

**Integração
em
Variedades Diferenciáveis**

Celso M. Doria
UFSC - Depto. de Matemática
cmdoria@mtm.ufsc.br

28 de março de 2009

Índice

1 - Introdução	pg 1
2 - Integração Vetorial	pg
2.1 - Integral de Linha	pg
2.2 - Integral de Superfície	pg
3 - Teoremas Clássicos de Integração	pg
4 - Teoria do Potencial	pg
5 - Integração	
5.1 - Definições Básicas	pg
5.2 - Conjuntos de Medida Zero	pg
5.3 - Funções Integráveis	pg
5.4 - Teorema de Fubini	pg
5.5 - Partições da Unidade	pg
5.6 - Mudança de Variável	pg
6 - Álgebra Tensorial	pg
6.1 - Produto Tensorial	pg
6.2 - Álgebra Tensorial	pg
6.3 - Álgebra Exterior	pg
7 - Formas Diferenciais	pg
7.1 - Definição	pg
7.2 - Derivada Exterior	pg
7.3 - Cohomologia de De Rham	pg
7.4 - Teorema de Stokes	pg
8 - Variedades Diferenciais	pg
8.1 - Definição	pg
8.2 - Fibrados Tangente e Cotangente	pg
8.3 - Aplicações Diferenciáveis entre Variedades	pg
8.4 - Variedades com Bordo	pg
8.5 - Orientação	pg
8.6 - Variedades Riemannianas	pg
9 - Integração em Variedades	pg
9.1 - Definição	pg
9.2 - Derivada Exterior	pg
9.3 - Teorema de Stokes	pg
10 - Cohomologia de De Rham	pg
10.1 - Definição	pg
10.2 - Cohomologia de De Rham de S^n	pg
10.2 - Dualidade de Poincaré	pg
11 - Fibrados Vetoriais	pg
11.1 - Definição	pg
11.2 - Método do Referencial Móvel	pg
11.3 - Formas com valores em Fibrados Vetoriais	pg

Capítulo 1

Introdução

As Variedades Diferenciáveis constituem uma categoria de espaços topológicos sobre os quais é possível definir os operadores de *Derivação* e *Integração*. Diversos modelos matemáticos apresentam um carácter não linear, o que significa que as equações definem estruturas não-lineares. Quando esta estrutura é associada a uma variedade diferenciável, então as técnicas da teoria de variedades diferenciáveis podem ser empregadas para entender os problemas oriundos da não-linearidade.

O desenvolvimento da integração sobre Variedades surgiu do descobrimento das formas diferenciais. Por sua vez, as formas foram descobertas pela simples observação de que os teoremas clássicos de integração, Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Green, Teorema de Stokes e o Teorema de Gauss, eram o mesmo Teorema quando escritos na linguagem das formas diferenciais. Tal fato pode ser dado como um exemplo onde, em matemática, a simplicidade da linguagem não deve ser ignorada mas interpretada como indício de uma estrutura cuja riqueza só poderá ser avaliada após ter sido explorada.

O primeiro grande resultado foi o Teorema de De Rham, cuja afirmação diz que os grupos de *cohomologia de formas* e os grupos de *cohomologia singular* (c /coef. em \mathbb{R}) são isomorfos, relacionando a estrutura diferenciável com a topologia da variedade. Posteriormente, a teoria culminou com a chamada *Teoria de Chern-Weil*, onde classes características de fibrados vetoriais são detectadas a partir de formas diferenciais definidas pela forma de curvatura.

Há diversas aplicações de formas diferenciais na Geometria e na Topologia, mas são muito relevantes as aplicações na Relatividade Geral e na Teoria do Calibre (*Gauge*). Todas as aplicações são decorrentes do fato de que as formas diferenciais formam a linguagem adequada para descrever operadores globalmente definidos sobre uma variedade, dispensando o uso de cartas locais.

Capítulo 2

Integração Vetorial

2.1 Cálculo Vetorial

Vamos recordar alguns aspectos operacionais de cálculo vetorial, para motivar e entender o emprego das formas diferenciais. Formas Diferenciais formam uma linguagem, sendo que através delas as variedades manifestam alguns aspectos da sua natureza. Digamos que seria muito difícil para Sigmund Freud desenvolver a sua Teoria da Psicanálise caso os humanos não tivessem uma linguagem altamente desenvolvida; neste caso, o analisado é a variedade.

2.1.1 Integral de Linha

Para rever a integral de linha, vamos utilizar o conceito físico do Trabalho. Considere uma partícula de massa M que é deslocada sobre uma linha reta à uma distância s sob a ação de uma força constante F , então o Trabalho é dado por

$$W = F.s.$$

Agora, suponha que ao deslocar-se, a partícula descreve uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Para determinar o Trabalho realizado vamos aproximar a curva por uma curva poligonal $\gamma_{\mathcal{P}}$ associada a uma partição $\mathcal{P} = \{a = t_1, \dots, t_i, \dots, t_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$. Considere o conjunto de pontos

$$\{t_i^*; 1 \leq i \leq n, t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

assuma que no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ o Trabalho é dado por

$$W_i = \langle F(t_i^*), T(t_i^*) \rangle \Delta s_i$$

onde $T(t_i^*) = \frac{\gamma'(t_i^*)}{|\gamma'(t_i^*)|}$ é o vetor tangente a γ no instante t_i^* , e

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \sqrt{\left[\frac{\gamma_1(t_{i+1}) - \gamma_1(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right]^2 + \left[\frac{\gamma_2(t_{i+1}) - \gamma_2(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right]^2} \Delta t_i = \\ &= \sqrt{[\gamma_1'(t_i^*)]^2 + [\gamma_2'(t_i^*)]^2} \cdot \Delta t_i = |\gamma'(t_i^*)| \cdot \Delta t_i \end{aligned}$$

Portanto, o trabalho realizado sobre a linha poligonal $\gamma_{\mathcal{P}}$ é

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{P}} &= \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \langle F(t_i^*), T(t_i^*) \rangle \Delta s_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle F(t_i^*), T(t_i^*) \rangle |\gamma'(t_i^*)| \cdot \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \langle F(t_i^*), \frac{\gamma'(t_i^*)}{|\gamma'(t_i^*)|} \rangle \cdot |\gamma'(t_i^*)| \cdot \Delta t_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle F(t_i^*), \gamma'(t_i^*) \rangle \Delta t_i \end{aligned}$$

Desta forma, o Trabalho sobre γ é aproximadamente $W \sim W_{\mathcal{P}}$.

De fato, se $\|\mathcal{P}\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |t_{i+1} - t_i|$, podemos definir o Trabalho sobre γ como sendo

$$W = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} W_{\mathcal{P}} \quad (2.1)$$

Quando o limite (2.1) existe, denotamos

$$W = \int_a^b \langle F(t), \gamma'(t) \rangle dt \quad (2.2)$$

Suponha que $F = (F_1, F_2)$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, então

$$\langle F(t), \gamma'(t) \rangle dt = F_1(t)\gamma_1'(t)dt + F_2(t)\gamma_2'(t)dt$$

O ponto de partida para a Teoria de Formas Diferenciais é definir os funcionais lineares dx_1, dx_2 como segue: sejam $p \in \mathbb{R}^2$ e $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in T_p\mathbb{R}^2$, então para todo $r, s \in \mathbb{R}$

$$dx_1(ru + sv) = ru_1 + sv_1, \quad dx_2(ru + sv) = ru_2 + sv_2$$

Uma vez que $d\gamma = \partial_t \gamma dt = (\gamma_1' dt, \gamma_2' dt)$, temos que

$$dx_1(d\gamma) = \gamma_1'(t)dt \quad \text{e} \quad dx_2(d\gamma) = \gamma_2'(t)dt$$

onde $\gamma'(t) = d\gamma \cdot 1 = \partial_t \gamma dt \cdot 1$

Desta forma,

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \langle F(t), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b F_1(t)\gamma_1'(t)dt + F_2(t)\gamma_2'(t)dt \\ &= \int_a^b \{F_1(t)dx_1(d\gamma) + F_2(t)dx_2(d\gamma)\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Em geral, o campo vetorial $F = (F_1, F_2)$ está definido em \mathbb{R}^2 , da onde podemos considerar o funcional linear definido em \mathbb{R}^2 por

$$w = F_1 dx_1 + F_2 dx_2,$$

de modo que podemos escrever a equação (2.3) na forma

$$W = \int_{\gamma} w \quad (2.4)$$

O simbolo acima significa que

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} w = \int_{\gamma} \{F_1(\gamma(t))dx_1 + F_2(\gamma(t))dx_2\} = \int_a^b (F_1(\gamma(t))dx_1 + F_2(\gamma(t))dx_2)(\gamma'(t)) = \\ &= \int_a^b \{F_1(\gamma(t))dx_1(\gamma'(t)) + F_2(\gamma(t))dx_2(\gamma'(t))\} = \int_a^b F_1(t)\gamma_1'(t)dt + F_2(t)\gamma_2'(t)dt = \\ &= \int_a^b [F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)]dt \end{aligned}$$

Com o objetivo de definir os funcionais lineares dx_1 e dx_2 vejamos o seguinte;

Definição 2.1.1.1. *Seja $p \in \mathbb{R}^2$. O plano tangente à \mathbb{R}^2 no ponto p é o espaço vetorial*

$$T_p\mathbb{R}^2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \eta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \eta(0) = p, \eta'(0) = v\}.$$

Desta forma, $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^2$ enquanto dx_1 e dx_2 definem, para cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$, os funcionais lineares

$$dx_i : T_p\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, 2.$$

2.1.2 Integral de Superfície

Vamos agora considerar o seguinte problema físico; calcule o fluxo de um campo vetorial V (ex: campo elétrico, meio fluido, corrente elétrica, ...) através de uma superfície limitada $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Seja (\mathcal{U}, ϕ) , $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de Ω dada em coordenadas por

$$\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)) \quad , \quad (u, v) \in \mathcal{U}$$

Uma partição \mathcal{P} de \mathcal{U} é uma subdivisão em pequenos elementos de área A_i . Como anteriormente, sejam

$$\|\mathcal{P}\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |A_i| \quad \text{e} \quad (u_i^*, v_i^*) \in A_i.$$

Notação: $\frac{\partial \phi}{\partial u} = \partial_u \phi = \phi_u$.

