Εισαγωγή στις

Γεωμετρική κατασκευές

Eduardo Wagner

Uma introdução às

Construções geométricas

Eduardo Wagner

Apresentação

Οι γεωμετρικές κατασκευές ξεκίνησαν στην αρχαία Ελλάδα.
As construções geométricas tiveram início na Grecia antiga.

Esta é a razão do título desta apostila estar escrito em grego. O desenvolvimento acelerado da Matemática no mundo antigo deveu-se a gregos geniais, pensadores, filósofos, cientistas que colocaram o raciocínio, a lógica e a razão como ferramentas para descobrir coisas novas e tentar explicar o mundo em que viviam. "Tudo é número" disse Pitágoras sintetizando o pensamento que tudo na natureza pode ser explicado pelos números, ou seja, pela Matemática. As construções geométricas estavam no centro desse desenvolvimento da Matemática.

As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas.

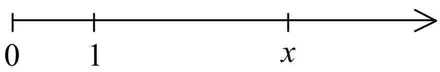
Esta apostila traz uma introdução às construções geométricas. Nela, estamos dando a base para as construções abordandos apenas as construções elementares e o método dos lugares geométricos. Com isto bem compreendido, o professor poderá se aventurar a ir além e estudar o método algébrico, as áreas, as transformações e as construções aproximadas que estão no livro Construções Geométricas editado pela SBM. Por ora, desejo a todos um bom proveito nesta leitura. Você terá contato com problemas intrigantes, desafiadores, mesmo que a maioria não seja difícil. Mas é certamente gostoso resolver algo novo enquanto que ler problemas que já conhecemos é definitivamente chato.

1

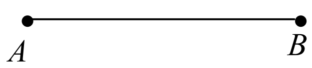
Construções elementares

1. Introdução

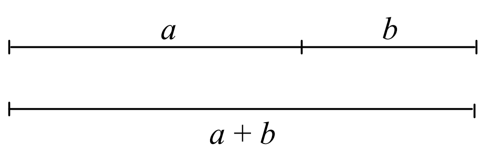
As construções geométricas aparecem na antiguidade e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática. Há 2000 anos atrás a palavra número significava número natural. Não havia números negativos e as frações não eram consideradas números, eram apenas razões entre números. Era de fato complicado. Se não havia ainda a noção de número racional, os números reais então estavam a séculos de distância. Entretanto os gregos tiveram uma idéia engenhosa. A de representar uma grandeza qualquer por um segmento de reta. Esta idéia é equivalente a dizer que todo número real positivo está associado a um ponto de uma semirreta graduada. Hoje, visualizamos o número real x assim:

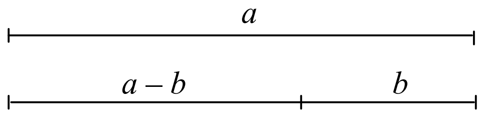


Antigamente, a mesma idéia era vista assim:



As operações de adição e subtração de segmentos são inteiramente intuitivas.

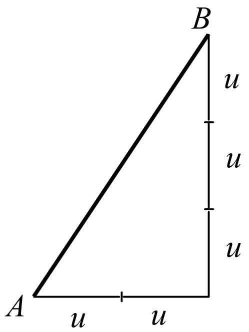




A multiplicação de dois segmentos podia ser visualizada como a área de um retângulo e a razão entre dos segmentos era … . Bem, era simplesmente isso mesmo, a razão entre dois segmentos.

Um problema comum hoje é, por exemplo, o de calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são 2 e 3. A solução é simples e usa o teorema de Pitágoras. Se x é o comprimento da hipotenusa então $x = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

O mesmo problema antigamente era enunciado assim: construir o triângulo retângulo cujos catetos medem 2 unidades e 3 unidades. A solução era completamente geométrica. Era dado um segmento unitário u e o triângulo era construido com as medidas dadas.



Observe a figura acima. Se associarmos o segmento u ao número 1, o segmento AB é a visualização do número real $\sqrt{13}$.

Desta forma, *calcular* de hoje é sinônimo do *construir* de antigamente e as dificuldades são equivalentes. Se hoje achamos difícil calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo conhecendo o perímetro e a altura relativa à hipotenusa, é igualmente difícil desenhar o triângulo retângulo onde o perímetro e a altura são dados através de dois segmentos.

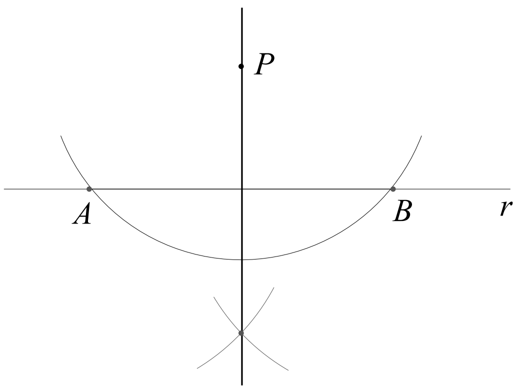
2. Paralelas e perpendiculares

Nas construções geométricas são permitidos apenas a régua (não graduada) e o compasso. A régua serve apenas para desenhar uma reta passando por dois pontos dados e o compasso serve apenas para desenhar uma circunferência cujo raio é dado por um segmento e cujo centro é um ponto dado. Estes instrumentos não podem ser utilizados de nenhuma outra maneira.
A pureza das construções com régua e compasso é a mesma da geometria analítica que também resolve, de forma equivalente, problemas de geometria usando as coordenadas (pontos dados), a equação da reta (régua) e a equação da circunferência (compasso).

Para começar a desenhar, há dois problemas básicos que precisamos aprender.

1) Traçar por um ponto dado uma reta perpendicular a uma reta dada.
2) Traçar por um ponto dado uma reta paralela a uma reta dada.

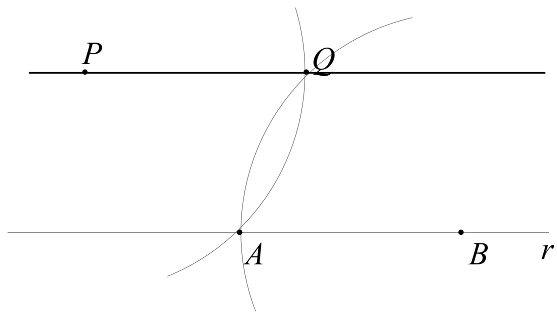
Para resolver o primeiro, seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. A construção é a seguinte. Com centro em P trace uma circunferência qualquer cortando a reta r nos pontos A e B como mostra a figura a seguir.



Em seguida, desenhamos dois arcos de circunferência de mesmo raio, com centros nos pontos A e B, determinando na interseção o ponto Q. A reta PQ é perpendicular à reta r e o primeiro problema está resolvido.
O fato importante das construções geométricas é que não basta encontrar a solução. É preciso justificar por que ela é correta. Neste primeiro problema, a primeira circunferência desenhada garante que $PA = PB$ e as duas seguintes, garantem que $QA = QB$. Assim, os pontos P e Q equidistam de A e B. Portanto, eles pertencem à

mediatriz do segmento AB que a reta perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio.

