

O Espaço das Retas em \mathbb{R}^3

Celso M. Doria
UFSC - Depto. de Matemática
cmdoria@mtm.ufsc.br

March 28, 2009

Abstract

1 Introduction

O objetivo destas notas é descrever o espaço

$$\mathcal{L}_n = \{L \mid L \subset \mathbb{R}^n \text{ é uma reta}\}$$

Uma reta $L \subset \mathbb{R}^n$ é descrita por um ponto $P \in L$ e por um vetor $u // L$. Considerando o vetor $v = \vec{OP}$, então temos que

$$L = \{v + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$$

O fato que os vetores $v, u \in \mathbb{R}^n$ determinam L mostra que bastam $2n$ parâmetros para descrever L , o que indica que \mathcal{L}_n é um espaço cuja dimensão é no máximo $2n$. No entanto, observamos que ao realizarmos substituições do tipo

1. o vetor u por um vetor $\tilde{u} = r_0 u$, $r_0 \in \mathbb{R}$
2. o vetor v pelo vetor $\tilde{v} = v + s_0 u$, $s_0 \in \mathbb{R}$

obtemos a mesma reta L (como objeto geométrico), o que reduz o número de parâmetros para $2(n-1)$. Esta observação pode ser colocado da seguinte forma;

Proposition 1.0.1. *Sejam v e u vetores em \mathbb{R}^n e*

$$L = \{v + tu \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \tilde{L} = \{\tilde{v} + \tilde{t}\tilde{u} \mid \tilde{t} \in \mathbb{R}, \tilde{v} = v + s_0 u, \tilde{u} = r_0 u, r_0, s_0 \in \mathbb{R}\}$$

Então, $\tilde{L} = L$.

Proof. Desde que

$$\tilde{v} + \tilde{t}\tilde{u} = v + t_0u + \tilde{t}(su) = v + (t_0 + \tilde{t}s)u$$

concluimos que $\tilde{v} + \tilde{t}\tilde{u} \in L$. Analogamente, para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que $v + tu \in \tilde{L}$. Consequentemente, $\tilde{L} = L$. \square

Uma vez que a reta L pode ser descrita em termos de um par (v, u) , vamos descrevê-la utilizando conceitos definidos a partir da introdução do produto interno em \mathbb{R}^n definido por

$$v = (a_1, a_2, \dots, a_n), u = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Rightarrow \langle v, u \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

Sejam $u \in \mathbb{R}^n$ um vetor paralelo à L tal que $|u| = 1$ e $P_m \in L$ o ponto de L mais próximo da origem O , isto é,

$$d(O, P_m) = d(O, L) = \min_{Q \in L} \text{dist}(O, Q)$$

Observe que há dois vetores paralelos a L cujo módulo é 1; isto implica que é preciso tomar o quociente por \mathbb{Z}_2 no que corresponde a u . Como antes, considere $v = \overline{OP}$ o vetor determinado pelo ponto $P \in L$ e defina $v_m = \overline{OP_m}$. É imediato verificar que

$$v_m = v - \langle v, u \rangle u, \tag{1}$$

da onde, pela proposição (1.0.1) a reta determinada por (v_m, u) é a mesma que a determinada por (v, u) e, além disto, $v_m \perp u$.

Portanto,

$$L \leftrightarrow (v, u) \leftrightarrow (v_m, u),$$

onde

$$\begin{cases} |u| = 1, \\ \langle u, v_m \rangle = 0 \end{cases} \tag{2}$$

2 \mathcal{L}_3

Em termos de coordenadas, se $v_m = (x_1, x_2, x_3)$ $u = (x_4, x_5, x_6)$, segue que uma reta em \mathbb{R}^3 corresponde a uma solução do sistema algébrico

$$\begin{cases} x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0, \\ x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Considere os polinômios

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6, \\ P_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \end{cases} \quad (4)$$