Em Ω , vamos assumir que existe um campo vetorial normal unitário de classe C^∞ dado por

$$n(u, v) = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{|\phi_u \wedge \phi_v|},$$

onde

$$\phi_u \wedge \phi_v = (\partial_u \phi_2 \partial_v \phi_3 - \partial_u \phi_3 \partial_v \phi_2, \partial_u \phi_3 \partial_v \phi_1 - \partial_u \phi_1 \partial_v \phi_3, \partial_u \phi_1 \partial_v \phi_2 - \partial_u \phi_2 \partial_v \phi_1)$$

Exercício 1: No ponto (u, v) , a derivada da aplicação $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ define a aplicação linear $d\phi_{(u,v)} : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\phi(u,v)}\mathbb{R}^3$, cuja matriz na base canônica é dada por

$$d\phi_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \partial_u \phi_1 & \partial_v \phi_1 \\ \partial_u \phi_2 & \partial_v \phi_2 \\ \partial_u \phi_3 & \partial_v \phi_3 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Mostre que o vetor ortogonal $N = \phi_u \wedge \phi_v$ é dado por

$$N(u, v) = \left(\frac{\partial(\phi_2, \phi_3)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\phi_3, \phi_1)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(u, v)} \right),$$

onde cada coordenada é um determinante menor da matrix (2.5).

Se um campo vetorial V for tangente a superfície, então não haverá fluxo de V através da superfície. Intuitivamente, considere o caso quando as pessoas estão caminhando paralelamente a uma parede, ou ortogonalmente a normal à parede, então havendo uma porta na parede, o fluxo de pessoas pela porta será 0.

Analogamente, a idéia é aproximar Ω por uma superfície de um poliedro. Para isto, considere uma partição \mathcal{P} de \mathcal{U} . Supondo que $\mathcal{U} = [a, b] \times [c, d]$, considere $\mathcal{P}_u = \{a = u_1, \dots, u_n = b\}$ e $\mathcal{P}_v = \{c = v_1, \dots, v_m = d\}$. Portanto, uma partição de \mathcal{U} é dada por

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_u \times \mathcal{P}_v = \{(u_i, v_j) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

ou seja,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j].$$

Os vértices $\phi(u_i, v_j)$ da partição \mathcal{P} definem o poliedro

$$\Omega_{\mathcal{P}} = \{\phi(u_i, v_i) \mid (u_i, v_i) \in \mathcal{P}\}$$

em \mathbb{R}^3 . Ao fazermos uma contagem das faces do poliedro $\Omega_{\mathcal{P}}$ definimos o índice i para denotar a ordem da face Ω_i . Considere o conjunto de pontos

$$\{(u_i^*, v_i^*) \in \mathcal{U}\},$$

onde $u_i^* \in [u_{k-1}, u_k]$, para algum k e $v_i^* \in [v_{l-1}, v_l]$ para algum l .

Supondo que em cada Ω_i o valor do campo vetorial V é muito próximo do valor constante $V(u_i^*, v_i^*)$, é plausível assumir que o fluxo através de cada Ω_i seja

$$\Phi_{ij} = \langle V(u_i^*, v_i^*), n(u_i^*, v_i^*) \rangle \cdot \Delta\Omega_i$$

onde, se $u_i^* \in [u_{k-1}, u_k]$ e $v_i^* \in [v_{l-1}, v_l]$, o elemento de área é dado por

$$\Delta\Omega_i = |N(u, v)| \cdot \Delta_k u \Delta_l v.$$

Desta forma, é natural definirmos o fluxo total sobre Ω como sendo o limite

$$\Phi_{\Omega} = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i,j=0}^{n,m} \Phi_i \quad (2.6)$$

Caso o limite acima exista, então o fluxo é dado pela integral dupla

$$\begin{aligned} \Phi_{\Omega} &= \int_{\mathcal{U}} \langle V(u, v), \frac{N(u, v)}{|N(u, v)|} \cdot |N(u, v)| \rangle dudv = \\ &= \int_{\mathcal{U}} \langle V(u, v), N(u, v) \rangle dudv. \end{aligned}$$

Em coordenadas, temos que

$$\langle V(u, v), N(u, v) \rangle = V_1(u, v)N_1(u, v) + V_2(u, v)N_2(u, v) + V_3(u, v)N_3(u, v)$$

onde

$$V_1N_1 = V_1 \cdot (\partial_u \phi_2 \partial_v \phi_3 - \partial_u \phi_3 \partial_v \phi_2) \quad (2.7)$$

$$V_2N_2 = V_2 \cdot (\partial_u \phi_3 \partial_v \phi_1 - \partial_u \phi_1 \partial_v \phi_3)$$

$$V_3N_3 = V_3 \cdot (\partial_u \phi_1 \partial_v \phi_2 - \partial_u \phi_2 \partial_v \phi_1)$$

Procedendo de maneira análoga, introduzimos os funcionais lineares

$$\begin{aligned} dx : T_p \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, & dy : T_p \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, & dz_p : T_p \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ dx_p(V) &= V_1(p), & dy_p(V) &= V_2(p), & dz_p(V) &= V_3(p) \end{aligned}$$

Agora, consideremos o funcional *bilinear alternado* $dy \wedge dz : T_p \mathbb{R}^3 \times T_p \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido da seguinte forma: sejam $U = (u_1, u_2, u_3)$ e $V = (v_1, v_2, v_3)$ vetores de \mathbb{R}^3 , então

$$dy \wedge dz(U, V) = dy(U) \cdot dz(V) - dy(V) \cdot dz(U) = (u_2 v_3 - v_2 u_3).$$

Assim, podemos escrever a equação (2.7) na forma

$$V_1N_1 = V_1 \cdot dy \wedge dz(\partial_u \phi, \partial_v \phi)$$

Analogamente,

$$V_2N_2 = V_2 \cdot dz \wedge dx(\partial_u \phi, \partial_v \phi)$$

$$V_3N_3 = V_3 \cdot dx \wedge dy(\partial_u \phi, \partial_v \phi)$$

da onde,

$$\Phi_{\Omega} = \int_{\mathcal{U}} (V_1 dy \wedge dz + V_2 dz \wedge dx + V_3 dx \wedge dy)(\partial_u \phi, \partial_v \phi) dudv \quad (2.8)$$

Sendo assim, se considerarmos o funcional alternado

$$w = V_1 dy \wedge dz + V_2 dz \wedge dx + V_3 dx \wedge dy,$$

então o fluxo pode ser escrito na forma

$$\Phi_{\Omega} = \int_{\Omega} w \quad (2.9)$$

Problema 2.1.2.1. Resolva os seguintes itens;

1. Mostre que todo vetor V tangente a Ω pode ser escrito na forma $V = v_1 \partial_u \phi + v_2 \partial_v \phi$.
2. Sejam U, V vetores tangentes a Ω . Calcule $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$ e $dz \wedge dx$.
3. Desde que $d\phi = \partial_u \phi du + \partial_v \phi dv$, calcule $dx \wedge dy(d\phi, d\phi)$, $dy \wedge dz(d\phi, d\phi)$ e $dz \wedge dx(d\phi, d\phi)$

2.2 Teoremas Clássicos de Integração

O desenvolvimento do Cálculo deu-se a partir do século XVI com o advento da Geometria Analítica e com os trabalhos que culminaram com as descobertas das Leis da Mecânica. O conceito de *integração* já era conhecido pelos gregos, o grande avanço foi a descoberta da *derivada* e a sua relação com a integração. Há quem diga, o que eu concordo, que uma das maiores descobertas feitas pela humanidade foi o Teorema Fundamental do Cálculo.

Theorem 2.2.0.2. *Teorema Fundamental do Cálculo*

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Então, $g'(x) = f(x)$

Para fins mais operacionais, o teorema admite o seguinte enunciado;

Theorem 2.2.0.3. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $g'(x) = f(x)$, então*

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a) \quad (2.10)$$

O bordo do intervalo $[a, b]$ é definido como sendo o conjunto $\partial([a, b]) = \{a, b\}$; assim, temos que

$$\int_{\partial([a, b])} g(t)dt = g(b) - g(a)$$

e a fórmula (2.9) pode ser escrita na forma

$$\int_{[a, b]} g'(t)dt = \int_{\partial([a, b])} g(t)dt \quad (2.11)$$

Os outros teoremas de integração generalizam (2.11) para integrais múltiplas.

Theorem 2.2.0.4. *Teorema de Green*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto cujo bordo é uma curva de classe C^1 . Se $P, Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 , então

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy \quad (2.12)$$

Theorem 2.2.0.5. *Teorema de Stokes*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta cujo bordo é a curva $\partial\Omega$ de classe C^1 . Se $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 , então

$$\int \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dz \right] = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy + R dz \quad (2.13)$$

Theorem 2.2.0.6. *Teorema de Gauss*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma região compacta cujo bordo é uma superfície $\partial\Omega$ de classe C^1 . Se $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^1 , então

$$\int \int \int_{\Omega} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (2.14)$$

O que observamos nas expressões (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14) é que as integrais sobre a região Ω são determinadas por integrais sobre o bordo $\partial\Omega$. O grande passo na evolução da linguagem das formas foi o desenvolvimento necessário que estes 4 teoremas fossem vistos como casos particulares de um mesmo teorema. A descoberta deste *Teorema* foi fundamental para o desenvolvimento da teoria das formas diferenciais.

2.3 Teoria do Potencial

Nesta seção, vamos abordar um outro tipo de questão implícita no Teorema Fundamental do Cálculo;

Questão 1: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Existe uma função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, denominada primitiva de f , tal que

$$g'(x) = f(x) \quad ?$$

Pelo Teorema fundamental do Cálculo a função

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é a solução para a questão.

Ao tratarmos o caso de funções de 2 variáveis, a derivada pode ser identificada com o gradiente;

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad dF \rightsquigarrow \quad \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

Questão 2: Seja $V = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo. Existe uma função diferenciável $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V = \nabla F$? Ou equivalentemente,

$$v_1 = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{\partial F}{\partial y} \quad ? \quad (2.15)$$

Na segunda questão há uma obstrução para mostrar a existência de solução uma vez que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

implica em

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad (2.16)$$

Portanto, a questão 2 deve ser enunciada da seguinte forma: Dado um campo vetorial contínuo $V = (v_1, v_2)$ satisfazendo (2.16), existe uma função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla F = V \quad ?$$

A função F é denominada *Função Potencial* de V .

Vamos começar a analisar a questão descrevendo um contra-exemplo.

