Cenário sobre Sistemas Lineares

Introdução

A utilização de um cenário no ensino de sistemas lineares, como apoio didático, tem como objetivo auxiliar o aluno na compreenção de conceitos matemáticos, uma vez que ajuda na reflexão dos resultados obtidos, provocados por uma seqüência de exercícios que sugerem ao aluno muito mais que simples cálculos mecânicos.

Tema:Sistemas lineares

Pré-requisitos: Matrizes (Operações com matrizes, matriz inversa e determinante)

Público alvo: Alunos da segunda série do ensino médio ou alunos da primeira fase dos corsos de ciências exatas.

Objetivos:

- Aplicar os comandos do software no estudo de sistemas lineares
- Resolver sistemas de equações lineares utilizando o WimMat.
- Identificar quando o sistema é possivel determinado, possível indeterminado e impossível.

Tempo estimado: 45 minutos

Software: WinMat

O software WinMat, é encontrado em uma versão em inglês e está disponível no site http://math.exeter.edu/rparris/winmat.html. Produzido por Rick Parris, do departamento de matemática da Academia Phillips Exeter, este software é indicado para o ensino médio e superior. Foi desenvolvido para ser utilizado como ferramenta no cálculo de matrizes, determinante, sistemas lineares e outros conteúdos de álgebra linear.

Conhecendo os comandos

Ao abrir o programa a primeira tela que aparecerá será esta indicada pela figura 1:

Figura 1

Menu Matrix

Figura 2

Dentro deste menu, mostrado na figura 2, temos os comandos:

- **New** - que serve para escolher o tipo de matriz que o programa gere;
- **Open** - que serve para abrir uma matriz já feita e salva anteriormente neste programa;
- **Mode** - este comando serve para o usuário indicar quais vão ser os tipos de números que serão utilizados em suas matrizes, isto é, se estes serão inteiros, reais, ou complexos.

- **White backgrounds** - serve para deixarmos o fundo das matrizes branco, se estiver ativado ou azul se estiver desativado.
- **Menu Calc** - Serve para fazermos operações com matrizes, como soma, multiplicação, calcular a matriz transposta, inversa e também neste menu, temos a opção de calcular sistemas lineares, determinantes e etc...
- **Help** - Este comando é usado para o auxílio no uso de determinados comandos que temos dúvidas, seja de como funciona ou para saber se o programa faz determinada operação que não saibamos que ele faça e como faz.

Construindo matrizes

Para que apareça alguma matriz na tela, o usuário deve clicar no menu matrix new. Clicando neste menu aparecerá a tela mostrada na figura 3.

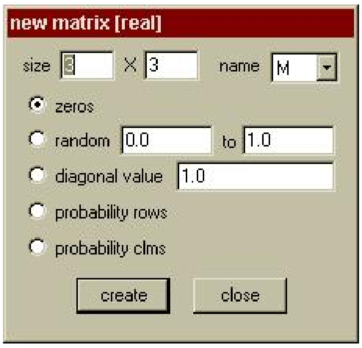

Figura 3

Na maioria dos casos a matriz não virá do jeito que queremos, então para criarmos uma matriz qualquer precisamos mudar alguns ou todos os valores nela existentes e para isso o processo de mudança é muito simples, basta clicar no elemento que queremos mudar, e apertar a tecla **enter** e continuar o processo até que esteja toda a matriz alterada da forma que queremos. Caso não quiséssemos mudar um item que foi clicado basta apertarmos a tecla **esc** que o software entende que não queremos mais alterar este valor. Neste programa não é aceito nas componentes da matriz, valores diferentes dos pré-determinados no item **mode** do menu **Matrix** ou deixar em vazio algum elemento da matriz. Caso isto aconteça o programa procederá de três formas, dependendo da ação do usuário. Na primeira o software daria uma mensagem de advertência conforme a figura 4:

Figura 4

Na segunda ele apresentaria uma advertência conforme a Figura 5

Figura 5

E se caso digitássemos letras ao invés de números ele ignoraria a letra que colocamos e deixaria no lugar o valor zero.

Calculando o determinante de uma matriz

Para que o programa calcule o determinante de uma matriz temos que ir no menu calc, depois em one matrix e por último clica-se na matriz que desejamos que seja calculado o determinante. Fazendo isto o software abrirá uma outra janela conforme mostrado na figura 6.

