

H-Cálculo 1 - PAM

Prof.: Ivan Pontual Costa e Silva— 1ª Prova (Admissão) — 24/03/10

ALUNO(A): _____

Leia com Atenção:

- Contarão pontos a clareza das idéias e a precisão no raciocínio; evite escrever em excesso ou pouco demais.
- Ao fazer as questões 2 a 4 abaixo, *mas não na questão 1*, você pode fazer as contas normalmente, sem se preocupar com as propriedades (P1)-(P12), bem como usar propriedades básicas de módulo de números reais e propriedades de inteiros, racionais, etc., que você aprendeu no segundo grau, com exceção, é claro, do que se pede explicitamente que se prove.

1) Prove as afirmações abaixo para números reais a, b , usando as propriedades (P1)-(P12), definições e proposições vistas em sala, *indicando claramente a propriedade, proposição ou definição usada em cada passo*.

- a) [1.5 pt.] Se $0 \leq a, b$, então $a < b$ se, e somente se, $a^2 < b^2$.
b) [1.5 pt.] $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$.

2) [2.0 pts.] Assumindo a desigualdade triangular, prove que

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

3) Admita que $\sqrt{2}$ é irracional.

- a) [1.0 pt.] Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n\sqrt{2}}$ é irracional (*Sugestão: não é necessário usar indução!*).
- b) [1.5 pt.] Aceite, sem provas, o seguinte fato: para todo número real a , existe um número natural n tal que $n > a$ (pode parecer incrível, mas é *impossível* provar isso usando as propriedades (P1)-(P12)!). Use isto e (a) para provar que para qualquer número real $a > 0$, existem um racional r e um irracional i tais que $0 < r < a$ e $0 < i < a$.

4) [2.5 pts.] Prove que o Princípio de Indução usando o Princípio da Boa Ordenação.

“Eu uso a palavra “prova” não no sentido dos advogados, para os quais duas meias-provas equivalem a uma plena, mas no sentido dos matemáticos, para os quais uma meia-prova = 0, e se requer de uma prova que qualquer dúvida de sua validade seja impossível.”

C.F. Gauss (1777-1855), matemático alemão.

*“There’s no sense in being precise when you don’t even know what
you’re talking about.”*

J. von Neumann (1903-1957), matemático húngaro-americano.

Propriedades Algébricas Fundamentais dos Números Reais:

- (P1) $a + (b + c) = (a + b) + c.$
- (P2) $a + 0 = 0 + a = a.$
- (P3) $a + (-a) = (-a) + a = 0.$
- (P4) $a + b = b + a.$
- (P5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
- (P6) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a; 1 \neq 0 .$
- (P7) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1, \text{ para } a \neq 0.$
- (P8) $a \cdot b = b \cdot a.$
- (P9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Propriedades de Ordem:

Existe P subconjunto de números tais que

- (P10) Para um número qualquer a , uma e apenas uma das seguintes alternativas é válida:
 - (i) $a \in P,$
 - (ii) $(-a) \in P,$
 - (iii) $a = 0.$
- (P11) Se a e b estão em P , então $a + b \in P.$
- (P12) Se a e b estão em P , então $a \cdot b \in P.$

Podemos então definir:

$$a < b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} b - a \stackrel{\text{def}}{=} b + (-a) \in P.$$