Se a Terra não é Plana, quais são as Relações Métricas adequadas para determinarmos Comprimentos e Ângulos ?

Celso M. Doria
cmdoria@mtm.ufsc.br

O pregador há de ser como quem semeia, e não como quem ladrilha ou azuleja ... O rústico acha documentos nas estrelas para a sua lavoura e o mareante para a sua navegação e o matemático para as suas observações e para os seus juízos. De maneira que o rústico e o mareante, que não sabem ler nem escrever, entendam as estrelas; e o matemático, que tem lido quantos escreveram, não alcança a entender quanto nelas há.- Pe. Antônio Vieira(1608-1697) - Sermão da Sexagésima [5].

1 Introdução

Se a primeira impressão foi de que a Terra era plana, nada mais natural do que descobrir, primeiramente, que num triângulo retângulo $\triangle ABC$ (fig. 1) cuja hipotenusa mede a e os catetos medem b e c, que *o quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos* , ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{1.1}$$

A identidade 1.1 é a expressão do famoso *Teorema de Pitágoras*.
Decorre do Teorema de Pitágoras que num triângulo $\triangle ABC$ qualquer, cujos lados medem a, b e c, e cujos ângulos internos medem α, β e γ, conforme indica a figura 2, que

$$\begin{aligned} a^2 =& b^2 + c^2 - 2bc.cos(\alpha) \\ b^2 =& a^2 + c^2 - 2ac.cos(\beta), \\ c^2 =& a^2 + b^2 - 2ab.cos(\gamma). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Porém, a Terra não sendo plana implica que as identidades acima não são as mais adequadas para realizarmos medições sobre a superfície do nosso

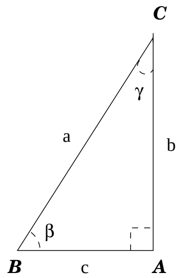

Figure 1: triângulo retângulo

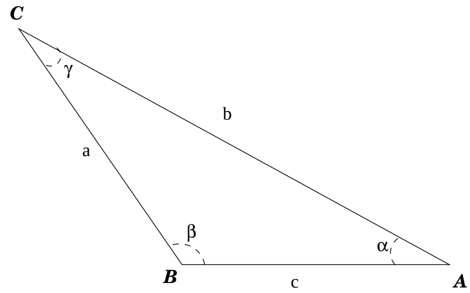

Figure 2: triângulo ABC

planeta. É claro, a experiência mostra que quando as medidas realizadas são pequenas em relação ao raio da Terra, então os resultados obtidos pelas identidades 1.1 e 1.2 são bastante precisos. É aí que começam os problemas, uma vez que a necessidade de realizarem-se medidas de longa distâncias sobre a Terra é inevitável. O objetivo deste artigo é descrever as relações métrica em triângulos esféricos e mostrar um método de obtê-las. Se assumirmos que a Terra é uma esfera, o principal parâmetro a ser determinado é a medida do seu raio.

2 Raio da Terra

2.1 Medida do Raio da Terra

Por volta de 250 a.c., o grego Eratóstenes (276 - 194 a.c.), amigo de Arquimedes e conhecido como *Beta*, por ser o segundo melhor em tudo, desenvolveu um método muito simples para calcular a medida da circunferência da Terra. Hoje em dia sabemos que é de 40.075 km. Considerando que na época não se sabia qual era o formato da Terra, podemos comparar o cálculo de Eratóstenes à obtenção de uma resposta para a questão atual sobre o formato do Universo (espaço-tempo).

Eratóstenes exercia o cargo de administrador da Biblioteca de Alexandria, no Egito, onde haviam vários pergaminhos com conhecimentos diversos, dentre os quais os adquiridos pelos Gregos e pelos Egípcios. À aproximadamente 800 km ao sul de Alexandria havia uma cidade, denominada na época de Syene e hoje conhecida como Aswan, onde Eratóstenes sabia que a posição do Sol, ao atingir o zênite no solstício, era vertical.

Na fig. 3, o ponto A corresponde à cidade de Syene enquanto o ponto B à Alexandria. Eratóstenes concluiu que lhe bastava conhecer o ângulo α e

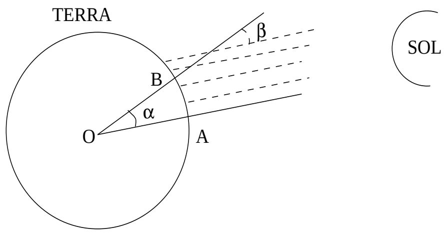

Figure 3: Alexandria e Seyne , $\alpha = \beta$

a distância Aswan-Alexandria para estimar a circunferência da Terra. Isto porque ele conhecia as fórmulas $AB = R.\alpha \Rightarrow R = \frac{AB}{\alpha}$ e $C = 2\pi.R$, da onde

$$C = 2\pi.\frac{AB}{\alpha}. \tag{2.1}$$

Estas fórmulas, consideradas evidentes nos dias de hoje, eram grosseiramente deduzidas e não dispunham de uma representação algébrica adequada para manipulá-las, tornando o conhecimento e as aplicações acessíveis para poucos.

