 a 4 abaixo, *mas não na questão 1*, você pode fazer as contas normalmente, sem se preocupar com as propriedades (P1)-(P12), bem como usar propriedades básicas de módulo de números reais e propriedades de inteiros, racionais, etc., que você aprendeu no segundo grau, com exceção, é claro, do que se pede explicitamente que se prove.

1) Prove as afirmações abaixo para números reais a, b, c, usando as propriedades (P1)-(P12), definições e proposições vistas em sala, *indicando claramente a propriedade, proposição ou definição usada em cada passo.*

a) [1.0 pt.] Se $a < b$ e $c < 0$, então $c \cdot b < c \cdot a$.

b) [1.0 pt.] $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$.

c) [1.0 pt.] Se $0 < a < b$, então $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

2) [2.0 pts.] Prove que se $y_0 \neq 0$ e

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

então $y \neq 0$ e

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \epsilon.$$

3) Admita que $\sqrt{2}$ é irracional.

a) [1.0 pt.] Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n\sqrt{2}}$ é irracional (*Sugestão:* não é necessário usar indução!).

b) [1.5 pt.] Aceite, sem provas, o seguinte fato: para todo número real a, existe um número natural n tal que $n > a$ (pode parecer incrível, mas é *impossível* provar isso usando as propriedades (P1)-(P12)!). Use isto e (a) para provar que para qualquer número real $a > 0$, existem um racional r e um irracional i tais que $0 < r < a$ e $0 < i < a$.

4) Considere um número natural n_0 fixado.

a) [1.0 pt.] Prove que para todo número natural n, existem números inteiros q, r, com $0 \leq r \leq n_0 - 1$, tais que $n = q \cdot n_0 + r$.

b) [1.5 pt.] Prove que os números inteiros q, r do item anterior são únicos, isto é, se $n = q \cdot n_0 + r = q' \cdot n_0 + r'$, com q, q', r, r' inteiros e $0 \leq r, r' \leq n_0 - 1$, então $q = q'$ e $r = r'$ (por causa dessa unicidade, dizemos que q é *o* quociente, e r *o* resto, da divisão de n por n_0).

> "*Eu uso a palavra "prova" não no sentido dos advogados, para os quais duas meias-provas equivalem a uma plena, mas no sentido dos matemáticos, para os quais uma meia-prova = 0, e se requer de uma prova que qualquer dúvida de sua validade seja impossível.*"

C.F. Gauss (1777-1855), matemático alemão.

> "*There's no sense in being precise when you don't even know what you're talking about.*"

J. von Neumann (1903-1957), matemático húngaro-americano.

Propriedades Algébricas Fundamentais dos Números Reais:

(P1) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(P2) $a + 0 = 0 + a = a$.

(P3) $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(P4) $a + b = b + a$.

(P5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(P6) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; $1 \neq 0$.

(P7) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, para $a \neq 0$.

(P8) $a \cdot b = b \cdot a$.

(P9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Propriedades de Ordem:

Existe P subconjunto de números tais que

(P10) Para um número qualquer a, uma e apenas uma das seguintes alternativas é válida:

(i) $a \in P$,

(ii) $(-a) \in P$,

(iii) $a = 0$.

(P11) Se a e b estão em P, então $a + b \in P$.

(P12) Se a e b estão em P, então $a \cdot b \in P$.

Podemos então definir:

$$a < b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b - a (\overset{\text{def}}{\equiv} b + (-a)) \in P.$$