MTM5801 - H-Cálculo I - 2011/01
Prof. Gilles Gonçalves de Castro
Prova 1 (Admissão) - 27 de abril de 2011

Nome: ____

Curso: ____________________________ Matrícula: __________

Leia com Atenção:

- Contarão pontos a clareza das ideias e a precisão no raciocínio; evite escrever em excesso ou pouco demais.
- Você pode escolher quatro das cinco questões para fazer, cada uma valendo 2,5 pontos. Caso você faça as cinco questões, cada questão vale 2 pontos.

1) a) Dê exemplos de conjuntos A, B e C tais que $B \neq C$ mas $A \cup B = A \cup C$.
   b) Dê exemplos de conjuntos A, B e C tais que $B \neq C$ mas $A \cap B = A \cap C$.
   c) Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ ao mesmo tempo, então, neste caso, $B = C$.
   (Dica: Observe que $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.)

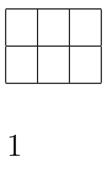
2) Prove as afirmações abaixo para números reais a, b, c, usando as propriedades (P1)-(P12), definições e proposições vistas em sala, *indicando claramente a propriedade, proposição ou definição usada em cada passo.*

   a) $a - (b + c) = (a - b) - c$ (lembrando que $a - b = a + (-b)$),
   b) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$,
   c) Se $a < 0$ e $b > 0$ então $a \cdot b < 0$.

3) Mostre as seguintes relações para números reais a, b (você pode fazer essa questão de forma mais direta sem demonstrar cada passo como na questão 2):

   a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,
   b) $|a - b| \leq |a| + |b|$ (tem uma maneira rápida de fazer esse item usando um resultado visto em aula).

4) Um barra de chocolate retangular é composta de pedaços retangulares de mesmo tamanho conforme a figura abaixo:



(exemplo de um chocolate 2 por 3). Qual o mínimo número de quebras você deve fazer para separar todos os pedaços num chocolate de tamanho n por m? Justifique sua resposta.

(Dica: use o segundo princípio da indução, também chamado de principle of complete induction no livro do Spivak).

5) Seja $a \in \mathbb{N}^*$. Queremos definir a exponenciação nos naturais da seguinte forma:

(E1) $a^0 = 1$,

(E2) $a^{S(n)} = a \cdot a^n$.

Usando os axiomas (N1)-(N5), (S1)-(S2), (M1)-(M2) e eventuais propriedades das operações nos naturais mostre que:

a) A exponencial a^n está bem definida para todo $n \in \mathbb{N}$,

b) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

c) $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

(Dica: nos ítens b) e c) fixe uma váriavel e faça indução sobre a outra)

"*Problems worthy of attack prove their worth by hitting back.*"

Piet Hein

Propriedades Algébricas Fundamentais dos Números Reais:

(P1) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(P2) $a + 0 = 0 + a = a$.

(P3) $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(P4) $a + b = b + a$.

(P5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(P6) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; $1 \neq 0$.

(P7) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, para $a \neq 0$.

(P8) $a \cdot b = b \cdot a$.

(P9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Propriedades de Ordem:

Existe P subconjunto de números tais que

(P10) Para um número qualquer a, uma e apenas uma das seguintes alternativas é válida:

- (i) $a \in P$,
- (ii) $(-a) \in P$,
- (iii) $a = 0$.

(P11) Se a e b estão em P, então $a + b \in P$.

(P12) Se a e b estão em P, então $a \cdot b \in P$.

Podemos então definir:

$$a < b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b - a \overset{\text{def}}{=} b + (-a) \in P.$$

Axiomas de Peano:

Nos axiomas abaixo $\mathbb{N}$ é um conjunto, $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função e 0 um elemento.

(N1) $0 \in \mathbb{N}$.

(N2) Se $n \in \mathbb{N}$ então $S(n) \in \mathbb{N}$.

(N3) $0 \notin \mathrm{Im}(S)$.

(N4) S é uma função injetora.

(N5) Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

   (i) $0 \in A$,

   (ii) se $n \in A$ então $S(n) \in A$

   temos que $A = \mathbb{N}$

Soma nos naturais:

Definimos uma operação $+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:

(S1) $m + 0 = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$,

(S2) $m + S(n) = S(m + n)$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

Multiplição nos naturais:

Definimos uma operação $\cdot : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:

(M1) $m \cdot 0 = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$,

(M2) $m \cdot S(n) = m + m \cdot n$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$.