A idéia de Eratóstenes foi determinar o ângulo α, o que ele fez considerando as seguintes hipóteses:

1. A Terra é uma Esfera, assim como a Lua.
2. Os raios do sol chegam à Terra praticamente paralelos;
3. O caminho que percorre a menor distância entre Alexandria e Aswan, se continuado, descreve uma circunferência igual a de um grande círculo (Equador)

Desta forma, Eratóstenes simplificou o problema da determinação do angulo α. No instante em que o raio de Sol atinge o ponto A ortogonalmente, o mesmo raio ao atingir o ponto B forma um ângulo β com uma estaca fincada ortogonalmente ao chão. Na figura, observamos que os ângulos α e β são iguais, uma vez que ângulos opostos pelo vértice são congruentes, assim como ângulos correspondentes também são.

Eratóstenes mediu $\beta = \frac{\pi}{25}$ e $\widehat{AB} = 5.000$ estádios [1], da onde C=2.25.5000= 250.000 estádios. Considerando que 1 estádio correspondia a 157,5 metros, segue que $C = 39.375$ Km e $R = 6.266,71$ km. Apesar do método utilizado ser pouco preciso, o resultado obtido é excelente pois ao compará-lo

[1] unidade de distância utilizada na Grécia antiga

com a medida atual de $R = 6.378,11$ km, obtido a partir dos 40.075 km de circunferência, o erro é da ordem de 111 km $(1,75\%)$.

> *"Se tal extraordinário resultado pode ser feito conhecendo-se apenas esta simples propriedade de linhas retas, que de certa forma é evidente, quantos grandes problemas são esperados de um profundo conhecimento da geometria ? Esta questão não pode ocorrer a uma mente inquisidora da verdade; é fundamental determiná-la a não perder tempo em adquirir o conhecimento"*
> *- Malton (sec. 18), New Royal Road to Geometry*

$2^{o.}$ **Método**

Os Gregos conheciam um segundo método para o cálculo da circunferência da Terra utilizando uma estrela fixa no céu, em vez do Sol. Este $2^{o.}$ método é atribuído a Posidonius (135 - 51 a.c.), tutor de Cicero.

Posidonius observou que quando a estrela Canopus encontra-se no horizonte sul de Rhodes, ela vista de Alexandria, ao sul de Rhodes, encontra-se acima do horizonte formando um ângulo de $\frac{\pi}{24}$, como mostra a figura 4. Para aplicar este novo método, Posidonius teve que assumir as seguintes hipóteses;

1. O arco, sobre a superfície da Terra, ligando Rhodes e Alexandria encontra-se sobre um grande círculo,

2. Os raios de luz vindos de Canopus chegam à Terra paralelos,

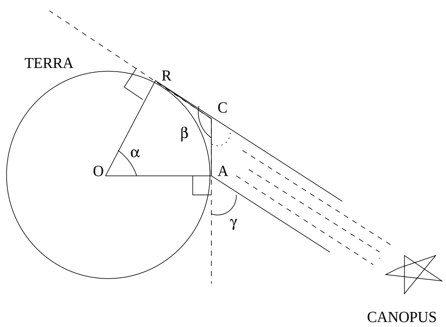

Figure 4: Método de Posidonius , $\alpha = \theta$

Posidonius observou que o ângulo central α media $\frac{\pi}{24}$, o que implica, pelo mesmo raciocínio de Eratóstenes, que conhecendo-se o comprimento do arco $\widehat{AR}$ de Alexandria a Rhodes, a circunferência da Terra seria de $C = 48.AR$.

Entretanto, Alexandria está separada de Rhodes pelo Mar Mediterrâneo, donde havia grande dificuldade em determinar o valor de $\widehat{AR}$. Com enorme inconsistência, Posidonius utilizou o cálculo de Eratóstenes que havia estimado $\widehat{AR} = 3750$ estádios. Consequentemente, pelo método de Posidonius, a circunferência da Terra mede $C = 180.000$ estádios; ou seja $C = 28.350$ km. Desta forma, o erro obtido é da da ordem de 7%, muito maior do que o obtido por Eratóstenes.

Todo este esforço matemático só teria sentido se os viajantes e navegadores acreditassem no fato de que a Terra é uma esfera. Sem duvida, ao sabermos o valor do raio da terra, fica mais simples obtermos as distâncias, pois o valor de π já era conhecido com precisão de 2 casas decimais.

2.2 Aplicação

O[2] valor de 180.000 estádios (28.350 km), divulgado pelo trabalho amplamente conhecido do geógrafo Grego Strabo (64 a.c. - 23 d.c.), levou a consequências mais profundas do que qualquer outro erro geométrico já cometido. Colombo usou a medida obtida por Posidonius para argumentar a viabilidade de sua proposta de alcançar as Indias nagevando para o Oeste. Colombo expôs sua proposta para sábios da época que acreditavam na hipótese do Mundo ser redondo, e que eram encarregados para decidir se a viagem sobre o imenso oceano em pequenos barcos de madeira tinha chance de sucesso. Eles não estavam preocupados se os barcos poderiam cair em alguma espécie de penhasco no fim do Mundo, eles de fato procupavam-se com a possibilidade do apodrecimento dos barcos e do sacrífico da tripulação que correria riscos de morrer de fome e de sede. A decisão dependia da estimativa para a provável distância que as naus navegariam, a qual dependia das estimativas feitas sobre a circunferência da Terra.