Para resolver o segundo problema, seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. A construção é a seguinte. Traçamos três circunferências com mesmo raio: a primeira com centro em P cortando a reta r em A; a segunda com centro em A cortando a reta r em B e a terceira com centro em B e cortando a primeira circunferência em Q.

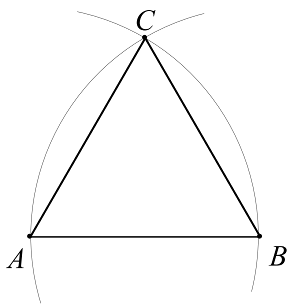


A reta PQ é paralela à reta r e o problema está resolvido.
Para justificar, observe que, pelas construções efetuadas, $PABQ$ é um losango e, portanto seus lados opostos são paralelos.

Com a régua e o compasso, resolva o problema seguinte.

Problema 1
Dado um segmento AB construa o triângulo equilátero ABC e sua altura CM.

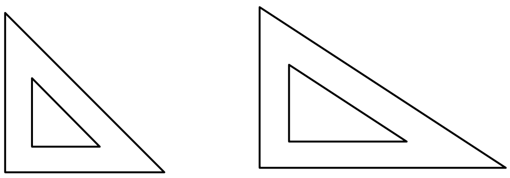
Solução:
Coloque a "ponta seca" do compasso em A e desenhe um arco de circunferência de raio AB e, em seguida faça o contrário: um arco de centro B e raio BA. Estes arcos



cortam-se em C e D. Então, o triângulo ABC é equilátero e a reta CD é a mediatriz de AB.

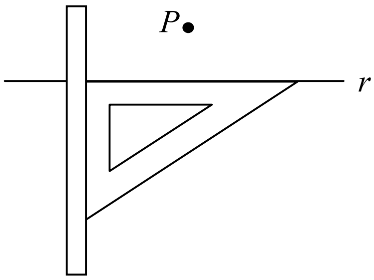
3. Tornando as construções mais práticas

Para tornar as construções mais práticas vamos permitir a utilização dos primeiros instrumentos impuros: os esquadros. Eles são construídos para facilitar e agilizar o traçado das construções de paralelas e perpendiculares. Eles são de dois tipos: um deles com ângulos de 90°, 45°, 45° e outro com ângulos de 90°, 60°, 30°.

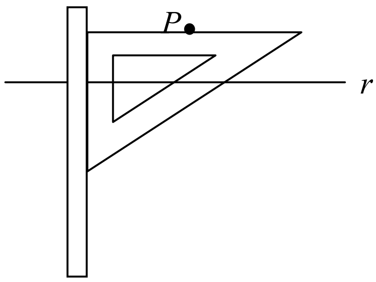


Veja, a seguir, como utilizamos a régua e os esquadros para o traçado de retas paralelas e perpendiculares.

a) Traçar pelo ponto P a reta perpendicular à reta r.
Solução:



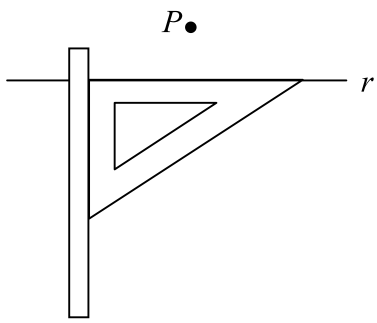
Posicione a régua e um dos esquadros como na figura ao lado.



Fixe bem a régua e deslize o esquadro até que seu bordo passe pelo ponto P.
Fixe o esquadro e trace por P a reta paralela à reta r.

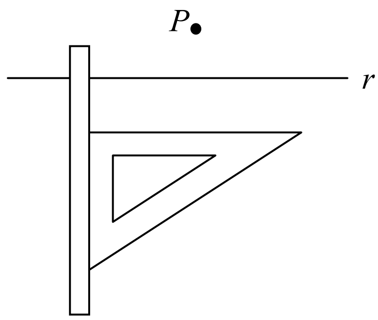
b) Traçar pelo ponto P a reta perpendicular à reta r.

Solução:



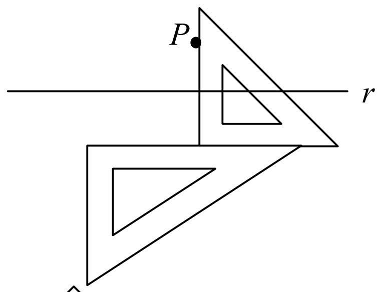
1º passo

Posicione a régua e um dos esquadros como na figura ao lado



2º passo

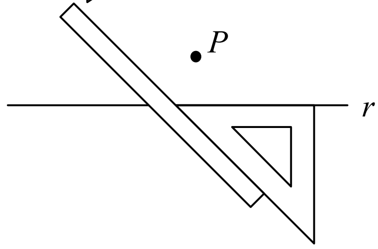
Fixe a régua e afaste um pouco o esquadro da reta r para permitir um melhor traçado da perpendicular.



3º passo

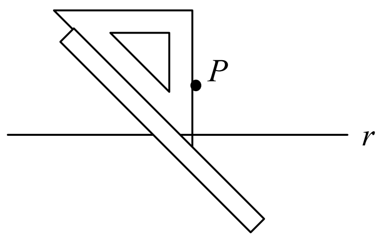
Posicione o segundo esquadro sobre o primeiro e trace por P a perpendicular á reta r.

Uma outra solução é a seguinte:



1º passo

Posicione a régua e o esquadro de 45º como na figura ao lado

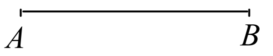


2º passo

Fixe a régua e deslize o esquadro até que o outro cateto passe por P. Fixe o esquadro e trace por P a perpendicular à reta r.

Problema 2

Dado o segmento *AB*, construa o quadrado *ABCD*.



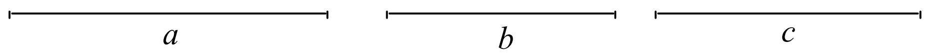
Solução:

(figura por conta do aluno)

Trace por *A* e *B* retas perpendiculares ao segmento *AB*. Trace as circunferências de centro *A*, passando por *B* e de centro *B* passando por *A*. As interseções dessas circunferências com as perpendiculares são os vértices *C* e *D*.

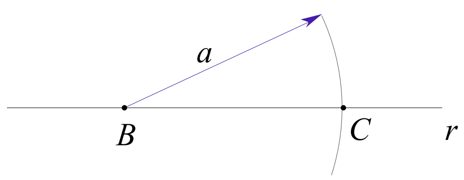
Problema 3

Construir o triângulo *ABC* sendo dados os três lados:



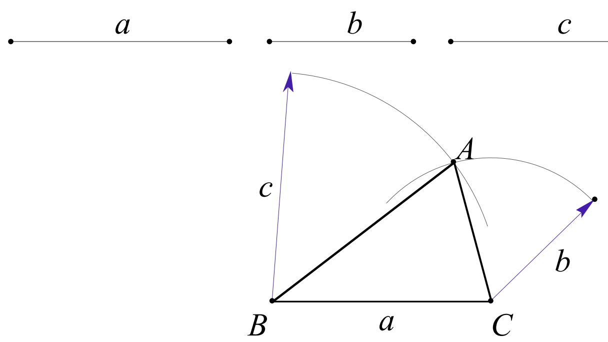
Solução:

Desenhe uma reta *r* e sobre ela assinale um ponto que chamaremos *B*. Para transportar o segmento *a*, pegue o compasso, ponha a ponta seca em uma das extremidades e abra até que a ponta do grafite coincida com a outra extremidade. Ponha agora a ponta seca



em *B* e trace um pequeno arco cortando a reta *r*. Este é o ponto *C* tal que $BC = a$.