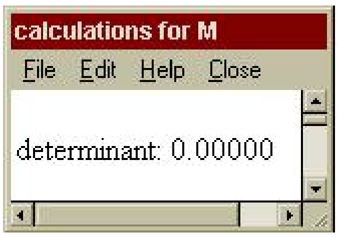

Figura 6

Sistemas lineares

Os sistemas lineares no winmat são resolvidos através da expressão $MX = B$, Onde M representa a matriz dos coeficientes, a matriz X representa a matriz das incógnitas e B a matriz dos resultados, por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

Logo:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Agora que sabemos como é a representação de um sistema linear no WinMat, apresentaremos a resolução do mesmo, para isso vamos resolver o sistema acima. Então criamos as matrizes M e B conforme o exemplo acima, depois basta clicarmos no menu **solve** que está dentro do menu **calc**, podemos observar que aparece uma tela como a mostrada na figura 7.

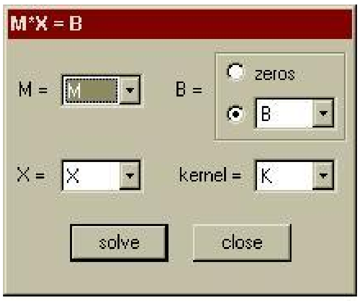

Figura 7

Aparecendo esta tela, como nossa matriz M tem o nome de M e nossa matriz B tem o nome B, basta clicar no botão solve que aparecerá a resposta em forma de uma matriz X. Conforme mostrado na figura 8.

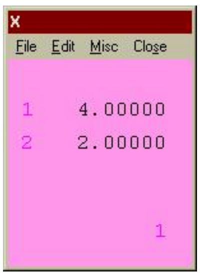

Figura 8

Caso tivéssemos montado a matriz M ou a B com outro nome não precisaríamos cria-las novamente com esses nomes porque como podemos observar na figura 7 o programa permite com que possamos informar qual será a matriz M e B para o sistema. O software apresenta como solução de um sistema que seja possível e indeterminado, duas matrizes colunas, ou seja, no caso do sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 5z = 2 \\ 4x + 3y + 7z = 3 \end{cases}$$

A resposta que estamos acostumados a obter é $(-k, 1-k, k)$, $\forall k \in \mathbb{R}$

Mas no programa o que ele apresenta como resposta são duas matrizes colunas, sendo a primeira representando que o software chama de Kernel basis for $MX = B$, ou seja, o núcleo do sistema, no caso: $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e a segunda $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que é uma solução particular para o sistema. O que nada mais é do que $(0,1,0)+(-k,-k,k)$ que ainda pode ser melhorado para $(0,1,0)+k(-1,-1,1)$ e que como esperávamos estes dois vetores são iguais as nossas duas matrizes. Quando calculamos este sistema, o programa apresenta as duas soluções ao mesmo tempo, em janelas separadas, mas com a tela da matriz Kernel exatamente por cima da outra tela, dando-nos a impressão de haver apenas uma única solução. Mas se arrastarmos a janela da matriz Kernel para o lado veremos a outra janela. E se o sistema for impossível o programa apenas apresenta uma mensagem de erro, como mostra a figura 9, informando que essa matriz possui dados inconsistentes.

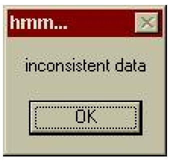

Figura 9

Exercícios que não podem ser feitos no WinMat

No caso de sistemas lineares os exercícios que envolvam interpretações geométricas também não podem ser resolvidos pois o software não trabalha com gráficos. Como no caso do exemplo abaixo:

Exemplo 1 *Resolva o sistema linear* 2×2*; classifique quanto ao número de soluções e* *faça sua representação gráfica.*

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Neste caso não poderíamos fazer o último item pedido no exercício.

Outro exercício, até um pouco parecido com o do primeiro exemplo pois evolve o mesmo problema é o de determinar o valor de uma incógnta para que o sistema seja possível ou possível e indeterminado ou impossível. Como por exemplo:

Exemplo 2 *Para que valores de a e b o sistema* $\begin{cases} 2x + 1y = b \\ ax + 2y = 10 \end{cases}$ *é possível e indeterminado*

Não podemos resolver este exercício pelo fato de o programa não aceitar letras nas componentes de suas matrizes.

Atividades

1-Resolva os sistemas abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x + 3z = 8 \\ 1,6y + z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} -1x + y + z = -1 \\ x + 1,4z + w = 5 \\ y + z + 3w = 7 \\ x + 2,5y + w = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z + w = 1 \\ x + 2y + z + w = 2 \\ x + 3y + 2z + w = 3 \\ x + y + 4,1z + 2w = 4 \end{cases}$$

2- Classifique os sistemas lineares abaixo em: possível determinado, indeterminado e impossível, calculando apenas determinantes.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 9 \\ 9x + 18y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x + 4y = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 0.5 \\ 3x - 5.5y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = -8 \\ 3x + 5y - z = 3 \\ 4x + 7y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = -1 \\ -1.5x - 8y - z = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y - z = -1.2 \\ 3x - 2y + z = 3 \\ 2x + 2z = 5 \end{cases}$$