Colombo defendeu sua tese para os conselheiros do Rei e Rainha de Espanha citando o grande astrônomo e geográfo Ptolomeu que viveu muitos anos após Eratóstenes, Posidonius e Strabo. De acordo com Ptolomeu, um viajante que começasse sua viagem do ponto mais a Oeste no continente europeu, situado no Cabo de São Vicente em Portugal, e rumasse Leste, sobre um mesmo paralelo, até retornar ao ponto de partida, faria a primeira parte da viagem por terra e a segunda por mar. Isto significaria que as terras

[2] tradução do texto em [2]

dos continentes europeu e asiático ocupavam cerca de 180^o de um paralelo no hemisfério norte.

Na figura 5 temos que O é o centro da Terra enquanto sobre o mesmo paralelo temos os pontos V e C correspondendo ao cabo de São Vicente e ao extremo leste na China, respectivamente($\widehat{VC} = 180^o$). De acordo com a teoria de Ptolomeu, havia muita água entre a China e Portugal, o que não serviria para os argumentos de Colombo. Assim, ele fez uso da estimativa puramente especulativa de um astrônomo grego chamado Marinus de Tyre, a quem Ptolomeu havia citado apenas para criticá-lo. Seguindo Marinus, Colombo supôs que a distância entre os pontos V e C, por terra, era de 225^o. Portanto, o ponto C foi deslocado para C_1 na figura 6.

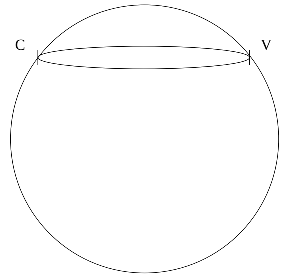

Figure 5: Conforme Ptolomeu $\widehat{AV} = 180^o$

Observando um atlas moderno, observa-se que a distância, em graus, dos extremos dos continentes sobre o paralelo em que encontra-se V, é da ordem de 120^o; o que implica que a distância por mar é da ordem de 240^o. De acôrdo com a estimativa de Colombo, a distância por mar seria de $360^o - 225^o = 135^0$.

Utilizar a estimativa de Marinus foi um dos muitos artfícios que Colombo usou para diminuir a distância por mar às Índias. Graças a invenção da imprensa, por volta de 1450, pelo alemão Johannes Gutenberg, o livro do mercador veneziano Marco Polo, descrevendo as suas viagens por terra ao oriente, havia sido publicado. Colombo havia adquirido uma cópia do livro de Marco Polo; este exemplar, sobre o qual Colombo anotava, ainda existe. As anotações mostram como ele foi diminuindo a distância para alcançar as Índias navegando para Oeste. De acordo com Marco Polo, com um pouco de ex-

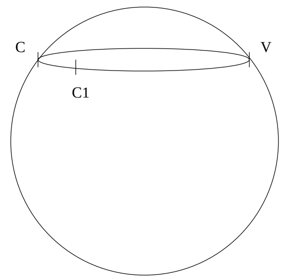

Figure 6: Conforme Marinus $C_1V = 135^o$

agero, a distância, em graus, de V ao ponto no extremo leste da China, sobre o paralelo, localizava-se a 28^o mais afastado do que a estimativa de Marinus, deslocando o ponto C_1 para o ponto C_2, como indica a figura 5. Desta forma, a distância por mar seria de fato de $360^o - (225^o + 28^o) = 107^o$. Marco Polo afirmou que e as Indias ficavam em algum lugar próximo a Cipango(Japão), o qual Colombo estimou como 30^o mais a leste da China.

De acôrdo com o relato de Marco Polo, Cipango deveria encontrar-se onde está marcada a letra J na figura 7. Consequentemente, a distância por terra de V a C seria de $225^o + 28^o + 30^o = 283^o$, da onde conclui-se que o arco $\widehat{JV}$ tem a distância em graus dada por $360^o - 283^o = 77^o$; correspondendo a distância por mar do Cabo de São Vicente a Cipango. Espertamente, Colombo planejou partir das Ilhas Canárias, as quais encontravam-se, segundo estimativas da época, a aproximadamente 9^o a oeste do cabo de São Vicente, o que implicaria que à distância a ser navegada seria de uns 68^o, desprezando-se o fato das Ilhas Canárias não se encontrarem sobre o mesmo paralelo que o Cabo. Aparentemente, Colombo não tinha a precisão como uma das suas virtudes. Insatisfeito com os 68^o obtidos, ele resolveu cortar mais 8^o do seu caminho. Assim, Colombo anunciou ao comitê, espantado pelos argumentos apresentados, que ele chegaria às Indias nagevando 60^o a Oeste das Ilhas Canárias, o que corresponderia a 1/3 da estimativa de Ptolomeu, que na época ainda gozava de grande prestígio.