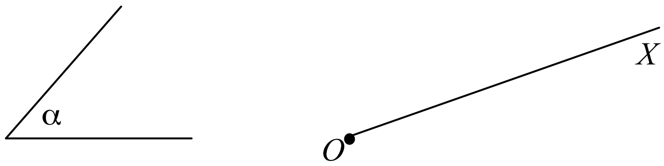
Pegue agora o segmento *b* com o compasso. Com centro em *C* desenhe, acima da reta *r* um arco de circunferência de raio *b*. Pegue o segmento *c* com o compasso e, com centro em *B* desenhe um arco de raio *c*. A interseção desses dois arcos é o vértice *A* do triângulo.



O exemplo anterior, mostrou como transportar segmentos de um lugar para outro. Vamos mostrar agora como transportar ângulos.

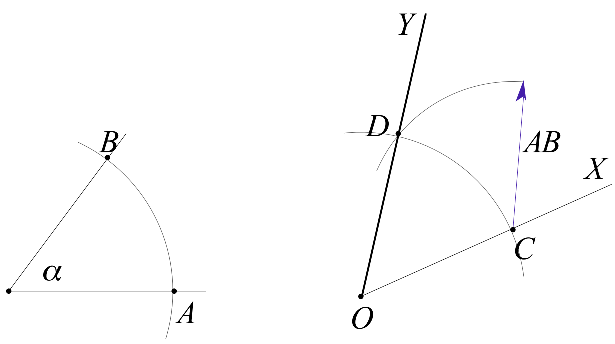
Problema 4

Dado o ângulo α, e a semirreta *OX* construir o ângulo $XOY = \alpha$:



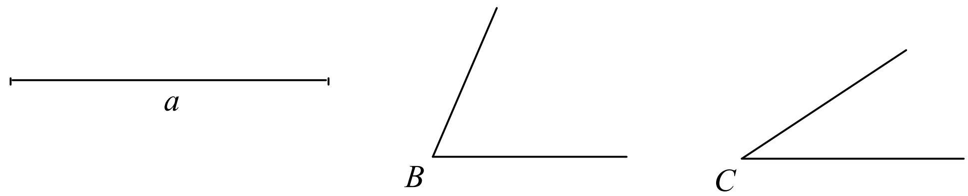
Solução:

Com centro no vértice do ângulo dado trace um arco de cricunferência cortando seus lados nos pontos *A* e *B* veja figura a seguir). Sem modificar a abertura do compasso trace um arco com centro *O* cortando *OX* em *C*. Pegue com o compasso a distância *AB* e trace, com centro em *C* e com este raio, um arco determinando sobre o primeiro o ponto *D*. A semirreta *OY* que passa por *D* é tal que $XOY = \alpha$.



Problema 5

Construir o triângulo *ABC* dados o lado *a* e os ângulos *B* e *C*:



Solução:

(figura por conta do aluno)

Desenhe na sua folha de papel o segmento $BC = a$ e, em seguida transporte os ângulos dados construindo as semirretas *BX* e *CY* de forma que os ângulos *CBX* e *BCY* sejam iguais aos ângulos dados. A interseção das duas semirretas é o vértice *A*.

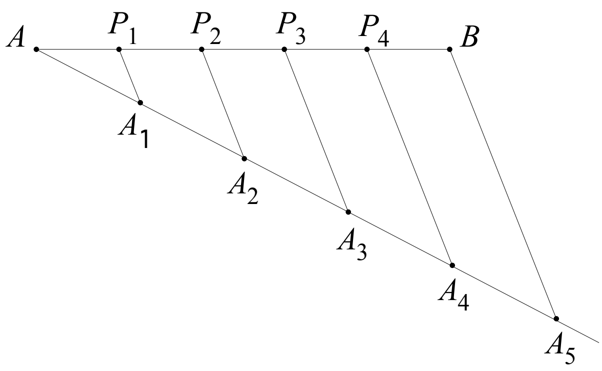
A partir de agora, vamos permitir, por comodidade, utilizar a régua graduada para fornecer as medidas dos segmentos e o transferidor para as medidas dos ângulos. Assim o problema anterior poderia ser enunciado assim: construir o triângulo *ABC* sabendo que o lado BC mede 5cm e que os ângulos *B* e *C* medem 62^o e 38^o respectivamente.

Os equadros, a régua graduada e o transferidor são instrumentos que permitem tornar mais rápida e prática a execução dos desenhos mas são apenas acessórios (podem ser dispensados). Os instrumentos essenciais são apenas a régua lisa e o compasso.

4. Divisão de um segmento em partes iguais

Dividir um segmento dado em um número qualquer de partes iguais é uma das construções básicas e frequentemente vamos precisar usá-la.

Dado o segmento *AB*, para dividí-lo, por exemplo em 5 partes iguais, traçamos uma semirreta qualquer *AX* e sobre ela, com o compasso, determinamos 5 segmentos iguais: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 (v. figura a seguir).



Trace agora a reta A_5B. As paralelas a esta reta traçadas pelos pontos A_1, A_2, A_3 e A_4 determinam sobre *AB* os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 que o dividirão em 5 partes iguais.

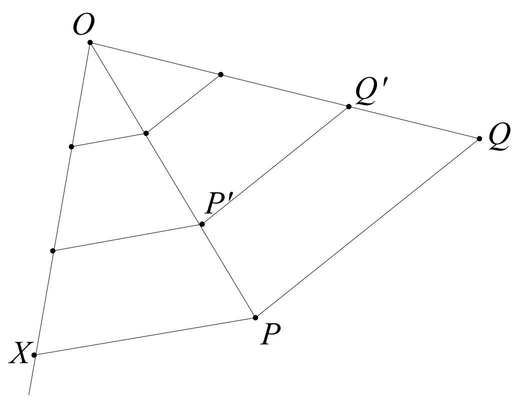
Problema 6

Construir o triângulo *ABC* conhecendo o lado $BC = 5{,}3$cm, e as medianas $m_b = 4$cm e $m_c = 5$cm.