Exemplo 1: Considere o campo vetorial $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$V(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Neste caso, vamos mostrar que a resposta à questão 2 é negativa embora a condição (2.16) seja satisfeita. Suponhamos que exista uma função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (2.15). Considere $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

e também defina a função composta $F_\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ $F_\gamma(\theta) = F \circ \gamma(\theta)$. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{dF_\gamma}{d\theta}(\theta) &= \nabla F_{\gamma(\theta)} \cdot \gamma'(\theta) = V(\cos(\theta), \sin(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) = \\ &= (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta)) = 1 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dF_\gamma}{d\theta}(\theta) d\theta = 2\pi.$$

No entanto, de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dF_\gamma}{d\theta}(\theta) d\theta = F_\gamma(2\pi) - F_\gamma(0) = 0.$$

Havendo contradição, concluímos que tal função F não poderá existir.

De fato, o campo V não está bem definido em \mathbb{R}^2 , mas sim em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Isto torna a questão mais sutil devido a contribuição que a topologia da região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ da ao problema.

Definição 2.3.0.7. Um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito estrelado com respeito a um ponto $x_0 \in \Omega$ se o segmento $\{tx_0 + (1-t)x \mid t \in [0, 1]\}$ está contido em Ω para todo $x \in \Omega$.

Observação 2.3.0.8. Os campos vetoriais que admitem uma função potencial exercem papel fundamental na Física por terem um caráter conservativos; por isto também denominados de campos conservativos.

Theorem 2.3.0.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e estrelado. Para todo campo vetorial $V = (v_1, v_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo (2.16) existe uma função potencial.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_0 = 0 \in \Omega$. Considere a função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = \int_0^1 [xv_1(tx, ty) + yv_2(tx, ty)]dt.$$

Desde que Ω é estrelado em relação a 0, $F(x, y)$ é bem definida para todos os pontos $(x, y) \in \Omega$. Segue que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 [v_1(tx, ty) + tx \frac{\partial v_1}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial v_2}{\partial x}(tx, ty)]dt$$

No entanto, a expressão

$$\frac{d[t.v_1(tx, ty)]}{dt} = v_1(tx, ty) + tx \frac{\partial v_1}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial v_1}{\partial y}(tx, ty)$$

implica que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \left[\frac{d[t.v_1(tx, ty)]}{dt} + ty \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}(tx, ty) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(tx, ty) \right) \right] dt.$$

Decorre da identidade (2.16), que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{d[t.v_1(tx, ty)]}{dt} dt = [tv_1(tx, ty)] \Big|_0^1 = v_1(x, y)$$

Analogamente, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = v_2(x, y)$

□

O exemplo 1 e o Teorema acima mostram que a *forma* do conjunto Ω é importante para responder a questão 2. Em vez de tentar resolver a questão para tipos distintos de conjuntos Ω , vamos definir um invariante de Ω que será útil para detectar a existência de uma função potencial.

Considere o espaço vetorial $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$ das funções diferenciáveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$. Vamos inicialmente nos restringir ao caso $k=2$.

Definição 2.3.0.10. *Seja $V \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$;*

1. o gradiente é o operador linear diferencial $\text{grad} : C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ definido por

$$\text{grad}(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

2. o rotacional é o operador linear diferencial $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ definido por

$$V = (P, Q) \rightsquigarrow \text{rot}(V) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Observação 2.3.0.11. *Vejam os seguintes;*

1. Sejam

$$\text{Nuc}(\text{rot}) = \{V \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \text{rot}(V) = 0\}$$

$$\text{Im}(\text{grad}) = \{V \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \exists F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \text{ tal que } V = \text{grad}(F)\}.$$

2. Para todo $F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, temos que

$$\text{rot} \circ \text{grad}(F) = 0 \quad \text{Im}(\text{rot}) \subset \text{Nuc}(\text{grad}).$$

Com base na observação acima, consideramos o espaço vetorial quociente

$$H^1(\Omega) = \text{Nuc}(\text{rot}) / \text{Im}(\text{grad}) = \{\alpha + \text{Im}(\text{grad}) \mid \alpha \in \text{Nuc}(\text{rot})\}$$

Embora $\text{Nuc}(\text{rot})$ e $\text{Im}(\text{grad})$ sejam espaços vetoriais de dimensão infinita, o fato notável, decorrente do Teorema de De Rham, é que quando Ω é compacto o espaço vetorial $H^1(\Omega)$ é de dimensão finita. Com este conceito, podemos reformular os resultados obtidos no Teorema (2.3.0.9) e no exemplo 1;

Theorem 2.3.0.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, então*

1. *se Ω é estrelado $\Rightarrow H^1(\Omega) = 0$*
2. *$H^1(\mathbb{R}^2 - 0) \neq 0$*

Observação 2.3.0.13. *Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, segue do Teorema de De Rham que a dimensão de $H^1(\Omega)$ corresponde ao número de buracos em Ω , por exemplo, $\dim(H^1(\mathbb{R}^2 - 0)) = 1$.*

Também consideramos os espaços vetoriais

$$H^0(\Omega) = Nuc(grad), \quad H^2(\Omega) = C^\infty(\Omega, \mathbb{R})/Im(rot).$$

Theorem 2.3.0.14. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto estrelado, então;*

1. *Ω possui k componentes conexas $\Leftrightarrow H^0(\Omega) \simeq \mathbb{R}^k$.*
2. *$H^2(\Omega, \mathbb{R}) = 0$.*

Demonstração. 1. Suponha que $grad(f)=0$. Então, f é localmente constante, o que significa que cada $x_0 \in \Omega$ tem uma vizinhança U_{x_0} tal que se $x \in U_{x_0} \Rightarrow f(x) = f(x_0)$. Se Ω é conexo, então toda função localmente conexa é constante. De fato, para $x_0 \in \Omega$ o conjunto

$$f^{-1}(f(x_0)) = \{x \in \Omega \mid f(x) = f(x_0)\}$$

é fechado uma vez que f é contínua, e é aberto porque f é localmente constante. Consequentemente, f é constante, o que implica que $H^0(\Omega) \simeq \mathbb{R}$. Agora, suponha que $\Omega = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i$ tem k componentes conexas, então para cada k -upla $(c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ existe uma função $f \in Nuc(grad)$ tal que na $f|_{\Omega_i} = c_i$. De fato, existe um isomorfismo entre espaços vetoriais $Nuc(grad) \simeq \mathbb{R}^k \Rightarrow H^1(\Omega) \simeq \mathbb{R}^k$

2. Seja $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e considere o campo vetorial $V = (0, Q)$, onde

$$Q(x, y) = \int_0^1 f(tx, y) x dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = f(x, y).$$

Consequentemente, $rot(V) = f$ e $H^2(\Omega) = 0$.

□

Vamos agora analisar o caso quando $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Definição 2.3.0.15. *Seja $V = (v_1, v_2, v_3) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$;*

1. o gradiente é o operador linear diferencial $grad : C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ definido por

$$grad(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

2. o rotacional é o operador linear diferencial $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ definido por

$$rot(V) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$$

3. o divergente é o operador linear diferencial $div : C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ definido por

$$div(v_1, v_2, v_3) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Observação 2.3.0.16. *Vejamos o seguinte;*

1. *Sejam $Nuc(rot)$ o núcleo de rotacional e $Im(grad)$ a imagem do gradiente. Desde que para todo $F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$*

$$rot \circ grad(F) = 0,$$

segue que $Im(grad) \subset Nuc(rot)$.

2. *Sejam $Im(rot)$ a imagem do rotacional e $Nuc(div)$ o núcleo do divergente. Desde que para todo $V \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$*

$$div \circ rot(F) = 0,$$

segue que $Im(rot) \subset Nuc(div)$.

Analogamente ao que já definimos, consideramos os espaços vetoriais

$$H^0(\Omega) = Nuc(grad), \quad H^1(\Omega) = Nuc(rot)/Im(grad),$$

$$H^2(\Omega) = Nuc(div)/Im(rot), \quad H^3(\Omega) = C^\infty(\Omega, \mathbb{R})/Im(div).$$

Theorem 2.3.0.17. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto estrelado, então $H^0(\Omega) = 0$, $H^1(\Omega) = 0$, $H^2(\Omega) = 0$ e $H^3(\Omega) = 0$.

Demonstração. A demonstração de que $H^0(\Omega) = 0$ e $H^1(\Omega) = 0$ é análoga ao caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Vamos nos restringir a mostrar que $H^2(\Omega) = 0$ e $H^3(\Omega) = 0$.

1. Suponha que Ω é estrelado com respeito à origem 0. Considere uma função $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $div(V) = 0$, e defina $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$G(x) = \int_0^1 [V(tx) \times (tx)] dt$$

onde

$$[V(x) \times (tx)] = t \cdot (v_2x_3 - v_3x_2, v_3x_1 - v_1x_3, v_1x_2 - v_2x_1)$$

No entanto, se $div(V) = 0$, segue que

$$rot[V(tx) \times (tx)] = \frac{d(t^2V(tx))}{dt}.$$

Desta maneira, temos que

$$rot(G(x)) = \int_0^1 \frac{d(t^2V(tx))}{dt} = V(x).$$

2. Seja $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e consideremos o campo $V = (P, 0, 0)$, onde

$$P(x, y, z) = \int_0^1 f(tx, y, z) x dt.$$

Segue que $div(V) = f$, portanto, $H^3(\Omega, \mathbb{R}) = 0$.

□

Exercício: Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ o círculo unitário no plano $(x, y, 0)$. Considere a função $V : \mathbb{R}^3 - S \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$V(x, y, z) = \left(\frac{-2xz}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}, \frac{-2yz}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{z^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2} \right)$$

1. Mostre que $V \in H^1(\mathbb{R}^3 - S)$.
2. Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma V$$

ao longo da curva $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(t) = (\sqrt{1 + \cos(t)}, 0, \sin(t))$$

3. Suponha que $V = grad(F)$ e calcule a mesma integral de linha acima.
4. Conclua que $[V] \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3 - S)$ ($\Rightarrow H^1(\mathbb{R}^3 - S) \neq 0$).