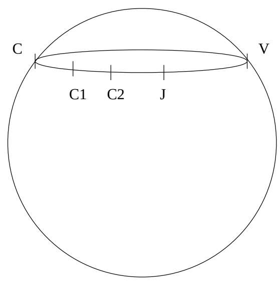

Figure 7: $JV = 60^o$, de acôrdo com Marco Polo

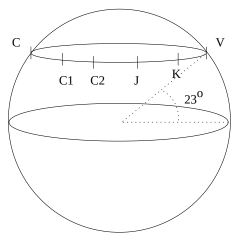

Figure 8: $JK = 68^o$, K= Ilhas Canárias e $\theta = 23^o$

Para discutir a viabilidade da viagem, era necessário transformar a distância estimada em 60^o graus para quilômetros. Aqui o erro de Posidonius cumpriu a sua função dentro dos objetivos de Colombo. Considerando que a circunferência da Terra calculada por Posidonius era de 180.000 estádios, os 60^o nagevados sobre o equador correspondem a

$$d = \frac{60}{360} \times 180.000 = 30.000 \quad \text{estádios},$$

ou, em km, $d = 4.725km$.

No entanto, Colombo não pretendia navegar ao longo do Equador, mas ao longo de um paralelo de latitude, o que resultaria numa distância ainda menor. Para calcular o raio de um círculo de latitude é necessários saber que a latitude das Ilhas Canárias é de 23^o. Isto significaria que a distância deveria ser da ordem de 4.320 km.

Colombo concluiu sua exposição ao comitê dizendo que *O final da Espanha e o começo das Indias não encontram-se muito distantes, o mar que os separa é navegável em poucos dias tendo ventos favoráveis*; ele estimou a viagem em 30 dias. Estes dizeres estão gravados em uma das anotações feitas nas margens de um livro seu sobre cosmografia.

Tendo Colombo como Almirante, a esquadra formada pelas caravelas *Santa Maria, Niña e Pinta*, partiu das Ilhas Canárias em setembro de 1492 e, em 33 dias, no dia 12 de outubro de 1492, alcançou terra a uma distância de 57^o a Oeste do ponto de partida, conforme previsto por Colombo. Estas terras não faziam parte do Japão, mas de um Mundo Novo.

3 Relações Métricas Esféricas

3.1 Distância sobre a Esfera

Uma vez que a Terra não é plana, os axiomas da geometria euclideana e as suas consequências não podem ser empregadas para obtermos relações métricas entre comprimentos e ângulos sobre a esfera. A diferença entre as geometrias fica evidente quando observarmos que não há retas sobre uma esfera.

No que segue, vamos assumir que a Terra é uma esfera; de fato, a Terra é achatada nos pólos. Sendo assim, vamos abstrair o problema para a superfície de uma esfera com raio R.

Uma esfera de raio R centrada na origem é o conjunto dos pontos

$$\mathbb{S}^2(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Para melhor descrevermos os pontos sobre a esfera $\mathbb{S}^2(R)$ introduzimos *coordenadas esféricas*;

Um sistema de coordenadas esféricas sobre $\mathbb{S}^2$ é um par (U, ϕ) tal que $U \subset \mathbb{S}^2$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{S}^2$ e $\phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to U$ é um difeomorfismo[3].

Exemplo: Sejam $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$ os pólos norte e sul e $l = \{(x, 0, z) \mid x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$. Considere $U = \mathbb{S}^2 - \{N, S\} \cup l$ e $\phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to U$ definida por

$$\phi(\theta, \psi) = R.(cos(\theta)sen(\psi), sen(\theta)sen(\psi), cos(\psi)). \tag{3.1}$$

Neste caso, temos que (U, ϕ) é um sistema de coordenadas sobre $\mathbb{S}^2$ e, se $p = \phi(\theta, \psi)$, as coordenadas esféricas de $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2(R)$ são (θ, ψ) (fig. 9).

Os pontos $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$ definem o plano π_{pq}, que contém a origem e é gerado pelos vetores $\vec{op}$ e $\vec{oq}$;

$$\pi_{pq} = \{s.\vec{op} + t.\vec{oq} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

A interseção de $\mathbb{S}^2(R)$ com π_{pq} é uma circunfêrencia que denominamos de *equador* e denotamos por $\mathfrak{e}_{pq}$. Além disto, os pontos p e q dividem o equador $\mathfrak{e}_{pq}$ em dois arcos $\mathfrak{e}^1_{pq}$ e $\mathfrak{e}^2_{pq}$ denominados *segmentos.*

Para obtermos relações métricas sobre $\mathbb{S}^2(R)$ assumiremos os seguintes axiomas;

Axioma 3.1.1. *Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$ existe um único equador $\mathfrak{e}_{pq} \subset \mathbb{S}^2(R)$ tal que $p, q \in \mathfrak{e}_{pq}$.*

Axioma 3.1.2. *Os pontos p e q dividem o equador $\mathfrak{e}_{pq}$ em dois segmentos $\mathfrak{e}^1_{pq}$ e $\mathfrak{e}^2_{pq}$.*

Axioma 3.1.3. *A distância esférica entre dois pontos distintos $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$ é*

$$d_{\mathbb{S}^2(R)}(p, q) = \inf(L(\mathfrak{e}^1_{pq}), L(\mathfrak{e}^2_{pq})).$$