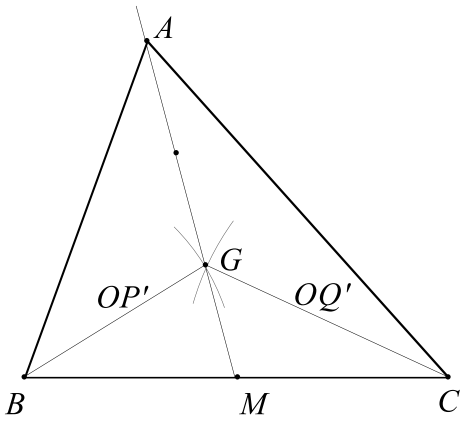
Solução:

Sabemos que a distância do baricentro a um vértice é igual a 2/3 da respectiva mediana. Assim, se *G* é o baricentro do triângulo *ABC*, o triângulo *GBC* pode ser construído porque o lado *BC* é conhecido e são também conhecidas as distâncias $GB = \frac{2}{3}m_b$ e $GC = \frac{2}{3}m_c$.

Observe, na figura a seguir que dividimos cada mediana em três partes iguais para obter 2/3 de cada uma.



Uma vez construído o triângulo GBC, determinamos (com régua e compasso) o ponto médio de BC e, sobre a reta MG determinamos o ponto A tal que $MA = 3MG$. O problema está resolvido.



2

Lugares geométricos

As primeiras ferramentas das construções geométricas são os lugares geométricos básicos. Essas figuras, que mostraremos a seguir, permitirão desenvolver um método de construção que é baseado nas propriedades das figuras.

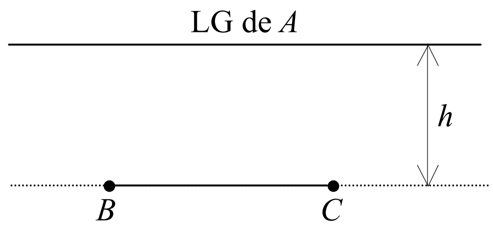
O que é um lugar geométrico?

A expressão (muito antiga) lugar geométrico, nada mais é que um conjunto de pontos e, para definir tal conjunto, devemos enunciar uma propriedade que esses pontos devem ter. Se essa propriedade é p, o conjunto dos pontos que possuem p é o lugar geométrico da propriedade p.

Por exemplo, o lugar geométrico dos pontos que distam 5cm de um ponto A é a circunferência de centro A e raio 5cm.

1. A paralela

Imagine que a base BC de um trângulo ABC é dada e que a altura (h) relativa a esta base é também dada. Então, conhecemos a distância do vértice A até a reta BC e o lugar geométrico do vértice A é, portanto, uma reta paralela à reta BC distando h dela.

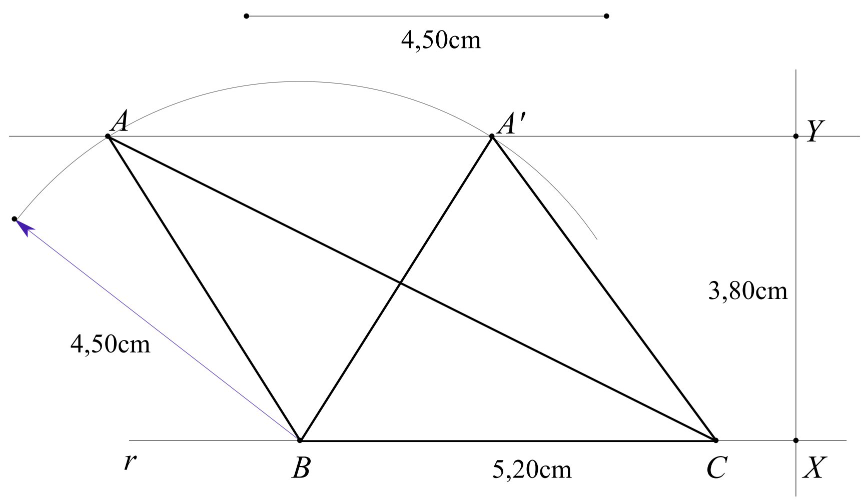


Problema 6

Desenhe o triângulo ABC conhecendo os lados $AB = 4{,}5\text{cm}$, $BC = 5{,}2\text{cm}$ e a altura relativa ao lado BC igual a 3,8cm.

Solução:

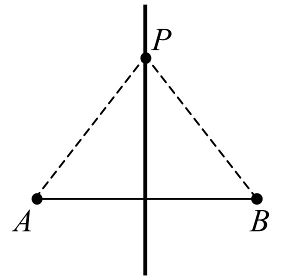
Trace uma reta r e sobre ela o segmento BC com o comprimento dado. Longe de BC desenhe uma reta perpendicular a r e seja X o ponto de interseção (veja figura a seguir). Assinale sobre ela o segmento $XY = 3{,}8\text{cm}$ e trace por Y uma paralela à reta r. Este é o lugar geométrico do vértice A.



Longe do seu desenho, construa um segmento de 4,5cm usando a régua. Agora, ponha o compasso com esta abertura e, com centro em B, desenhe uma circunferência com este raio. A circunferência cortará a reta paralela em dois pontos mostrando que há duas soluções (diferentes) para o problema.

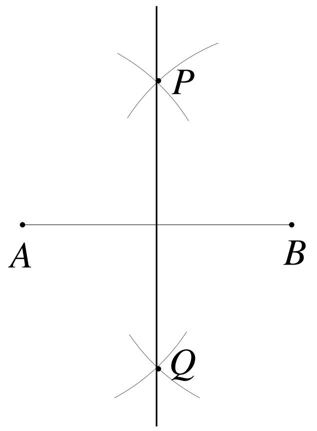
2. A mediatriz

A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio. Veja que todo ponto da mediatriz tem mesma distância aos extremos do segmento.



Observe também que se um ponto não está na mediatriz de *AB* então ele não equidista de *A* e *B*. Portanto, dizemos que a mediatiz de um segmento *AB* é o *lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B*.

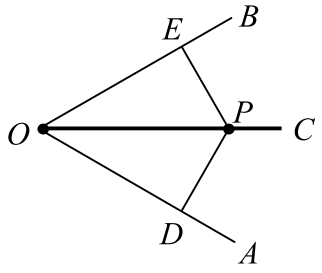
Para construir, traçamos dois arcos de circunferência com centros em *A* e *B* e com interseções *P* e *Q* como na figura a seguir.



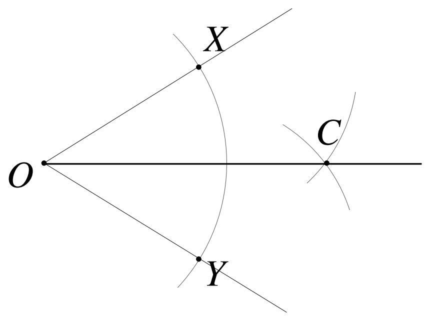
A reta *PQ* é a mediatriz de *AB*. Qual é a justificativa?
Observe a figura e pense um pouco.
Pela construção que fizemos, *APBQ* é um losango e, como sabemos, suas diagonais são perpendiculares.

3. A bissetriz

A bissetriz de um ângulo *AÔB* é a semirreta *OC* tal que *AÔC*=*CÔB*. Costumamos dizer que a bissetriz "divide" o ângulo em dois outros congruentes. Todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do ângulo. Na figura a seguir, *P* é um ponto da bissetriz OC do ângulo $A\hat{O}B$ e PD e PE são perpendiculares aos lados OA e OB.



