UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

---

A comissão designada pela portaria nº. 011/MTM/2018, composta pelos membros Jáuber Cavalcante de Oliveira, Fábio Botelho, Ivan Pontual Costa e Silva, sugere o seguinte conteúdo programático para a disciplina MTM3541– Cálculo Variacional, 108 h/aula.

---

**Disciplina: MTM3541 – Cálculo Variacional**

**Nº total de horas/aula: 108** **Nº de horas/aula semanais: 6**

**Pré-requisito: MTM3432 – Análise II**

---

**EMENTA:** Espaços lineares e variações de Gâteaux. Minimização de funções convexas. Lemas de Lagrange e Du Bois-Reymond. Extremos locais em espaços lineares normados. Equações de Euler-Lagrange. Funções extremais $C^1$ por partes. Princípios Variacionais na Mecânica. Condições suficientes para um mínimo. Aplicações (Problema da Braquistócrona, dentre outras).

**OBJETIVOS:** O aluno deve dominar e aplicar os conceitos relativos ao cálculo com funcionais em espaços de funções, trabalhar os problemas variacionais clássicos, aplicar as técnicas variacionais em equações diferenciais e conhecer várias aplicações de técnicas variacionais.

**CONTEÚDO PROGRAMÁTICO**:

1- Espaços lineares e Variações de Gâteaux.
1.1- Espaços lineares de funções
1.2- Minimização de funcionais sujeitos a restrições.
1.3- Variações de Gâteaux.

2- Minimização de funções convexas
2.1- Funcionais convexos.
2.2- funções fortemente convexas.
2.3- Aplicações (Problema da Braquistócrona, dentre outras).
2.4- Minimização com restrições convexas
2.5- Procedimentos de minimização.

3- Lemas de Lagrange e Du Bois-Reymond.

4- Extremos locais em espaços lineares normados.
4.1- Convergência e compacidade em espaços lineares normados.
4.2- Continuidade.
4.3- Pontos extremais locais.
4.4- Condições Necessárias: direção admissível.
4.5- Aproximação afim: derivada de Fréchet.
4.6- Extremais com restrições: multiplicadores de Lagrange.

Jáuber

5- Equações de Euler-Lagrange
5.1- Primeira equação de Euler-Lagrange: funções estacionárias
5.2- Casos especiais da primeira equação.
5.3- A segunda equação de Euler-Lagrange.
5.4- Problemas com pontos de fronteira variáveis: condições de contorno naturais. Condições de transversalidade.
5.5- Restrições integrais: multiplicadores de Lagrange.
5.6- Integrais envolvendo derivadas de ordem mais alta.
5.7- Funções estacionárias com valores vetoriais.
5.8- Invariância da estacionaridade.
5.9- Integrais multidimensionais. Problema da área mínima. Condições de fronteira naturais.

6- Funções extremais $C^1$ por partes.
6.1- Espaços normados de funções $C^1$ por partes.
6.2- Funcionais sobre espaços de funções $C^1$ por partes.
6.3- Condições de canto de Weiestrass-Erdmann
6.4- Minimização via convexidade.
6.5- Extremais de classe $C^1$ por partes e valores vetoriais.
6.6- Condições necessárias para um mínimo local. A condição de Weiestrass. A condição de Legendre. O problema de Bolza.

7- Princípios Variacionais
7.1- A integral "ação".
7.2- O princípio de Hamilton e coordenadas generalizadas.
7.3- A energia total.
7.4- As equações canônicas.
7.5- Integrais do movimento em casos especiais. O princípio da mínima ação de Jacobi.
7.6- Equações paramétricas do movimento.
7.7- A equação de Hamilton-Jacobi.
7.8- Funções-sela e convexidade. Desigualdade complementares.
7.9- Meios contínuos.

8- Condições Suficientes para um Mínimo.
8.1- O método de Weierstrass.
8.2- Convexidade estrita.
8.3- Campos. Campos exatos e a equação de Hamilton-Jacobi.
8.4- A integral invariante de Hilbert.
8.5- Minimização com restrições. A desigualdade de Wintinger.
8.6- Campos centrais.
8.7- Construção de campos centrais: condição de Jacobi.
8.8- Condições suficientes para um mínimo local.
8.9- Necessidade da condição de Jacobi.

**BIBLIOGRAFIA BÁSICA**

Troutman, J.L.: "Variational Calculus and Optimal Control", 2nd Ed. Springer Verlag ( 1996).

Jaú bar

**BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR**

Giaquinta, M., Hildebrand, S., “Calculus of Variations I”, Springer, 1996.
Knot, M., “A First Course in the Calculus of Variations”, American Mathematical Society, 2014.
Sagan, H., “Introduction to the Calculus of Variations”, Dover (1992)..

Florianópolis, 12 de julho de 2018.

Jáuber C. de Oliveira

Jáuber Cavalcante de Oliveira

Fábio Botelho

Ivan Pontual Costa e Silva