Axioma 3.1.4. *Para qualquer par de equadores $\mathfrak{e}_1$ e $\mathfrak{e}_2$ há uma transformação $f : \mathbb{S}^2(R) \to \mathbb{S}^2(R)$ que preserva as distâncias entre pontos de $\mathbb{S}^2(R)$ e $f(\mathfrak{e}_1) = \mathfrak{e}_2$.*

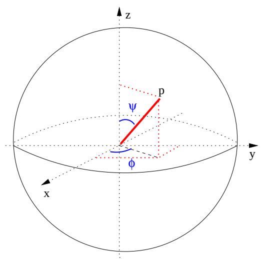

Figure 9: coordenadas esféricas

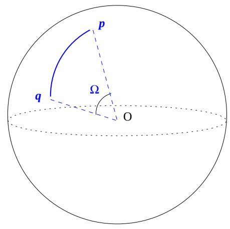

Figure 10: distância esférica

Ao supormos que o ângulo entre os vetores $\vec{op}$ e $\vec{oq}$ mede Ω, a distância entre p e q (fig. 10) é dada por

$$d_{S^2(R)}(p,q) = R.\Omega = R.arcos\left(\frac{<\vec{op},\vec{oq}>}{R^2}\right) \tag{3.2}$$

Vamos considerar que, em coordenadas esféricas, os pontos $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$ são descritos por

$$p = R.(cos(\theta_p)sen(\psi_p), sen(\theta_p)sen(\psi_p), cos(\psi_p)),$$
$$q = R.(cos(\theta_q)sen(\psi_q), sen(\theta_q)sen(\psi_q), cos(\psi_q)).$$

Ao substituirmos na expressão 3.2 obtemos a seguinte fórmula para a distância:

$$d_{S^2(R)}(p,q) = R.arcos\left(cos(\Delta\theta).cos(\Delta\psi) + 2sen^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).cos(\psi_p).cos(\psi_q)\right), \tag{3.3}$$

onde $\Delta\theta = \theta_q - \theta_p$ e $\Delta\psi = \psi_q - \psi_p$.
Se supormos que p pertence ao plano-xy, isto é, $\psi_p = \pi/2$, segue que

$$d_{S^2(R)}(p,q) = R.arcos\left(cos(\Delta\theta).cos(\Delta\psi)\right). \tag{3.4}$$

De acordo com o axioma 3.1.4, existe uma transformação em $\mathbb{S}^2(R)$ preservando a distância e levando p ao ponto $(1,0,0)$. Assim, podemos assumir que p pertence ao plano-xy e $\psi_p = \pi/2$. Portanto, a distância entre os pontos p e q sobre $\mathbb{S}^2(R)$ satisfaz a identidade

[3]função diferenciável que é uma bijeção e cuja inversa também é diferenciável

$$cos\left(\frac{d_{\mathbb{S}^2(R)}(p,q)}{R}\right) = cos(\Delta\theta).cos(\Delta\psi). \tag{3.5}$$

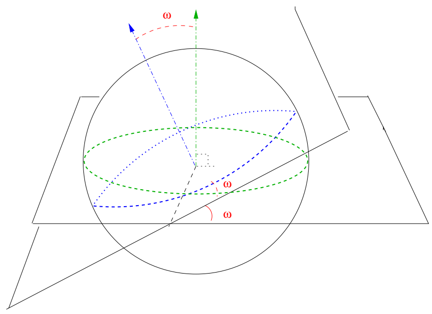

Figure 11: ângulo entre segmentos

Definição 1. O ângulo formado por dois segmentos é igual ao ângulo formado pelos planos que contém os segmentos (fig. 13).

3.2 Triângulos Esféricos

Os pontos A, B e C sobre $\mathbb{S}^2(R)$, quando não pertencem a um mesmo equador, definem um triângulo $\triangle ABC$ esférico. Assim como na geometria euclideana, na geometria esférica existem relações entre as medidas dos lados com as medidas dos ângulos de um triângulo.

Teoremax 3.2.1. *Teorema de Pitágoras Esférico - Seja $\triangle ABC$ um triângulo geodésico sobre a esfera $\mathbb{S}^2(R)$ tal que no vértice A o ângulo seja retângulo. Suponha que a hipotenusa mede a, o lado oposto à B mede b e c seja a medida do lado oposto à C. Então,*

$$cos\left(\frac{a}{R}\right) = cos\left(\frac{b}{R}\right).cos\left(\frac{c}{R}\right). \tag{3.6}$$

Proof. De acordo com o Axioma 3.1.4, podemos considerar o lado AB sobre o equador $\psi = \pi/2$. Em particular, podemos assumir que

$$A = (1,0,0), \quad B = (cos\left(\frac{c}{R}\right), sen\left(\frac{c}{R}\right), 0) \quad \text{e}$$
$$C = (sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{b}{R}\right), 0, cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{b}{R}\right)).$$

Portanto,

$$< \vec{OB}, \vec{OC} >= cos\left(\frac{a}{R}\right) = cos\left(\frac{b}{R}\right).cos\left(\frac{c}{R}\right).$$