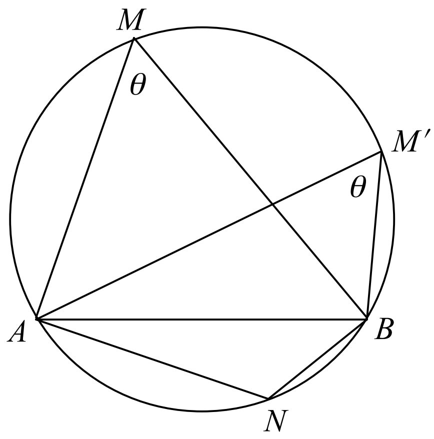
Como os triângulos retângulos OPD e OPE são congruentes, temos $PD = PE$.
Portanto, a bissetriz de um ângulo é o *lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo*.
Para construir a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ traçamos com centro em O um arco de circunferência cortando os lados do ângulo em X e Y.



Em seguida, traçamos dois arcos de mesmo raio com centros em em X e Y que se cortam em C. A semirreta OC é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Qual é a justificativa? Observe a figura e pense um pouco.
Pela construção que fizemos, os triângulos OXC e OYC são congruentes (caso LLL) e, portanto, $A\hat{O}C = C\hat{O}B$.

4. O arco capaz

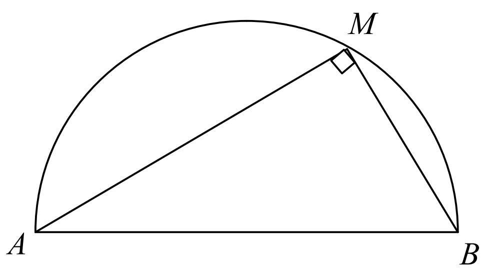
Considere dois pontos A e B sobre uma circunferência. Para todo ponto M sobre um dos arcos, o ângulo $AMB = \theta$ é constante.



Um observador que percorra o maior arco *AB* da figura acima, consegue ver o segmento *AB* sempre sob mesmo ângulo. Este arco chama-se *arco capaz do ângulo* θ *sobre o segmento AB*.

Naturalmente que, se um ponto *N* pertence ao outro arco *AB* então o ângulo *ANB* é também constante e igual a $180^\circ - \theta$.

Ainda é interessante notar que se *M* é qualquer ponto da circunferência de diâmetro *AB* o ângulo *AMB* é reto. Por isso, cada semicircunferência de diâmetro *AB* é chama de *arco capaz de* 90° *sobre AB*.

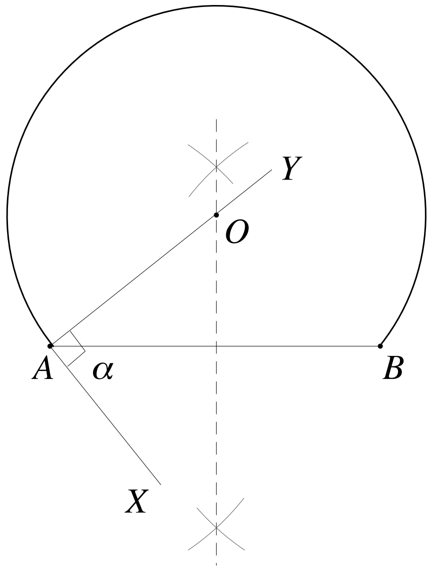


Construção do arco capaz:

São dados o segmento *AB* e o ângulo α. Para construir o lugar geométrico dos pontos que conseguem ver *AB* segundo ângulo α faça o seguinte:

1) Desenhe a mediatriz de *AB*.
2) Trace a semirreta *AX* tal que $BAX = \alpha$.
3) Trace por *A* a semirreta *AY* perpendicular a *AX*.

4) A interseção de AY com a mediatriz, é o ponto O, centro do arco capaz. Com centro em O desenhe o arco AB.



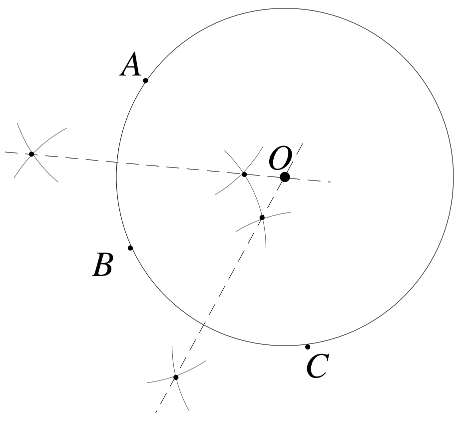
O arco AB que você desenhou é o lugar geométrico do ângulo α construído sobre so segmento AB. Para justificar, observe que se $BAX = \alpha$ então $BAY = 90^{\circ} - \alpha$ e, sendo M o ponto médio de AB, temos que $AOM = \alpha$. Assim $AOB = 2\alpha$ e, para qualquer ponto M do arco AB tem-se $AMB = \alpha$.

Problema 7

Construir a circunferência que passa por três pontos A, B, e C dados em posição.

Solução:

Seja O o centro da circunferência que passa por A, B, e C. Como $OA = OB$ então O pertence à mediatriz de AB. Como $OB = OC$ então O pertence à mediatriz de BC. Assim, o ponto O é a interseção destas duas mediatrizes.

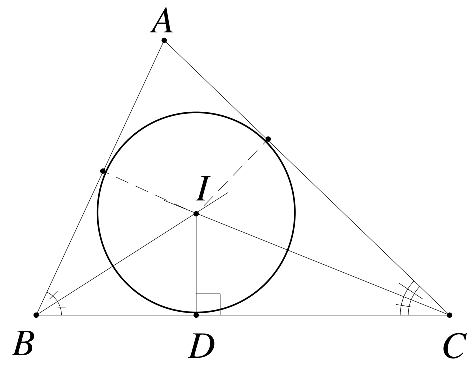


Problema 8

Construir a circunferência inscrita em um triângulo dado.

Solução:

Seja ABC o triângulo dado. O centro da circunferência inscrita (incentro) é o ponto de interseção das bissetrizes internas. Precisamos então traças as bissetrizes de dois ângulos do triângulo.



O ponto de interseção das duas bissetrizes (I) é o centro da circunferência inscrita, mas não podemos ainda desenhá-la pois não conhecemos o raio.

Atenção: *o compasso só pode ser usado para desenhar uma circunferência com centro e raio conhecidos*. Não se pode ajeitar nada ou traçar nada "no olho".

Continuando o problema, traçamos por I uma reta perpendicuar a BC, cortando BC em D. Temos agora um ponto por onde passa a circunferência inscrita. Traçamos então a circunferência de centro I e raio ID e o problema está resolvido.