2.4 Integração

2.4.1 Definições Básicas

A definição da Integral sobre uma região retangular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é análoga ao caso quando $n=1$, por isto a exposição será simples visando apenas fixar a linguagem. Em termos de medida, será sempre usada a medida de Lebesgue, ou seja

$$[a, b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mu([a, b]) = b - a$$

Definição 2.4.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,*

1. Ω é um retângulo fechado se pode ser escrito como o produto de intervalos fechados da reta ,

$$\Omega = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

2. Uma partição de um retângulo Ω é uma coleção $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$, onde cada $\mathcal{P}_i, 1 \leq i \leq n$ é uma partição do intervalo $[a_i, b_i]$. Suponha que cada partição \mathcal{P}_i é dada por

$$\mathcal{P}_i = \{a_i = t_1^i, \dots, t_{n_k}^i = b_i\}$$

onde n_k é o número de subintervalos de $[a_i, b_i]$ gerado pela partição. Portanto, a partição \mathcal{P} divide Ω em $\prod_{i=1}^n n_i$ retângulos, os quais serão chamados de subretângulos da partição \mathcal{P} .

Considere que Ω é um retângulo, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada e \mathcal{P} é uma partição de Ω . Para cada subretângulo S de \mathcal{P} , sejam

$$m_S(f) = \inf\{f(x) \mid x \in S\}$$

$$M_S(f) = \sup\{f(x) \mid x \in S\}$$

e $v(S)$ = volume de S . As somas inferior (L) e superior (U) de f associadas a partição \mathcal{P} são definidas por

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_S m_S(f).v(S), \quad U(f, \mathcal{P}) = \sum_S M_S(f).v(S),$$

Por definição, temos que $L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P})$.

Lema 2.4.1.2. *Suponha que a partição \mathcal{P}' é um refinamento de \mathcal{P} . Então,*

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P}'), \quad e \quad U(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P})$$

Demonstração. Desde que \mathcal{P}' é um refinamento de \mathcal{P} , segue que cada subretângulo S de \mathcal{P} é subdividido em subretângulos de \mathcal{P}' , digamos que $S = R_1 \cup \cdots \cup R_l$, então

$$m_S(f, \mathcal{P}) \leq m_{R_i}(f, \mathcal{P}'), \forall i \in \{1, \dots, l\}$$

e

$$M_{R_i}(f, \mathcal{P}') \leq M_S(f, \mathcal{P}), \forall i \in \{1, \dots, l\}$$

Desde que

$$v(S) = v(R_1) + \cdots + v(R_l),$$

$$\begin{aligned} m_S(f).v(S) &= m_S(f).v(R_{r_1}) + \cdots + m_S(f).v(R_l) \leq \\ &\leq m_{R_1}(f).v(R_1) + \cdots + m_{R_l}(f).v(R_l). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_S m_S(f).v(S) \leq \sum_S \sum_{i=1}^l m_{R_i}(f).v(R_i) = L(f, \mathcal{P}')$$

Para mostrar o caso $U(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P})$, o procedimento é análogo. □

Corolário 2.4.1.3. *Se \mathcal{P} e \mathcal{P}' são duas partições quaisquer, então $L(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P})$.*

Demonstração. Seja \mathcal{P}'' uma partição que refina ambas \mathcal{P} e \mathcal{P}' . Então,

$$L(f, \mathcal{P}') \leq L(f, \mathcal{P}'') \leq U(f, \mathcal{P}'') \leq U(f, \mathcal{P})$$

□

Definição 2.4.1.4. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável sobre um retângulo Ω se f é limitada e

$$\sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P})$$

Se f é integrável, denotamos $\int_{\Omega} f = \inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P})$

Theorem 2.4.1.5. Uma função limitada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável \Leftrightarrow para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição \mathcal{P} de Ω tal que $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \epsilon$

Demonstração. 1. (\Leftarrow) Esta direção é trivial.

2. (\Rightarrow) Se f é integrável, então

$$\sup_{\mathcal{P}} L(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P})$$

implica que existem partições \mathcal{P} e \mathcal{P}' tais que $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}') < \epsilon$. Se \mathcal{P}'' refina ambas \mathcal{P} e \mathcal{P}' , segue do lema acima que

$$U(f, \mathcal{P}'') - L(f, \mathcal{P}'') \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}') < \epsilon$$

□

Exemplos:

1. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função constante, $f(x) = c$. Então, para qualquer partição \mathcal{P} e subretângulo S nós temos que $m_S(f) = M_S(f) = c$, da onde segue que $L(f, \mathcal{P}) = U(f, \mathcal{P}) = \sum_S c \cdot v(S) = c \cdot v(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} f = c \cdot v(\Omega)$
2. Seja $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Se \mathcal{P} é uma partição, então todo subretângulo S conterá pontos (x, y) com x racional, e também pontos (x, y) com x irracional. Consequentemente, $m_S(f) = 0$ e $M_S(f) = 1$, ou seja

$$L(f, \mathcal{P}) = 0, \text{ e } U(f, \mathcal{P}) = 1$$

$\Rightarrow f$ não é integrável.

2.4.2 Conjuntos de Medida Zero

Definição 2.4.2.1. Um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tem medida 0 se para todo $\epsilon > 0$ existe uma cobertura

$$\{U_1, U_2, U_3, \dots\},$$

de Ω onde os conjuntos U_i são retângulos fechados tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \epsilon$$

Os seguintes fatos seguem imediatamente da definição;

1. Os conjuntos U_i poderiam ser considerados retângulos abertos;
2. Se Ω tem medida 0 e $\Omega' \subset \Omega$, então Ω' tem medida 0;
3. Um conjunto enumerável tem medida 0;
4. Os racionais \mathbb{Q} tem medida 0 (use a contagem lexicográfica)

Exercício: Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \dots$ e cada Ω_i tem medida 0, então Ω tem medida 0. (dica: utilize a contagem lexicográfica)

Definição 2.4.2.2. Um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tem volume 0 se para todo $\epsilon > 0$ existe uma cobertura finita de Ω formada por retângulos fechados

$$\{U_1, U_2, \dots, U_p\}$$

tais que

$$\sum_{i=1}^p v(U_i) < \epsilon$$

Observação 2.4.2.3. O conceito de volume acima tem a ver, por exemplo, com o fato de que um intervalo $[a, b]$ em \mathbb{R}^2 tem área 0 e um quadrado em \mathbb{R}^3 tem volume 0.

Similarmente,

1. Os conjuntos U_i poderiam ser considerados retângulos abertos;
2. Se Ω tem conteúdo 0 e $\Omega' \subset \Omega$, então Ω' tem conteúdo 0;
3. Um conjunto enumerável Ω tem volume 0 $\Leftrightarrow \Omega$ é finito;
4. Os racionais \mathbb{Q} não tem volume 0 (use a contagem lexicográfica)

Exercício: Se $a < b$, então o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ não tem conteúdo 0. De fato, se $\{U_1, \dots, U_p\}$ é uma cobertura finita de $[a, b]$ por intervalos fechados, então $\sum_{i=1}^p v(U_i) \geq b - a$.

Exercício: Se Ω é compacto e tem medida 0, então Ω tem volume 0.

2.4.3 Funções Integráveis

Considere a função limitada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Para medir o quanto f falha em ser contínua em $a \in \Omega$, considere $\delta > 0$ e sejam

$$M(a, f, \delta) = \sup_{x \in \Omega} \{f(x); |x - a| < \delta\}$$

$$m(a, f, \delta) = \inf_{x \in \Omega} \{f(x); |x - a| < \delta\}$$

Definição 2.4.3.1. A oscilação $\sigma(f, a)$ de f em a é definida por

$$\sigma(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} [M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)].$$

Este limite sempre existe desde que $[M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)] \geq 0$ e decresce quando δ decresce.

Problema 2.4.3.2. 1. Uma função limitada f é contínua em $a \Leftrightarrow \sigma(f, a) = 0$.

2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada, $\epsilon > 0$, então

$$\{x \in \Omega \mid \sigma(f, x) \geq \epsilon\}$$

é fechado.

Lema 2.4.3.3. Sejam Ω um retângulo fechado e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada tal que $\sigma(f, x) < \epsilon$ para todo $x \in \Omega$. Então existe uma partição \mathcal{P} de Ω com

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \epsilon \cdot v(\Omega)$$

Demonstração. Para todo $x \in \Omega$ existe um retângulo fechado U_x , contendo x em seu interior, tal que

$$M_{U_x}(f) - m_{U_x}(f) < \epsilon.$$

Desde que Ω é compacto, existe uma cobertura finita por abertos $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_p}\}$. Seja \mathcal{P} uma partição de Ω tal que cada subretângulo S de \mathcal{P} está contido em algum U_{x_i} . Então $M_S(f) - m_S(f) < \epsilon$ em todo subretângulo S de \mathcal{P} , tal que

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)]v(S) < \epsilon \cdot v(\Omega)$$

□

Theorem 2.4.3.4. Seja Ω um retângulo fechado e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Seja $B = \{x \in \Omega; f \text{ não é contínua em } x\}$. Então f é integrável em $\Omega \Leftrightarrow B$ tem medida 0.

Demonstração. 1. (\Leftarrow) Suponha que B tem medida 0.

Sejam $\epsilon > 0$ e $B_\epsilon = \{x \in \Omega; \sigma(f, x) \geq \epsilon\}$. Então $B_\epsilon \subset B$, o que implica que a medida de B_ϵ é 0. Desde que B_ϵ é compacto, ele tem conteúdo 0. Portanto, existe uma coleção finita $\{U_1, \dots, U_p\}$ de retângulos fechados, cujos interiores cobrem B_ϵ e tais que $\sum_{i=1}^p v(U_i) < \epsilon$. Seja \mathcal{P} uma partição de Ω tal que todo subretângulo S de \mathcal{P} está em um dos seguintes grupos

- (a) \mathcal{S}_1 , o qual consiste de subretângulos S , tais que $S \subset U_i$ para algum i .
- (b) \mathcal{S}_2 , o qual consiste de subretângulos S com $S \cap B_\epsilon = \emptyset$

Por hipótese, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < M, \forall x \in \Omega$, o que implica que $M_S(f) - m_S(f) < 2M$ para todo S . Portanto,

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_1} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) < 2M \sum_{i=1}^p v(U_i) < 2M\epsilon$$

Agora, se $S \in \mathcal{S}_2$, então $\sigma(f, x) < \epsilon \quad \forall x \in S$. O Lema (5.3.3) implica que existe um refinamento \mathcal{P}' de \mathcal{P} tal que

$$\sum_{S' \subset S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') < \epsilon \cdot v(S)$$

para todo $S \in \mathcal{S}_2$. Então

$$\begin{aligned} & U(f, \mathcal{P}') - L(f, \mathcal{P}') < \\ & < \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_1} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') + \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_2} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') \\ & < 2M\epsilon + \sum_{S \in \mathcal{S}_2} \epsilon v(S) \leq 2M\epsilon + \epsilon \cdot v(\Omega) \end{aligned}$$

Desde que M e $v(\Omega)$ são fixos, isto mostra que nós podemos fixar uma partição \mathcal{P}' com $U(f, \mathcal{P}') - L(f, \mathcal{P}')$ tão pequeno quanto desejado $\Rightarrow f$ é integrável.