□

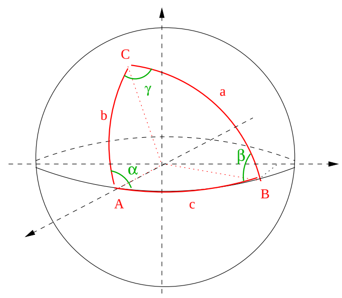

Figure 12: triângulo retângulo

Conforme dito anteriormente, a nossa experiência cotidiana mostra que a expressão 1.1 é adequada para resolvermos problemas de medição quando, por exemplo, queremos medir as dimensões de uma construção, ou de terrenos e até as distâncias dentro de uma cidade. Sendo assim, a identidade 1.1 deve ser obtida a partir de 3.6 quando os lados a, b e c do triângulo são muito pequenos em relação ao raio R. Por exemplo, para um segmento AB medindo 10 metros sobre a superfície da Terra temos que $\frac{10}{6378{,}11} \sim 1$ mm. Vejamos o que ocorre ao assumirmos na identidade 3.6 que $\frac{a}{R} \sim 0$, $\frac{b}{R} \sim 0$ e $\frac{c}{R} \sim 0$.

Segue das séries de Taylor da funções cosseno e seno que

$$\frac{a}{R} \sim 0 \quad \Rightarrow \quad cos(\frac{a}{R}) = 1 - \frac{(\frac{a}{R})^2}{2} + o((\frac{a}{R})^4), \tag{3.7}$$

$$sen(\frac{a}{R}) = \frac{a}{R} - o((\frac{a}{R})^2). \tag{3.8}$$

onde

$$\lim_{\frac{a}{R}\to 0} \frac{o((\frac{a}{R})^4)}{(\frac{a}{R})^2} = 0.$$

As aproximações 3.7 e 3.8, quando aplicadas à identidade 3.6, resultam em

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + o(\frac{a}{R^4}) = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{R}\right)^2 + o(\frac{b^4}{R^4})\right].\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{R}\right)^2 + o(\frac{c^4}{R^4})\right]$$

Consequentemente,

$$\frac{a^2-b^2-c^2}{2} = -\frac{1}{4}\frac{b^2.c^2}{R^2} + \frac{1}{2R^2}\left[b^2.o(\frac{c^4}{R^4}) + c^2.o(\frac{b^4}{R^4})\right] + \tag{3.9}$$

$$+\left[o(\frac{a^4}{R^4}) - o(\frac{b^4}{R^4}) - o(\frac{c^4}{R^4})\right] - o(\frac{b^4}{R^4}).o(\frac{c^4}{R^4}) \tag{3.10}$$

Assim, se $R \gg a$, $R \gg b$ e $R \gg c$, então

$$a^2 \sim b^2 + c^2,$$

sendo que no limite $\frac{a}{R} \to 0$, $\frac{b}{R} \to 0$ e $\frac{c}{R} \to 0$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Portanto, o Teorema de Pitágoras euclideano deve ser aplicado quando os lados do triângulo são muito pequenos em relação ao raio R, embora ele só vale nas situações limites descritas acima ou quando a, b e c são fixos e $R \to \infty$.

Agora, vamos considerar um triângulo qualquer.

Proposição 3.2.2. *Lei dos Cossenos - Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico em $\mathbb{S}^2$ com ângulos internos medindo α, β e γ e cujos lados opostos medem a, b e c, respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned} &cos(\alpha) = \frac{cos\left(\frac{a}{R}\right) - cos\left(\frac{b}{R}\right)cos\left(\frac{c}{R}\right)}{sen\left(\frac{b}{R}\right).sen\left(\frac{c}{R}\right)}, \quad cos(\beta) = \frac{cos\left(\frac{b}{R}\right) - cos\left(\frac{a}{R}\right)cos\left(\frac{c}{R}\right)}{sen\left(\frac{a}{R}\right).sen\left(\frac{c}{R}\right)}, \\ &cos(\gamma) = \frac{cos\left(\frac{c}{R}\right) - cos\left(\frac{a}{R}\right)cos\left(\frac{b}{R}\right)}{sen\left(\frac{a}{R}\right).sen\left(\frac{b}{R}\right)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Proof. Sem perda de generalidade, suponha que

$$\begin{aligned} &A = (1,0,0), \quad B = (cos(\theta_B)sen(\psi_B), sen(\theta_B)sen(\psi_B), cos(\psi_B)) \\ &C = (cos(\theta_C), sen(\theta_C), 0). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
cos(\frac{a}{R}) &= < \vec{OB}, \vec{OC} >= cos(\theta_C - \theta_B)sen(\psi_B),\\
cos(\frac{b}{R}) &= < \vec{OA}, \vec{OC} >= cos(\theta_C),\\
cos(\frac{c}{R}) &= < \vec{OA}, \vec{OB} >= cos(\theta_B)sen(\psi_B);
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

da onde segue que,

$$
\begin{aligned}
sen(\frac{a}{R}) &= \sqrt{cos^2(\psi_B) + sen^2(\theta_C - \theta_B)sen^2(\psi_B)}\\
sen(\frac{c}{R}) &= \sqrt{cos^2(\psi_B) + sen^2(\theta_B)sen^2(\psi_B)}.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Os vetores