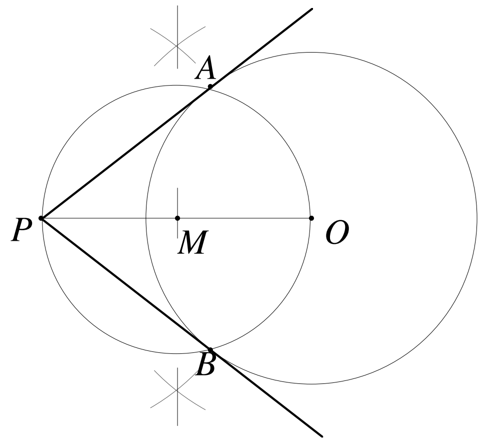
Nas construções geométricas a solução de um problema, em geral, não nos ocorre imediatamente. É preciso analisar a situação e pensar. Para analisar a situação devemos *imaginar o problema já resolvido* para buscar as propriedades que permitirão a solução. Você verá, a partir de agora, os problemas sendo analisados desta maneira.

Problema 9

Traçar por um ponto exterior a uma circunferência as duas retas tangentes.

Solução:

Imagine que o ponto P e a circunferência de centro O estejam dados em posição. Imaginemos o problema resolvido.



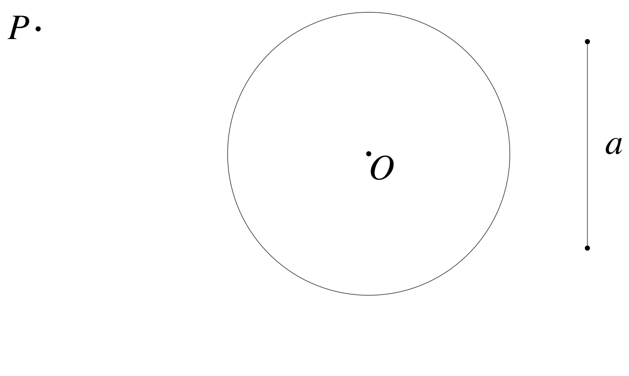
Se PA é tangente em A à circunferência então OA é perpendicular a PA. Como o ângulo PAO é reto então o ponto A pertence a uma semicircunferência de diâmetro PO. Como o mesmo vale para o ponto B a construção é a seguinte.

Determinamos o ponto M médio de PO traçando a mediatriz de PO. Traçamos a circunferência de centro M e raio $MP = MO$ que corta a circunferência dada em A e B. As retas PA e PB são tangentes à circunferência dada.

O problema está resolvido.

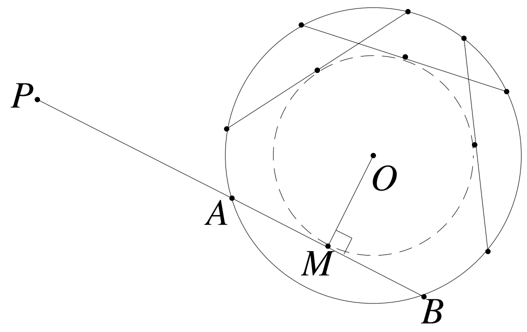
Problema 10

São dados: uma circunferência de centro O, um ponto P e um segmento a. Pede-se traçar por P uma reta que determine na circunferência uma corda de comprimento a.

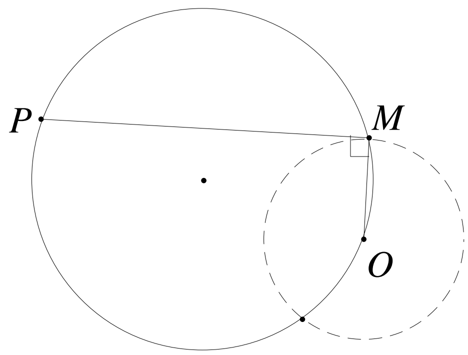


Solução:

Este é um problema que, novamente, os dados estão em posição. Para analisar o problema, imagine, na circunferência, uma corda *AB* de comprimento *a*. Imagine agora todas essas cordas.



Se *M* é o ponto médio da corda *AB* de comprimento *a* e em qualquer posição então *OM* é constante pois *OA* e *AM* são constantes. Assim, o lugar geométrico de *M* é uma circunferência de centro *O*. Por outro lado, supondo o problema resolvido, a reta que passa por *P* e determina na circunferência dada uma corda de comprimento *a* é tal que $PMO = 90^\circ$ e, portanto, *M* também pertence à circunferência de diâmetro *BC*.



A construção agora pode ser feita. Siga todos os passos.

1) Assinale um ponto *X* qualquer sobre a circunferência dada.

2) Pegue com o compasso o segmento dado e determine, sobre a circunferência um ponto *Y* tal que $XY = a$.

3) Trace por *O* uma perpendicular a *XY* determinando o ponto *Z* médio de *XY*.

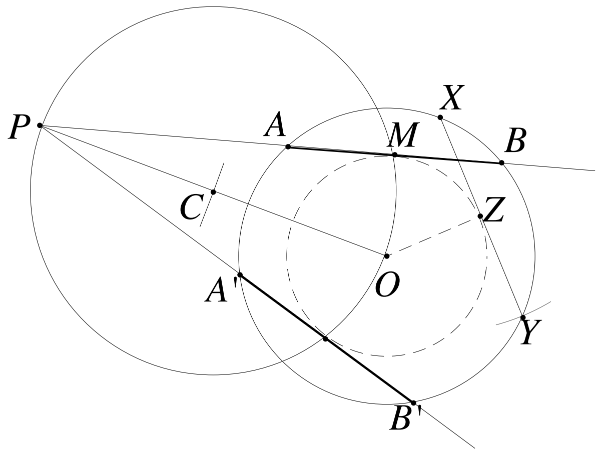
4) Trace a circunferência de centro *O* e raio *OZ*, que é um lugar geométrico de *M*.

5) Trace a mediatriz de *PO* determinando o seu ponto médio *C*.

6) Com centro em C trace a circunferência de diâmetro PO, que é outro lugar geométrico de M.

7) As duas circunferências cortam-se em M e M'.

8) As retas PM e PM' são a solução do problema.



Construir figuras ou resolver situações pelo método dos lugares geométricos consiste essencialmente no que vimos no problema anterior. Existe um ponto chave (no caso, M) e conseguimos, através das propriedades das figuras, encontrar dois lugares geométricos para ele. Assim, estando o ponto chave determinado, o problema fica resolvido. Frequentemente, o ponto chave é a própria solução do problema. Veja a seguir.

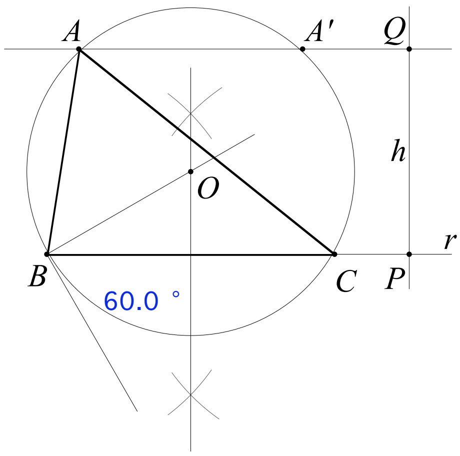
Problema 11

Construir o triângulo ABC sendo dados o lado $BC = 4{,}5\,\text{cm}$, o ângulo $A = 60^\circ$ e a altura relativa ao lado BC, $h = 3{,}2\,\text{cm}$.