2. (\Rightarrow) Suponha que f é integrável.

Desde que $B = B_1 \cup B_{\frac{1}{2}} \cup B_{\frac{1}{3}} \cup \dots$, é suficiente provarmos que cada conjunto $B_{\frac{1}{n}}$ tem medida 0. De fato, nós mostraremos que cada $B_{\frac{1}{n}}$ tem volume 0.

Sejam $\epsilon > 0$ e \mathcal{P} uma partição de Ω tal que

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Seja \mathcal{S} uma coleção de subretângulos S tais que $S \cap B_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset$. Então \mathcal{S} é uma cobertura de $B_{\frac{1}{n}}$. Agora, se $S \in \mathcal{S}$, então $M_S(f) - m_S(f) \geq \frac{1}{n}$. Consequentemente,

$$\frac{1}{n} \sum_{S \in \mathcal{S}} v(S) \leq \sum_{S \in \mathcal{S}} [U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P})] \cdot v(S) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) < \frac{\epsilon}{n}$$

implicando que

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} v(S) < \epsilon$$

□

Até agora, temos desenvolvido o conceito de integração sobre retângulos porque a integral sobre um conjunto arbitrário pode ser reduzida à integral sobre um retângulo. Para ver como isto é feito, seja C um conjunto qualquer e considere a *função característica* de C

$$\chi_C = \begin{cases} 0, & x \notin C, \\ 1, & x \in C \end{cases}$$

Se $C \subset \Omega$ para algum retângulo Ω e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, então $\int_C f$ é definida como $\int_C f \cdot \chi_C$, se $f \cdot \chi_C$ é integrável. Isto certamente ocorre se f e χ_C são integráveis.

Theorem 2.4.3.5. *A função χ_C é integrável \Leftrightarrow o bordo de C tem medida 0 (\Rightarrow volume=0).*

Demonstração. Se x está no interior de C , então existe um retângulo aberto U tal que $x \in U \subset C$, da onde $\chi_C = 1$ sobre U e χ_C é contínua em x . Analogamente, se x está no exterior de C , existe um retângulo aberto U tal que $x \in U \subset \mathbb{R}^n - C$, consequentemente, $\chi_C = 0$ sobre U e χ_C é contínua em x . Finalmente, se $x \in \partial C$, então para todo retângulo aberto U contendo x , existe $y_1 \in U \cap C$ tal que $\chi_C(y_1) = 1$ e existe $y_2 \in U \cap (\mathbb{R}^n - C)$, tal que $\chi_C(y_2) = 0$. Portanto, χ_C não é contínua em x . Assim,

$$\partial C = \{x; \chi_C \text{ não é contínua em } x\}$$

e o resultado segue do Teorema anterior. □

Definição 2.4.3.6. Um conjunto limitado $C \subset \Omega$ cujo bordo tem medida 0 é denominado Jordan mensurável. Como vimos anteriormente, a integral $\int_{\Omega} \chi_C$ é denominada volume de C .

Problema 2.4.3.7. Prove que uma função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida numa região limitada qualquer Ω , é integrável \Leftrightarrow o conjunto de discontinuidades de f em Ω tem medida 0.

2.4.4 Teorema de Fubini

O Teorema de Fubini implica que o cálculo de uma integral sobre um retângulo em \mathbb{R}^n reduz-se ao cálculo de integrais sobre intervalos fechados em \mathbb{R} . Antes, é preciso algumas definições elementares.

Definição 2.4.4.1. Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada sobre um retângulo fechado e $\mathcal{CP} = \{\text{conjunto de partições de } [a, b]\}$.

1. a integral superior de f em $[a, b]$ é

$$\mathcal{S}\left(\int\right)(f) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{CP}} \sum_{S \in \mathcal{P}} M_S(f) \cdot v(S)$$

2. a integral inferior de f em $[a, b]$ é

$$\mathcal{I}\left(\int\right)(f) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{CP}} \sum_{S \in \mathcal{P}} m_S(f) \cdot v(S)$$

Theorem 2.4.4.2. (Fubini) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ retângulos fechados, e seja $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Para $x \in A$ sejam $g_x : B \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g_x(y) = f(x, y)$ e

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{I}\left(\int\right)(g_x), \quad \mathcal{U}(x) = \mathcal{S}\left(\int\right)(g_x)$$

Então \mathcal{L} e \mathcal{U} são integráveis em A e

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f &= \int_A \mathcal{L} \\ \int_{A \times B} f &= \int_A \mathcal{U} \end{aligned}$$

Demonstração. Seja \mathcal{P}_A uma partição de A e \mathcal{P}_B uma partição de B . Ambas definem uma partição \mathcal{P} de $A \times B$ na qual todo retângulo S é da forma $S_A \times S_B$, onde S_A, S_B são subretângulos de \mathcal{P}_A e \mathcal{P}_B respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}) &= \sum_S m_S(f) \cdot v(S) = \sum_{S_A, S_B} m_{S_A \times S_B} \cdot v(S_A \times S_B) = \\ &= \sum_{S_A} \left[\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_B) \right] \cdot v(S_A) \end{aligned}$$

Agora, se $x \in S_A$, então $m_{S_A \times S_B}(f) \leq m_{S_B}(g_x)$. Consequentemente, para todo $x \in S_A$ nós temos

$$\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_B) \leq \sum_{S_B} m_{S_B}(g_x) \cdot v(S_B) \leq \mathcal{I}\left(\int\right)(g_x) = \mathcal{L}(x)$$

Portanto,

$$\sum_{S_A} \left(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_B) \right) \cdot v(S_A) \leq L(\mathcal{L}, \mathcal{P}_A),$$

da onde obtemos que

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(\mathcal{L}, \mathcal{P}_A) \leq U(\mathcal{L}, \mathcal{P}_A) \leq U(\mathcal{U}, \mathcal{P}_A) \leq U(f, \mathcal{P})$$

(prova da última desigualdade é análoga a prova da 1ª.). Desde que f é integrável,

$$\sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{CP}} \{L(f, \mathcal{P})\} = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{CP}} \{U(f, \mathcal{P})\} = \int_{A \times B} f.$$

Em outras palavras, \mathcal{L} é integrável em A e $\int_{A \times B} f = \int_A \mathcal{L}$.

A afirmação para \mathcal{U} segue de forma similar através das desigualdades

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(\mathcal{L}, \mathcal{P}_A) \leq L(\mathcal{U}, \mathcal{P}_A) \leq U(\mathcal{U}, \mathcal{P}_A) \leq U(f, \mathcal{P})$$

□

2.4.5 Partições da Unidade

Partições da Unidade são ferramentas de grande utilidade em situações onde procura-se definir objetos globais a partir de objetos locais, como é o caso de integração.

Definição 2.4.5.1. Uma Partição da Unidade de classe C^k em Ω é uma família de funções $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$, tais que :

1. Para quaisquer $\lambda \in \Lambda$ e $x \in \Omega$ temos que $\phi_\lambda(x) \geq 0$;
2. A família $\mathcal{F} = \{\text{supp}(\phi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ é localmente finita em Ω ;
3. Para todo $x \in \Omega$ tem que $\sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(x) = 1$

Decorre da definição que

1. $0 \leq \phi_\lambda(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$ e $\lambda \in \Lambda$;
2. Para todo $x \in \Omega$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\phi_\lambda(x) > 0$, o que implica que os suportes das ϕ_λ forma uma cobertura de Ω ($\Omega \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{supp}(\phi_\lambda)$)

Theorem 2.4.5.2. Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto. Para toda cobertura aberta $\mathcal{C}_\Lambda = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de Ω existe uma partição da unidade $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de classe C^∞ subordinada a \mathcal{C}_Λ .

Antes de demonstrar o Teorema vamos precisar de alguns resultados básicos de topologia e de alguns exemplos de funções que servem como base para a construção das funções ϕ_λ

Definição 2.4.5.3. Uma família de subconjuntos $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é localmente finita quando todo ponto $x \in \Omega$ possui uma vizinhança $V \subset \Omega$ que intersecta apenas um número finito de conjuntos C_λ . Quando, além disso, se tem $\Omega \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, diz-se que $\mathcal{C} = \{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura localmente finita de Ω .

Alguns resultados serão necessários, mas para evitar desvios dos objetivos do curso eles serão deixados como problemas.

Problema 2.4.5.4. (Teorema de Lindelöf) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer. Mostre que toda cobertura de Ω admite uma subcobertura enumerável.

Problema 2.4.5.5. Mostre que toda família localmente finita de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é enumerável.

Problema 2.4.5.6. Mostre que se $\mathcal{C} = \{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ é uma família localmente finita num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então um conjunto compacto $K \subset \Omega$ intersecta no máximo um número finito de conjuntos C_λ

Problema 2.4.5.7. Mostre que se $\mathcal{C} = \{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ é uma família localmente finita de conjuntos fechados de Ω , então $C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ é fechado em Ω .

Definição 2.4.5.8. A partição da unidade $\{\phi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ esta subordinada a cobertura $\mathcal{C}_\Theta = \{U_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ de Ω quando para cada $\lambda \in \Lambda$ existe algum $\theta \in \Theta$ tal que $\text{supp}(\phi_\lambda) \subset U_\theta$. (significa que a cobertura $\{\text{supp}(\phi_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ é um refinamento da cobertura $\{U_\theta \mid \theta \in \Theta\}$)

A demonstração do teorema esta baseada nos seguintes problema e lema;

Problema 2.4.5.9. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x+2)(x+1)}}, & t \in [-2, -1]; \\ 0, & t \notin [-2, -1]. \end{cases}$$

1. Faça o gráfico de f

2. Faça o gráfico da função $g(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{\int_{-\infty}^t f(t)dt}, & t \leq 0; \\ \frac{-f(t)}{\int_{-\infty}^t f(t)dt}, & t > 0 \end{cases}$

3. Considere a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(s) = \int_{-\infty}^t g(s)ds$ e faça seu gráfico

4. Seja $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = h(|x|)$. Mostre que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $\text{supp}(\psi) \subset B_2(0)$

Lema 2.4.5.10. Todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se escreve como união enumerável $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ de compactos K_n tais que

$$K_n \subset \text{int}(K_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demonstração. Todo ponto $a \in \Omega$ está contido numa bola $B_\delta(a) \subset \Omega$, o que implica que $\Omega \subset \bigcup_{a \in \Omega} B_\delta(a)$. Pelo Teorema de Lindelof, existe uma subcobertura enumerável tal que $\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_\delta(a_n)$ e $\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}_\delta(a_n)$, onde $\bar{B}_\delta(a_n)$ são conjuntos compactos.