$$
\begin{aligned}
n_{AB} &= \frac{\vec{OA} \times \vec{OB}}{\mid \vec{OA} \times \vec{OB} \mid} = (\frac{(0, -cos(\psi_B), sen(\theta_B)sen(\psi_B))}{\sqrt{cos^2(\psi_B) + sen^2(\theta_B)sen^2(\psi_B)}}\\
n_{BC} &= \frac{\vec{OB} \times \vec{OC}}{\mid \vec{OB} \times \vec{OC} \mid} = \frac{(-cos(\psi_B)sen(\theta_C), cos(\psi_B)cos(\theta_C), sen(\theta_C - \theta_B)sen(\psi_B))}{\sqrt{cos^2(\psi_B) + sen^2(\theta_C - \theta_B)sen^2(\psi_B)}}\\
n_{CA} &= \frac{\vec{OC} \times \vec{OA}}{\mid \vec{OC} \times \vec{OA} \mid} = (0, 0, -1)
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

determinam os planos π_{AC}, π_{AB} e π_{BC}, respectivamente. Considere $\{n_{AB}, n_{BC}, n_{CA}\}$ uma base orientada de $\mathbb{R}^3$. Uma vez que,

$$
cos(\alpha) = - < n_{AC}, n_{AB} >, \quad cos(\beta) = - < n_{AB}, n_{BC} >, \quad cos(\gamma) = - < n_{AC}, n_{BC} >,
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
cos(\alpha) &= \frac{sen(\theta_B)sen(\psi_B)}{\sqrt{cos^2(\psi_B) + sen^2(\theta_B)sen^2(\psi_B)}}\\
cos(\beta) &= \frac{cos^2(\psi_B)cos(\theta_C) - sen(\theta_C - \theta_B)sen^2(\psi_B)sen(\theta_B)}{\sqrt{cos^2(\psi_B) + sen^2(\theta_B)sen^2(\psi_B)}\sqrt{cos^2(\psi_B) + sen^2(\theta_C - \theta_B)sen^2(\psi_B)}}\\
cos(\gamma) &= \frac{sen(\theta_C - \theta_B)sen(\psi_B)}{\sqrt{cos^2(\psi_B) + sen^2(\theta_C - \theta_B)sen^2(\psi_B)}}.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Da relação 3.13, temos

$$
\begin{aligned}
cos\left(\frac{a}{R}\right) =& cos\left(\frac{b}{R}\right) cos\left(\frac{c}{R}\right) + sen\left(\frac{b}{R}\right) sen(\theta_B)sen(\psi_B) \\
sen(\theta_C-\theta_B)sen(\psi_B) =& sen\left(\frac{b}{R}\right) cos\left(\frac{c}{R}\right) - cos\left(\frac{b}{R}\right) sen(\theta_B)sen(\psi_B),
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

e, consequentemente,

$$
\begin{aligned}
sen(\theta_B)sen(\psi_B) =& \frac{cos\left(\frac{a}{R}\right) - cos\left(\frac{b}{R}\right) cos\left(\frac{c}{R}\right)}{sen\left(\frac{b}{R}\right)} \\
sen(\theta_C-\theta_B)sen(\psi_B) =& \frac{cos\left(\frac{c}{R}\right) - cos\left(\frac{a}{R}\right) cos\left(\frac{b}{R}\right)}{sen\left(\frac{b}{R}\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

As expressões 3.18 aplicadas à 3.16 resultam nas seguintes identidades:

$$
cos(\alpha) = \frac{cos\left(\frac{a}{R}\right) - cos\left(\frac{b}{R}\right) cos\left(\frac{c}{R}\right)}{sen\left(\frac{b}{R}\right).sen\left(\frac{c}{R}\right)}, \quad cos(\gamma) = \frac{cos\left(\frac{c}{R}\right) - cos\left(\frac{a}{R}\right) cos\left(\frac{b}{R}\right)}{sen\left(\frac{a}{R}\right).sen\left(\frac{b}{R}\right)}.
\tag{3.19}
$$

Analogamente, a identidade para o $cos(\beta)$ é obtida a partir da situação na qual os vértices do $\triangle ABC$ são

$$
\begin{aligned}
&A = (1,0,0), \quad B = (cos(\theta_B), sen(\theta_B), 0) \\
&C = (cos(\theta_C)sen(\psi_C), sen(\theta_C)sen(\psi_C), cos(\psi_C)).
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Neste caso, obtemos

$$
cos(\beta) = \frac{cos\left(\frac{b}{R}\right) - cos\left(\frac{a}{R}\right) cos\left(\frac{c}{R}\right)}{sen\left(\frac{a}{R}\right).sen\left(\frac{c}{R}\right)}.
$$

□

Corolario 3.2.3. *Lei dos Senos - Num triângulo esférico $\triangle ABC$, como na proposição 3.2.2, valem as identidades*

$$
\frac{sen(\alpha)}{sen(a)} = \frac{sen(\beta)}{sen(b)} = \frac{sen(\gamma)}{sen(c)}.
\tag{3.21}
$$