Solução:

Se $B\hat{A}C = 60^\circ$ então A está no arco capaz de 60° construido sobre BC. Por outro lado, como o vértice A dista 3,2cm da reta BC, ele está em uma reta paralela a BC distando 3,2cm da reta BC. A construção está a seguir.

Sobre uma reta r assinale o ponto B e construa o segmento BC. Construa o arco capaz



de 60° sobre BC que é o primeiro lugar geométrico para o vértice A. Para colocar a altura, assinale um ponto P qualquer sobre a reta r (de preferência longe do arco capaz), trace por P uma perpendicular a r e, sobre ela, determine o ponto Q tal que $PQ = h$. A paralela à r traçada por Q é o segundo lugar geométrico de A e o problema está resolvido.

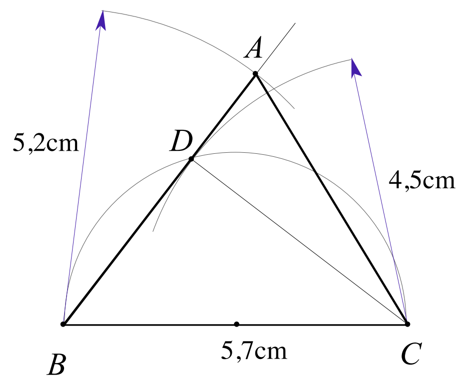
A reta paralela cortou o arco capaz em dois pontos, A e A'. Como os triângulos ABC e $A'BC$ são congruentes, dizemos que o problema possui apenas uma solução.

Problema 12

Construir o triângulo ABC conhecendo os lados $AB = 5{,}2\,\text{cm}$, $BC = 5{,}7\,\text{cm}$ e a altura relativa ao lado AB, $h = 4{,}5\,\text{cm}$.

Solução:

Faça um desenho imaginando o problema resolvido e seja $CD = h$ a altura relativa ao lado *AB*. Como o ângulo *BDC* é reto, o ponto *D* pertence ao arco capaz de 90º construido sobre *BC*. Como *CD* é conhecido, determinamos o ponto *D*. Sobre a reta *BD* determinamos o ponto *A* e o problema está resolvido.



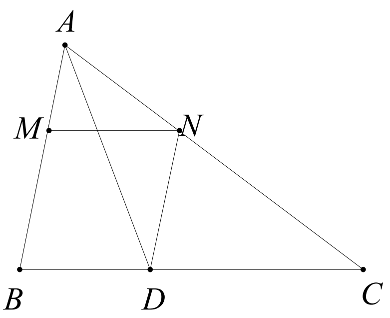
O próximo problema tem especial interesse pois o artifício que vamos utilizar será útil na solução de vários outros problemas.

Problema 13

É dado o triângulo *ABC* com $AB = 4\,\text{cm}$, $BC = 6{,}5$ e $CA = 7\,\text{cm}$. Trace uma reta paralela a *BC* cortando *AB* em *M* e *AC* em *N* de forma que se tenha $AN = BM$.

Solução:

Imaginemos o problema resolvido.



Repare que não adianta nada termos dois segmentos de mesmo comprimento sem coneção entre si. Uma idéia, portanto na nossa figura de análise é traçar por *N* o segmento ND paralelo a MB. Como $MNDB$ é um paralelogramo temos $ND = MB$ (dizemos que foi feita uma translação no segmento MB). Logo, $AN = ND$ e o triângulo AND é isósceles. Veja agora que:

$\angle ADN = \angle DAN$ porque $AN = ND$,

$\angle ADN = \angle DAB$ porque são alternos internos nas paralelas AB e ND.

Assim, AD é bissetriz do ângulo A do triângulo ABC e o problema está resolvido.

Para construir: (figura final por conta do leitor)

Construa inicialmente o triângulo ABC com os três lados dados.

Trace a bissetriz do ângulo BAC que corta BC em D.

Trace por D uma paralela a AB que corta AC em N.

Trace por N uma paralela a BC que corta AB em M.

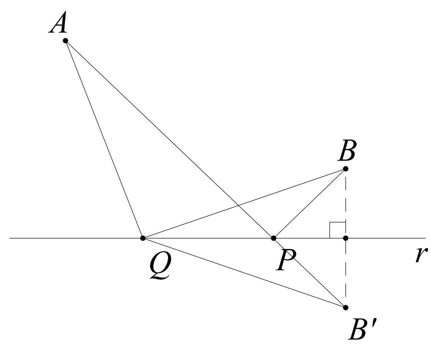
(figura final por conta do leitor)

Problema 14

Desenhe uma reta r e dois pontos A e B situados de um mesmo lado de r. Determine o ponto P sobre a reta r de forma que a soma $AP + PB$ seja mínima.

Solução:

Para analisar o problema, desenhamos a reta r, e dois pontos A e B quaisquer de um mesmo lado de r. Obtenha o ponto B', simétrico de B em relação à r. Para fazer isto,



trace por B uma perpendicular à r e, com o compassso, passe B para o outro lado obtendo o seu simétrico.

Assinale um ponto Q, qualquer, sobre a reta r. Trace QA, QB e QB'. Como r é mediatriz de BB' então $QB = QB'$. Assiml a soma $AQ + QB$ é sempre igual a

$AQ + QB'$. Entretanto esta soma será mínima quando A, Q e B' forem colineares. E nesta posição está o ponto P procurado.
A construção do problema do *caminho mínimo* entre dois pontos passando por uma reta é então imediata. Desenhe o simétrico de um dos pontos em relação à reta e ligue este simétrico ao outro ponto. A interseção com a reta dada é a solução do problema.

A seguir daremos uma lista de problemas propostos sendo os primeiros, é claro, mais fáceis. Cada problema é um desafio novo, desde a análise até o momento de decidir o que se deve fazer primeiro. Confira depois sua construção com a que está no gabarito e bom trabalho.

Problemas propostos

1) Construa um quadrado cuja diagonal tenha 4,5cm.

2) Desenhe uma circunferência de 3,2cm de raio e construa o triângulo equilátero inscrito nela.

3) Desenhe um triângulo cujos lados medem 5cm, 6cm e 7cm. Quanto mede, aproximadamente o raio da circunferência circunscrita?

4) Construa o triângulo ABC conhecendo os lados $AB = 5{,}2$ cm, $AC = 6{,}5$ cm e a altura relativa ao vértice A igual a 4,5cm. Quanto mede o ângulo BAC?

5) Construa o trapézio $ABCD$ conhecendo a base maior $AB = 7$ cm, a base menor $CD = 2$ cm, e os lados $AD = 3{,}4$ cm e $BC = 5{,}1$ cm.

6) Construir o triângulo ABC conhecendo o ângulo $A = 50^\circ$ e os lados $AB = 6$ cm e $BC = 4{,}8$ cm

7) Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $BC = 4{,}7$ cm e as medianas $BB' = 5$ cm e $CC' = 3{,}5$ cm.

8) Construa o trapézeio isósceles sabendo que as bases medem 6,5cm e 2,5cm e que as diagonais medem 5,5cm.

9) Construa o hexágono regular cujo lado mede 2,4cm.