Vamos definir os conjuntos K_n por indução. Pomos $K_1 = B_\delta(a_1)$ e suponha que

1. $\Omega \subset K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_p \cup B_\delta(a_{p+1}) \cup \dots$
2. $K_n \subset K_{n+1}$
3. $B_\delta(a_1) \cup \dots \cup B_\delta(a_p) \subset K_p$

Agora, cobrimos o compacto $K_p \cup \bar{B}_\delta(a_{p+1})$ com um número finito de conjuntos $B_\delta(a)$ onde $a \in K_p \cup B_\delta(a_{p+1})$. Considere

$$K_{p+1} = K_p \cup \bigcup_{i=1}^{p_p} \bar{B}_\delta(a_i)$$

□

Demonstração. (Teorema) Sejam $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ uma família de pontos em Ω e $B_\delta(x_\lambda)$ bolas abertas tais que

$$\Omega \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\delta(x_\lambda)$$

Para cada $\lambda \in \Lambda$, considere a função $\psi_\lambda(x)$ dada pelo problema de tal forma que $\text{supp}(\psi_\lambda) \subset B_\delta(x_\lambda)$.

Pelo Lema 1, existe uma família enumerável de compactos $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que $K_n \subset K_{n+1}$ e $\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Seja $\bigcup_{i=1}^{p_1}$ uma cobertura finita de K_1 . Desde que $A_2 = K_2 - K_1$ é compacto, seja $A_2 = \bigcup_{i=1}^{p_2} K_2 - K_1$ uma cobertura finita de A_2 . Analogamente, seja $A_n = K_n - K_{n-1}$ e

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{p_n} B_\delta(x_i)$$

uma cobertura finita de A_n . Portanto,

$$\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{p_n} B_\delta(x_i)$$

Para a simplicidade da exposição, vamos considerar que

$$\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{p_n} B_\delta(x_i) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_\delta(x_n)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a função $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

$$\phi_n(x) = \frac{\psi_\lambda(x)}{\sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n(x)}$$

Segue da construção que a coleção de funções $\{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz as seguintes propriedades;

1. $0 \leq \psi_n(x) \leq 1$ for all $x \in \Omega$;
2. dado $x \in \Omega$, $\phi_n(x) \neq 0$ apenas para um número finito de $n \in \mathbb{N}$ e $\text{supp}(\psi_n) \subset B_\delta(x_n)$. Consequentemente, a família $\mathcal{F} = \{\text{supp}(\phi_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é localmente finita em Ω e também é subordinada a cobertura $\{B_\delta(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
3. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_n = 1$

□

2.4.6 Teorema da Mudança de Variável para Integrais Múltiplas

Definição 2.4.6.1. 1. Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local se para todo ponto $x \in U$ existe uma vizinhança $U_x \subset U$ de x tal que a restrição $f : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ é inversível e a inversa é de classe C^∞ ($\Rightarrow \det(df_x) \neq 0$, $\forall x \in U_x$).

2. Uma aplicação $C^\infty f : U \rightarrow V$, onde $U, V \subset \mathbb{R}^n$, é um difeomorfismo se $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ está definida e é de classe C^∞ ($\Rightarrow \det(df_x) \neq 0$, $\forall x \in U$)

No caso de integração de funções de 1-variável temos o seguinte;

Theorem 2.4.6.2. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ um difeomorfismo, então*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b (f \circ \phi) \cdot \phi'$$

Demonstração. Seja $F' = f$ uma primitiva, então

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a))$$

No entanto, $(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) \Rightarrow$

$$\int_a^b (F \circ \phi)'(x) dx = \int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a))$$

□

Problema 2.4.6.3. *Usando a notação*

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f \quad ,$$

mostre que

$$\int_{\phi([a,b])} f = \int_{[a,b]} (f \circ \phi) \cdot |\phi'|$$

O objetivo desta seção é generalizar a fórmula encontrada no problema para dimensão n .

Problema 2.4.6.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Se $f : \alpha(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então*

$$\int_{T(\Omega)} f = \int_{\Omega} (f \circ T) |det(T)|$$

Theorem 2.4.6.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\alpha : \Omega \rightarrow \alpha(\Omega)$ um difeomorfismo. Se $f : \alpha(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então*

$$\int_{\alpha(\Omega)} f = \int_{\Omega} (f \circ \alpha) |det(d\alpha)|$$

Demonstração. O Teorema acima é substancialmente mais difícil de ser demonstrado do que seu análogo para dimensão 1. Por isto, a demonstração será dividida em 4 afirmações que implicam no resultado;

1. Se a afirmação do Teorema é verdadeira para os difeomorfismos locais $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\alpha(\Omega) \subset \Omega'$, então também é verdadeira para a composição $\alpha \circ \beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_{\beta \circ \alpha(\Omega)} f &= \int_{\beta(\alpha(\Omega))} f = \int_{\alpha(\Omega)} (f \circ \beta) |det(d\beta)| = \\ &= \int_{\Omega} (f \circ \beta \circ \alpha) |det(d\beta)| \cdot |det(d\alpha)| = \int_{\Omega} f \circ (\beta \circ \alpha) |det(d(\beta \circ \alpha))| \end{aligned}$$

□

2. Se a afirmação do Teorema é verdadeira para $f = 1$, então é verdadeira para toda função integrável.

Demonstração. Suponha que

$$\int_{\alpha(\Omega)} 1 = \int_{\Omega} |det(d\alpha)|$$

Seja \mathcal{P} uma partição de um retângulo $R \subset \Omega$. Para cada subretângulo S de \mathcal{P} , seja f_S a função constante $f_S(x) = m_S f$. Então,

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_S m_S(f) v(S) = \sum_S \int_S f_S = \sum_S \int_{\alpha^{-1}(S)} (f_S \circ \alpha) |det(d\alpha)| \leq$$

$$\leq \sum_S \int_{\alpha^{-1}(S)} (f \circ \alpha) | \det(d\alpha) | \leq \int_{\alpha^{-1}(R)} (f \circ \alpha) | \det(d\alpha) |$$

Analogamente,

$$\int_{\alpha^{-1}(R)} (f \circ \alpha) | \det(d\alpha) | \leq U(f, \mathcal{P})$$

Desde que f é integrável, segue que

$$\int_R f = \int_{\alpha^{-1}(R)} (f \circ \alpha) | \det(d\alpha) |$$

□

3. Para todo ponto $a \in \Omega$, existe uma vizinhança $U_a \subset \Omega$ onde o Teorema é verdadeiro.

Demonstração. A demonstração deste item será por indução na dimensão, por isto suponha que a afirmação feita seja válida para todo ponto em \mathbb{R}^{n-1} . Vamos assumir que $d\alpha_a = I$ e seja $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$

Seja $\beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação dada por $\beta(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_{n-1}(x), x_n)$, então $d\beta_a = I$ implica que existe um aberto $U' \subset \Omega$, contendo a , de tal forma que $\beta : U' \rightarrow \beta(U')$ é um difeomorfismo. Por isto, podemos definir a aplicação $\gamma : \beta(U') \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\gamma(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \alpha_n(\beta^{-1}(x))).$$

Decorre da construção de β e γ que $\alpha = \gamma \circ \beta$. Para verificar que γ pode ser tomado como um difeomorfismo basta observar que

$$d\gamma_{\beta(a)} = \begin{pmatrix} I_{(n-1) \times (n-1)} & 0 \\ \left\{ \frac{\partial(\alpha_n \circ \beta^{-1})}{\partial x_j}(a) \right\}_{1 \leq j \leq n-1} & \frac{\partial(\alpha_n \circ \beta^{-1})}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Segue de $d\alpha_a = I$ que

$$\frac{\partial(\alpha_n \circ \beta^{-1})_a}{\partial x_n}(a) = 1 \Rightarrow \det(d\gamma_{\beta(a)}) \neq 0$$

Portanto, existe um aberto V , com $\beta(a) \in V \subset \beta(U')$, tal que $\gamma : V \rightarrow \gamma(V)$ é um difeomorfismo. Seja $U_a = \beta^{-1}(V)$ e considere

$$U' \xrightarrow{\beta} \beta(U') \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$$

$$U_a \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$$

onde $V \subset \beta(U')$ e $\alpha = \gamma \circ \beta : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma composição de difeomorfismos.

Agora, de acordo com os itens 1º e 2º da demonstração, é suficiente mostrar que a afirmação do Teorema é satisfeita pelas aplicações β e γ ao integrar uma função constante. Vamos mostrar para β .

Seja $W \subset U_a$ um retângulo da forma $D \times [a_n, b_n]$, onde D é um retângulo em \mathbb{R}^{n-1} onde a fórmula da mudança de variável vale. Seja $\beta_{x_n} : D \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definida por

$$\beta_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \beta(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

Observamos que para todo $x_n \in U_a$ temos que β_{x_n} é um difeomorfismo $\Rightarrow \det(d\beta_{x_n}) \neq 0$. Além disto,

$$\int_{\beta(D \times [a_n, b_n])} 1 \cdot dx_1 \dots dx_{n-1} = \int_{\beta_{x_n}(D)} dx_1 \dots dx_{n-1}$$

Aplicando indução ao caso (n-1);

$$\begin{aligned} \int_{\beta(W)} &= \int_{[a_n, b_n]} \left[\int_{\beta(D)} dx_1 \dots dx_{n-1} \right] dx_n = \int_{[a_n, b_n]} \left[\int_D | \det(d\beta_n) | dx_1 \dots dx_{n-1} \right] dx_n = \\ &= \int_W | \det(d\beta_n) | dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

De forma análoga mostra-se que o Teorema é verdadeiro para γ .