A seguir, como no caso do Teorema de Pitágoras, vamos analisar as expressões 3.11 quando $R \gg a$, $R \gg b$ e $R \gg c$. Ao aplicarmos as aproximações 3.7 e 3.8 à primeira expressão em 3.11, segue que:

$$cos(\alpha) = \frac{\left[1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2} + o(\frac{a^4}{R^4})\right] - \left[1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{R^2} + o(\frac{c^4}{R^4})\right] . \left[1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{R^2} + o(\frac{1}{R^4})\right]}{\left[\frac{b}{R} - o(\frac{b^4}{R^2})\right] . \left[\frac{c}{R} - o(\frac{c^4}{R^2})\right]} =$$

$$= \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{b^2c^2}{R^2}}{bc - \frac{1}{R^3}.\left[b.o(\frac{c^4}{R^4}) + c.o(\frac{b^4}{R^4})\right] + \frac{1}{R^2}o(\frac{b^4}{R^4}).o(\frac{c^4}{R^4})} +$$

$$+ \frac{R^2.[o(\frac{a^4}{R^4}) - o(\frac{b^4}{R^4}) - o(\frac{c^4}{R^4})]}{bc - \frac{1}{R^3}.\left[b.o(\frac{c^4}{R^4}) + c.o(\frac{b^4}{R^4})\right] + \frac{1}{R^2}o(\frac{b^4}{R^4}).o(\frac{c^4}{R^4})} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}[b^2.o(\frac{c^4}{R^4}) + c^2.o(\frac{b^4}{R^4})] - \frac{1}{R^2}.o(\frac{b^4}{R^4}).o(\frac{c^4}{R^4})}{bc - \frac{1}{R^3}.\left[b.o(\frac{c^4}{R^4}) + c.o(\frac{b^4}{R^4})\right] + \frac{1}{R^2}o(\frac{b^4}{R^4}).o(\frac{c^4}{R^4})}.$$

Portanto, no limite $\frac{a}{R} \to 0$, $\frac{b}{R} \to 0$ e $\frac{c}{R} \to 0$ verificamos a identidade

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(\alpha) \tag{3.22}$$

3.3 A Área de um Triângulo Esférico

Uma vez que as relações métricas em triângulos esféricos são simples, é natural que haja uma expressão para a área.

Um gomo em $\mathbb{S}^2$ é uma região limitada por dois segmentos η e ρ ligando os pontos antípodas $p = (x, y, z)$ e $q = (-x, -y, -z)$, em $\mathbb{S}^2$. Em cada um dos vértices p e q, os segmentos formam um ângulo θ denominado o ângulo do gomo. Um gomo com ângulo θ é equivalente, pelo axioma 3.1.4, à

$$G_\alpha = \{(cos(\theta)sen(\psi), sen(\theta)sen(\psi), cos(\psi)) \mid 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq \psi \leq \pi\}.$$

Lema 3.3.1. *A área de um gomo com ângulo interno θ, em $\mathbb{S}^2(R)$, é igual a $2\theta R^2$.*

Proof. Utilizando coordenadas esférica temos que

$$A = R^2. \int_0^\theta \int_0^\pi sen(\phi) d\phi d\theta = 2\theta R^2.$$

Em particular, se $\theta = 2\pi$ o resultado $4\pi R^2$ dá a área da esfera.

$\square$

Teoremax 3.3.2. *A área de um triângulo esférico $\triangle ABC \subset \mathbb{S}^2(R)$, cujos ângulos internos medem α, β e γ, é*

$$A = R^2. \left[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi\right].$$

Proof. Seja A a área do triângulo, pelo lema anterior a área do gomo G_α com ângulo α é

$$A + A_\alpha = 2\alpha R^2,$$

onde A_α é a área da região complementar ao triângulo no gomo. Uma vez que a área de $\mathbb{S}^2$ é $4\pi R^2$ e que $\triangle \cup G_\alpha \cup G_\beta \cup G_\gamma$ é um hemisfério, segue que

$$A + A_\alpha + A_\beta + A_\gamma = 2\pi R^2$$

Consequentemente,

$$A + (2\alpha R^2 - A) + (2\beta R^2 - A) + (2\gamma R^2 - A) = 2\pi R^2,$$

e

$$A = R^2. \left[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi\right].$$

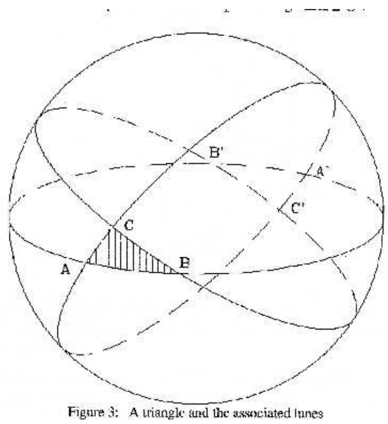

Figure 13: ângulo entre segmentos

$\square$

References

[1] C.M.Doria, *Geometria sobre as Superfícies*, notas.

[2] J.L.Heilbron, *Geometry Civilized*, Oxford, 1998.

[3] *Enciclopédia Britânica*, 1995.

[4] *Enciclopédia Larrousse Cultural*, 1998.

[5] Eugênio Gomes, *VIEIRA - Sermões*, $3^{a.}$-edição, Ed. Agir, 1963.

Dr. Celso Melchiades Doria
UFSC, Depto. de Matemática
Campus Universitário, Trindade
Florianópolis - SC, 88.040-900.
http://www.mtm.ufsc.br