10) No triângulo ABC o lado BC mede 5cm, o ângulo A mede 60^o e a mediana AA' mede 4cm. Se $AC > AB$ quanto mede, aproximadamente o ângulo B?

11) Construir o triângulo ABC conhecendo o lado $BC = 7$cm e as alturas $BD = 5{,}4$cm e $CE = 6{,}7$cm.

12) No plano cartesiano com os eixos graduados em centímetros, uma circunferência C tem centro (0, 3) e raio 2cm. Determine um ponto P do eixo dos X tal que as tangentes traçadas de P a C tenham comprimento de 4,5cm.

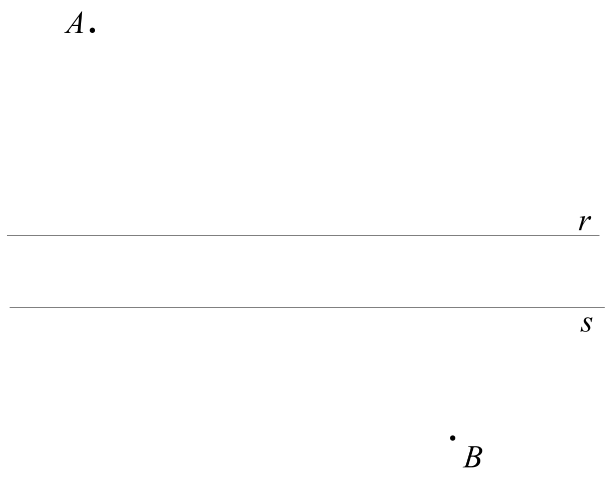
13) Construir o triângulo ABC conhecendo a mediana $AA' = 5$cm e as alturas $BD = 6$ e $CE = 4{,}7$cm.

14) Construir o triângulo ABC, retângulo em A conhecendo a hipotenusa $BC = 6$ e a soma dos catetos $AB + AC = 8{,}1$cm.

15) Construir o triângulo ABC de perímetro 11cm sabendo que os ângulos B e C medem, respectivamente, 58^o e 76^o.

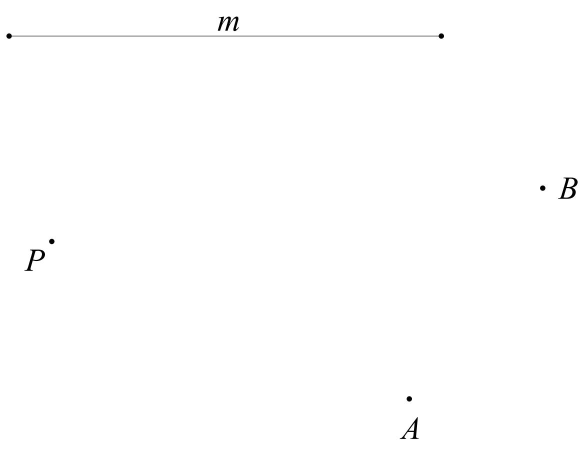
16) Construir o trapézio $ABCD$ conhecendo a soma das bases $AB + CD = 8{,}6$cm, as diagonais $AC = 6$cm e $BD = 5$cm e o lado $AD = 4$cm.

17) As paralelas r e s são as margens de um rio e os pontos A e B estão em lados opostos desse rio. Determine a posição de uma ponte PQ perpendicular às margens ($P \in r$ e $Q \in s$) de forma que o percurso $AP + PQ + QB$ seja mínimo.

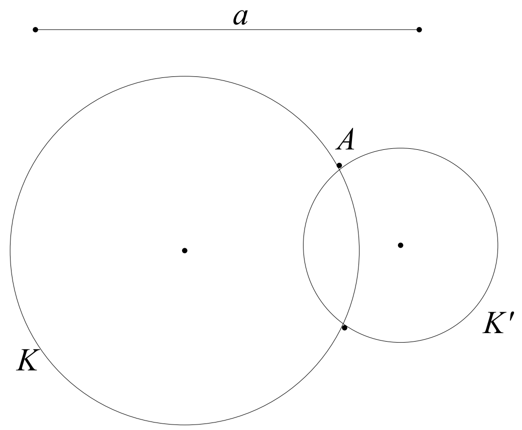


18) Construir o triângulo ABC sabendo que $AB = 5{,}8\,\text{cm}$, $\cos A = 0{,}6$ e que o lado BC é o menor possível.

19) Dado um segmento m e, em posição, os pontos P, A e B (figura a seguir), traçar por P uma reta r de forma que A e B fiquem de um mesmo lado de r e de tal forma que a soma das distâncias de A e B à r seja igual a m.



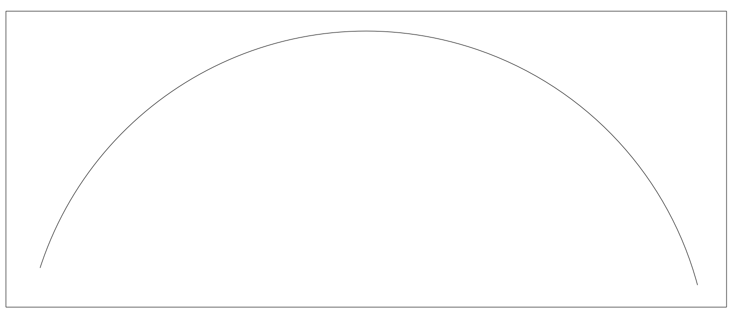
20) São dados duas circunferências K e K' e um segmento a (figura a seguir). Traçar pelo ponto A a secante PAQ ($P \in K$ e $Q \in K'$) de forma que se tenha $PQ = a$.



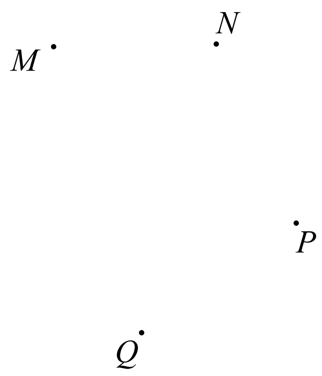
21) Usando uma figura igual à do exercício anterior, trace a secante PAQ de comprimento máximo.

22) Uma mesa de sinuca tem vértices dados em coordenadas: $A = (0,\ 0)$, $B = (8,\ 0)$, $C = (8,\ 4)$ e $D = (0,\ 4)$. Uma bola P é atirada, sem efeito, em um ponto Q da tabela BC. Após as reflexões nas tabelas BC e CD ela cai na caçapa A. Determine a posição exata do ponto Q e faça o desenho da trajetória.

23) De uma circunferência C conhecemos apenas o arco abaixo. Limitando-se ao espaço disponível (interior do retângulo), determine o raio de C.



24) Na figura abaixo, cada um dos pontos *M*, *N*, *P* e *Q* pertence a um lado de um quadrado. Construa esse quadrado.



25) São dados em posição (figura a seguir) os pontos *A*, *B*, *C* e *D* sobre a reta *r*. Trace por *A* e *B* duas paralelas e trace por *C* e *D* outras duas paralelas de forma que as interseções dessas retas formem um quadrado.