Desta forma, podemos concluir que o Teorema é verdadeiro para $\alpha : U_a \rightarrow \mathbb{R}^n$, isto é,

$$\int_{\alpha(U_a)} 1 = \int_{U_a} |det(d\alpha)|$$

decorre do 2º-passo que para toda função $f : U_a \rightarrow \mathbb{R}$ temos

$$\int_{\alpha U_a} f = \int_{U_a} (f \circ \alpha) |det(d\alpha)|$$

□

4. Se para todo $a \in \Omega$ existe uma vizinhança na qual o Teorema vale, então ele vale para todo $a \in \Omega$.

Demonstração. Do passo anterior, temos que $\Omega \subset \bigcup_{a \in \Omega} U_a$, onde o teorema vale para cada U_a . Vamos extrair uma subcobertura enumerável de forma que $\alpha(\Omega) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha(U_{a_n})$. Seja $\{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{\alpha(U_{a_n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Desde que

$$supp((\phi_n \circ \alpha).(f \circ \alpha)) \subset U_n$$

e

$$supp(\phi_n.f) \subset \alpha(U_n)$$

segue que

$$\int_{\alpha(U_n)} \phi_n.f = \int_{U_n} (\phi_n \circ \alpha)(f \circ \alpha) |det(d\alpha)|$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(\Omega)} f &= \int_{\alpha(\Omega)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_n f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\alpha(U_n)} \phi_n.f = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{U_n} (\phi_n \circ \alpha).(f \circ \alpha) |det(d\alpha)| = \int_{U_n} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} (\phi_n \circ \alpha) \right\} (f \circ \alpha) |det(d\alpha)| = \\ &= \int_{\Omega} (f \circ \alpha) |det(d\alpha)| \end{aligned}$$

□

□

2.5 Álgebra Tensorial

2.5.1 Produto Tensorial

O produto tensorial de espaços vetoriais surge naturalmente em diversos ramos da Matemática, especialmente na Álgebra Linear e nas suas ramificações em Geometria Diferencial, Teoria de Cohomologia e Teoria de Representações, dentre outras.

Dados V, W espaços vetoriais sobre um corpo K , de dimensão finita. Seja $V \times W$ o produto cartesiano de V com W e considere o grupo abeliano livre gerado pelos elementos de $V \times W$, isto é

$$F = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} r_n(x_n, y_n) \mid r_n \in K, (x_n, y_n) \in V \times W \right\}$$

Seja G o subgrupo de F gerado pelos elementos da forma

1. $(x + x', y) - (x, y) - (x', y), x, x' \in V, y \in W;$
2. $(x, y + y') - (x, y) - (x, y'), x \in V, y, y' \in W;$
3. $(ax, y) - a(x, y), a \in K, x \in V, y \in W;$
4. $(x, ay) - a(x, y), a \in K, x \in V, y \in W.$

O quociente F/G é denominado o *Produto Tensorial* de V e W sobre K e o denotamos por $V \otimes_K W$.

Consideramos $j : F \rightarrow F/G$ o homomorfismo canônico induzido pela projeção e $j(x, y) = x \otimes y$. Como F é gerado por $V \times W$, segue que F/G é gerado pela imagem de j dos elementos $(x, y) \in V \times W$, ou seja, da forma $j(x, y) = x \otimes y$. Tem-se então que

$$(x + x') \otimes y = [(x + x', y)] = [(x, y)] + [(x', y)] = x \otimes y + x' \otimes y$$

De modo análogo,

$$x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$$

e

$$k(x \otimes y) = (kx) \otimes y + x \otimes (ky)$$

Assim, $V \otimes_K W$ tem uma estrutura de espaço vetorial e é gerado pelos elementos da forma $x \otimes y$. Sendo V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre K , consideramos as bases $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ e $\{f_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ de V e W , respectivamente. Então, para quaisquer $x \in V, y \in W$ onde $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ e $y = \sum_{j=1}^m y^j f_j$, decorre que $V \otimes_K W$ é gerado pelos elementos $e_i \otimes f_j$ uma vez que

$$x \otimes y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x^i y^j e_i \otimes f_j$$

Exercícios: Considere \mathbb{H} como sendo o anel de divisão dos quaternions e $M_n(K)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre K . Resolva os seguintes itens:

1. $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \simeq M_{nm}(\mathbb{R})$.
2. $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} K \simeq M_n(K)$.
3. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.
4. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq M_2(\mathbb{C})$.
5. $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq M_4(\mathbb{R})$.

A seguinte proposição afirma que uma função K -bilinear $f : V \times W \rightarrow P$, onde P é um grupo abeliano qualquer, pode ser estendida a uma aplicação linear $f_* : V \otimes_K W \rightarrow P$. Isto justifica a estrutura introduzida de produto vetorial.

Proposição 2.5.1.1. (*Propriedade Universal do Produto Tensorial*)

Seja F o grupo abeliano gerado por $V \times W$, e P um grupo abeliano livre tal que $f : F \rightarrow P$ é um homomorfismo satisfazendo as seguintes condições:

1. $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y), \forall x, x' \in V, y \in W;$
2. $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y'), \forall x \in V, y, y' \in W;$
3. $f(ax, y) = f(x, ay) = af(x, y), \forall a \in K, x \in V, y \in W.$

Então, existe um único homomorfismo $f_* : F/G \rightarrow P$ tal que o seguinte diagrama comuta:

Diagrama

Demonstração. Considere a aplicação

$$f_* : F/G \rightarrow P \quad F_*(x \otimes y) = f(x, y)$$

Segue que f_* está bem definida. Com efeito, dados $(x, y), (z, w)$ em F tal que $[(x, y)] = [(z, w)]$, então $(x, y) - (z, w) \in G$. Como G é gerado por elementos da forma \dots , então ,

$$0 = f((x, y) - (z, w)) = f(x, y) - f(z, w) = f_*(x \otimes y) - f_*(z \otimes w),$$

isto é, $f_*(x \otimes y) = f_*(z \otimes w)$.

Resta mostrar que $G \subset \text{Nucl}(f)$. Sendo f um homomorfismo, tem-se que

1. $f(x + x', y) - f(x, y) - f(x', y) = 0 \Rightarrow f_*((x + x') \otimes y) = f_*(x \otimes y) + f_*(x' \otimes y)$;
2. $f(x, y + y') - f(x, y) - f(x, y') = 0 \Rightarrow f_*(x \otimes (y + y')) = f_*(x \otimes y) + f_*(x \otimes y')$;
3. $af(x, y) = f(ax, y) = f(x, ay) \Rightarrow f_*((ax) \otimes y) = f_*(x \otimes (ay)) = af_*(x \otimes y)$,

Logo, para todo $g \in G$, temos que $f(g) = 0 \Rightarrow g \in \text{Nucl}(f)$

□

A construção do produto tensorial apresentada pode ser estendida ao produto tensorial de k fatores $V_1 \times \dots \times V_k$ de forma análoga, sendo neste caso linear em cada um dos fatores (multilinearidade).

Proposição 2.5.1.2. *Seja V, W, S espaços vetoriais sobre K . Então existem isomorfismos*

1. $V \otimes W \rightarrow W \otimes V, x \otimes y \rightarrow y \otimes x$;
2. $(V \otimes W) \otimes S \rightarrow V \otimes (W \otimes S), (x \otimes y) \otimes z \rightarrow x \otimes (y \otimes z)$;
3. $(V \oplus W) \otimes S \rightarrow (V \oplus S) \otimes (W \oplus S), (x + y) \otimes z \rightarrow x \otimes z + y \otimes z$;
4. $K \otimes V \rightarrow V, k \otimes x \rightarrow kx$

Demonstração. Ver em

□

O item (b) acima justifica a notação $V \otimes W \otimes S$ para $(v \otimes W) \otimes S$.

Problema 2.5.1.3. *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} duas K -álgebras sobre K . Defina o produto tensorial $\mathcal{A} \otimes_K \mathcal{B}$ e mostre que $\mathcal{A} \otimes_K \mathcal{B}$ admite uma estrutura de K -álgebra.*

2.5.2 Álgebra Tensorial

A definição do produto tensorial de espaços vetoriais sobre um corpo K nos leva naturalmente a definir a *Álgebra Tensorial* de um espaço vetorial V sobre um corpo K .

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Considere

$$V^{(n)} = \overbrace{V \otimes \dots \otimes V}^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

e $V^0 = K$. Considere também os isomorfismos:

$$\pi : K \otimes V^{(n)} \rightarrow V^{(n)}, \quad k \otimes x \rightarrow kx$$

e

$$\pi' : V^{(n)} \otimes K \rightarrow V^{(n)}, \quad x \otimes k \rightarrow xk$$

Assim, podemos assumir que existe um único isomorfismo

$$\phi : V^m \otimes V^n \rightarrow V^{(m+n)}$$

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes \dots \otimes x_{(m+n)}) \rightarrow x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes x_{m+1} \otimes \dots \otimes x_{(m+n)}$$

Agora, considere o espaço vetorial

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{(n)} = K \oplus V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \dots$$

munido com a operação do produto tensorial.

Proposição 2.5.2.1. $(T(V), +, \otimes)$ é uma álgebra sobre o corpo K

Demonstração. Os elementos de $v \in T(V)$ são escrito na forma

$$v = \sum_{n \in \mathbb{N}} v^{(n)}, \quad v^{(n)} \in V^{(n)}.$$

Devido a associatividade do produto tensorial e da existência do elemento unidade $1 \in K$, segue que $(T(V), +, \otimes)$ é uma álgebra. \square

Definição 2.5.2.2. $(T(V), +, \otimes)$ é denominada **Álgebra Tensorial** do espaço vetorial V .

A Álgebra Tensorial $T(V)$ é uma álgebra graduada uma vez que $V^{(n)} \otimes V^{(m)} \subset V^{(n+m)}$.