Uma vez que,

$$\begin{cases} \nabla P_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) \\ \nabla P_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 2(0, 0, 0, x_4, x_5, x_6) \end{cases} \quad (5)$$

observamos que em todo ponto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$ os gradientes ∇P_1 e ∇P_2 são l.i. Portanto, os polinômios P_1 e P_2 são transversais em todos os pontos pertencentes ao conjunto $P_1^{-1}(0) \cap P_2^{-1}(1)$ e, conseqüentemente, o espaço \mathcal{L} , das retas em \mathbb{R}^3 é uma subvariedade algébrica de \mathbb{R}^6 cuja dimensão é

$$\dim(\mathcal{L}) = 5 + 5 - 6 = 4$$

Uma vez que os polinômios em (7) são homogêneos, isto é

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 & \Rightarrow & P_1(tx) = t^2P_1(x), \\ P_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 & \Rightarrow & P_2(tx) = t^2P_2(x) \end{cases} \quad (6)$$

é possível projetivizar o espaço \mathcal{L} de forma que ele se torna um espaço compacto em $\mathbb{R}P^5$.

2.1 Classe de homeomorfismo de \mathcal{L}_3

Vamos inicialmente estudar o caso do espaço \mathcal{L}_2 . Seja \mathbb{M}^2 a faixa de Moebius.

Proposition 2.1.1.

$$\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{homeo}}{\simeq} \mathbb{M}^2 \simeq \mathbb{R}P^2 - D^2$$

A inclusão $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{M}^2$ corresponde ao subconjunto de \mathcal{L}_3 formado pelas retas que passam pela origem.

Proof. Neste caso, teremos que \mathcal{L}_1 é definido pelo par de equações

$$\begin{cases} x_1x_3 + x_2x_4 = 0, \\ x_3^2 + x_4^2 = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Considere, para cada $R \in \mathbb{R}$, o círculo

$$S^1(R) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$$

de modo que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{R \in \mathbb{R}} S^1_R$$

Quando $R=0$, temos que $S_0^1 = \{(0, 0)\}$.

Decorre que para cada ponto $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que o vetor $u = (x_3, x_4)$ é um vetor unitário ortogonal à v . Para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$ considere o espaço

$$L_v = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid w \perp v\}.$$

Se restringirmos à situação onde $v = (x_1, x_2) \in S^1(R)$, então teremos que $L_v = T_v S^1(R)$ e, conseqüentemente, o espaço

$$\bigcup_{v \in S^1(R)} L_v$$

é exatamente o fibrado tangente $TS^1(R)$. Por isto, ao considerarmos que $u \in L_v$ e $|u| = 1$ temos que

$$(v, u) \in UT(S^1(R)) = \text{fibrado tangente unitário}$$

Porém, conforme foi dito, é preciso tomar o quociente pela ação de \mathbb{Z}_2 sobre L_v , uma vez que a reta determinada pelo par (v, u) é igual a reta determinada pelo par $(v, -u)$. Assim,

$$(v, u) \in P(S^1(R)) = \text{fibrado tangente projetivizado}$$

Como $P(S^1(R)) \simeq S^1 \times \mathbb{Z}_2$, após o quociente por \mathbb{Z}_2 , temos que o espaço das retas tangentes a $S^1(R)$ é homeomorfo a S^1 . Portanto, para cada $R \in \mathbb{R}_{>0}$ temos uma cópia de S^1 da onde concluímos que o espço das retas que não passam pela origem (caso $R=0$) é homeomorfo ao cilindro $(0, \infty) \times S^1$. Quando $R=0$, então observamos que os os círculos estão degenerando-se sobre a origem e que as retas tangentes aos pontos antipodas do círculo estão se identificando. Isto corresponde a introduzir no cilindro $[0, \infty] \times \mathbb{R}$ a relação de equivalência

$$(R', z') \sim (R, z) \iff R' = R = 0 \text{ e } z' = -z$$

Então,

$$\mathcal{L}_2 \stackrel{\text{homeo}}{\simeq} \frac{[0, \infty) \times S^1}{\sim}$$

O quociente pela relação de equivalência corresponde a realizar a identificação, ao longo do bordo $\{0\} \times S^1$, quando se constroi o espaço projetivo $\mathbb{R}P^2$ a partir de S^2 . Desta forma,

$$\mathcal{L}_2 \stackrel{\text{homeo}}{\simeq} \mathbb{R}P^2 - D^2$$

A demonstração esta completa ao observarmos que

$$\mathbb{R}P^2 - D^2 \stackrel{\text{homeo}}{\simeq} \mathbb{M}^2.$$

□