Proposição 2.5.2.3. (*Propriedade Universal da Álgebra Tensorial*)

Seja \mathcal{A} uma álgebra sobre o corpo K , e $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ um homomorfismo. Então existe um único homomorfismo $f_* : T(V) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que o diagrama abaixo comuta;

DIAGRAMA

Demonstração. Considere os homomorfismos $f_{(n)} : V^{(n)} \rightarrow \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, definidos por

$$f^{(0)}(k) = k, \quad f^{(n)}(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1).f(x_2) \dots f(x_n)$$

Tomando f_* como $f_* : T(V) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $f_*|_{V^{(n)}} = f^{(n)}, n \in \mathbb{N}$ segue que f_* é um homomorfismo de álgebras. Como V gera $T(V)$, f_* é o único homomorfismo de $T(V)$ sobre \mathcal{A} que coincide com f em V . \square

2.5.3 Álgebra Exterior

As Álgebras Exteriores, ou Grassmanianas, são de grande importância no estudo das formas diferenciais. Elas foram introduzidas em 1844 por *Hermann Gunther Grassmann*. O problema abordado por Grassmann era para encontrar uma álgebra na qual para todo $v \in V$ fosse verdade que $v^2 = 0$. Em 1867, *Hermann Hankel* interpretou geometricamente as idéias de Grassmann através do produto alternado de vetores.

Nesta seção, o objetivo será construir a Álgebra Exterior $\Lambda(V)$ associada a um espaço vetorial V . A construção será feita através do operador alternado $Alt : T(V) \rightarrow T(V)$, da onde teremos que $\Lambda(V) = \text{Img}(Alt)$.

Considerando que nosso objetivo é trabalhar com formas diferenciais, vamos desenvolver a Álgebra Exterior $\Lambda(V^*)$ associada ao espaço vetorial dual V^* .

Definição 2.5.3.1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Define-se como um p -tensor em V a uma função p -linear*

$$T : V^{\times p} = \overbrace{V \times \cdots \times V}^n \rightarrow K.$$

Isto é, para todo $j \in \{1, \dots, p\}$ verifica-se a condição de linearidade

$$T(v_1, \dots, \alpha v_j + \beta v'_j, \dots, v_p) = \alpha T(v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_p) + \beta T(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_p)$$

onde $v_i, v'_j \in V$ e $\alpha, \beta \in K$

Exemplos:

1. Se $p=1$, os 1-tensores são os funcionais lineares em V ;
2. O produto interno em \mathbb{R}^p é um 2-tensor;
3. O determinante de uma matriz $k \times k$ é um k -tensor.

O conjunto dos k -tensores sobre um espaço vetorial V será denotado por $T^p(V)$ ($T^1(V) = V^*$).

Problema 2.5.3.2. Resolva os seguintes problemas;

1. $\mathcal{T}^p(V)$ é um espaço vetorial sobre K .
2. Mostre que um p -tensor $T : V^{\times p} \rightarrow K$ induz um homomorfismo $T : V^{(p)} \rightarrow K$.

O produto tensorial de tensores é definido da seguinte forma: dados $T \in \mathcal{T}^p(V)$ e $S \in \mathcal{T}^q(V)$, $T \otimes S$ é dado pela fórmula;

$$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) = T(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}).$$

O produto tensorial induz uma estrutura associativa sobre $\mathcal{T}(V)$, que não é comutativa.

Seja $\beta = \{e_1, \dots, e_k\}$ uma base de V e $\beta^* = \{e_1^*, \dots, e_k^*\}$ a base dual correspondente, isto é ,

$$e_i^*(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i=j; \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

o que utilizando o *Delta de Kronecker* pode ser escrito como

$$e_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

Se $I = (i_1, \dots, i_p)$ é uma sequência de inteiros entre 1 e k , denotamos

$$e_I^* = e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^*$$

e

$$e_J = (e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$$

Se I e J são sequências de índices, então, por definição,

$$\begin{aligned} e_I^*(e_J) &= (e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^*)(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \\ &= e_{i_1}^*(e_{j_1}) \dots e_{i_p}^*(e_{j_p}) = \delta_{IJ} \end{aligned}$$

Proposição 2.5.3.3. Seja V um espaço vetorial de dimensão k e $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ uma base para V^* . Então os p -tensores $\{\phi_{i_1}, \dots, \phi_{i_p} \mid 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_p \leq k\}$ formam uma base para $\mathcal{T}^p(V)$. Consequentemente, $\dim(\mathcal{T}^p(V)) = k^p$.

Demonstração. Sejam $\beta = \{e_1, \dots, e_k\}$ uma base de V e $\beta^* = \{e_1^*, \dots, e_k^*\}$ a base dual correspondente. Sem perder a generalidade, vamos mostrar a proposição para a base β^* .

1. O conjunto $\{e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^* \mid 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_p \leq k\}$ é linearmente independente.
Suponha que existam coeficientes $a_I \in K$ tal que $\sum_I a_I e_I^* = 0$, então

$$\sum_I a_I e_I^*(e_J) = a_J = 0 \quad \Rightarrow \quad a_J = 0 \quad \forall J.$$

2. O conjunto $\{e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^* \mid 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_p \leq k\}$ gera $\mathcal{T}^p(V)$.

Sejam $w_i = \sum_{l_i} w_{i,l_i}^i e_{l_i}$, $i = 1 \dots, k$ vetores em V e $T \in \mathcal{T}^p(V)$, então

$$\begin{aligned} T(w_1, \dots, w_p) &= \sum_{l_1} \dots \sum_{l_p} T(e_{l_1}, \dots, e_{l_p}) w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} = \\ &= \sum_{l_1} \dots \sum_{l_p} T(e_{l_1}, \dots, e_{l_p}) e_{l_1}^*(w_1) \dots e_{l_p}^*(w_p) = \\ &= \sum_{l_1} \dots \sum_{l_p} T_{l_1 l_2 \dots l_p} (e_{l_1}^* \otimes \dots \otimes e_{l_p}^*)(w_1, \dots, w_p) \end{aligned}$$

da onde concluímos que

$$T = \sum_{l_1} \dots \sum_{l_p} T_{l_1 l_2 \dots l_p} e_{l_1}^* \otimes \dots \otimes e_{l_p}^*.$$

Segue dos itens acima que dois tensores T e S são iguais ($T = S$) $\leftrightarrow T(e_I) = S(e_I)$ para toda sequência de índices I . Portanto, $\{e_I^*\}$ gera $\mathcal{T}^p(V)$. □

Vamos considerar o espaço vetorial

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{T}^p(V)$$

De fato, observe que $\mathcal{T}(V) = \mathcal{T}(V^*)$

Definição 2.5.3.4. Um p -tensor é Alternado se

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$$

Por convenção, os 1-tensores são considerados alternados.

Exemplo: O determinante de uma matriz $p \times p$ é um p -tensor alternado.

Seja S_p o grupo das permutações dos números de 1 a p . Dada uma permutação $\pi \in S_p$, esta será **par** ou **ímpar**, dependendo se o número de transposições de índices for par ou ímpar. Sendo assim, $(-1)^\pi$ será igual à $+1$ ou -1 dependendo se π for par ou ímpar, respectivamente.

Existe uma ação do grupo das permutações S_p sobre $\mathcal{T}^p(V)$

$$\begin{aligned} S_p \times \mathcal{T}^p(V) &\rightarrow \mathcal{T}^p(V) \\ (\pi, T) &\rightarrow T^\pi \end{aligned}$$

onde

$$T^\pi(v_1, v_2, \dots, v_p) = T(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(p)})$$

Decorre da expressão acima que $(T^\pi)^\sigma = T^{\sigma \circ \pi}$.

Assim, um p -tensor é alternado se para toda permutação $\pi \in S_p$, temos que

$$T^\pi = (-1)^\pi T$$

Agora, vamos passar a construção de tensores alternados.

Definição 2.5.3.5. O Operador Alternado é o operador linear $Alt : \mathcal{T}^p(V) \rightarrow \mathcal{T}^p(V)$ obtido ao estendermos linearmente a expressão

$$Alt(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi T^\pi$$

Seja $\Lambda^p(V) = \{T \in \mathcal{T}^p(V) \mid T^\pi = (-1)^\pi T, \quad \forall \pi \in S_p\} \in \mathcal{T}^p(V)$ o subespaço vetorial dos p -tensores alternados.

Proposição 2.5.3.6. O operador $Alt : \mathcal{T}^p(V) \rightarrow \mathcal{T}^p(V)$ é uma projeção sobre o subespaço vetorial $\Lambda^p(V)$, para todo p .

Demonstração. Vamos verificar que para todo $\sigma \in S_p$ e $T \in \mathcal{T}^p(V)$ temos que $[Alt(T)]^\sigma = (-1)^\sigma Alt(T)$.

$$\begin{aligned} [Alt(T)]^\sigma &= \left[\frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi T^\pi \right]^\sigma = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi [T^\pi]^\sigma = \\ &= \frac{1}{p!} (-1)^\sigma \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi (-1)^\pi T^{\sigma \circ \pi} = \frac{1}{p!} (-1)^\sigma \sum_{\pi \in S_p} (-1)^{\sigma \circ \pi} T^{\sigma \circ \pi} = \\ &= \frac{1}{p!} (-1)^\sigma \sum_{\pi \in S_p} (-1)^{\sigma \circ \pi} T^{\sigma \circ \pi} = \end{aligned}$$

Uma vez que S_p é um grupo, para todo $\tau \in S_p$ existe $\pi \in S_p$ tal que $\tau = \sigma \circ \pi$, ou seja, a expressão acima pode ser escrita como

$$= \frac{1}{p!} (-1)^\sigma \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\tau T^\tau = (-1)^\sigma Alt(T)$$

Portanto, $Alt : \mathcal{T}^p(V) \rightarrow \Lambda^p(V)$. Para mostrar que, de fato, Alt é uma projeção, vamos verificar que $Alt \circ Alt = id_{\Lambda^p(V)}$. Para isto, suponha que T é um p -tensor alternado; $T^\pi = (-1)^\pi T$, então

$$Alt(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi T^\pi = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi (-1)^\pi T =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} T = T$$

Isto implica que $\text{Alt} |_{\Lambda^p(V)} = \text{id}_{\Lambda^p(V)}$

□

O próximo passo será definir uma estrutura de álgebra sobre o espaço dos tensores alternados.

Definição 2.5.3.7. *Dados os tensores $T \in \mathcal{T}^p(V)$ e $S \in \mathcal{T}^q(V)$, o produto exterior de T com S é dado por*

$$T \wedge S = \text{Alt}(T \otimes S) \in \mathcal{T}^{(p+q)}(V)$$

O produto exterior goza das propriedades básicas que o tornam um produto (não comutativo);

1. (associatividade) Para todo $T \in \mathcal{T}^p(V)$, $S \in \mathcal{T}^q(V)$ e $R \in \mathcal{T}^t(V)$

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R)$$

2. (unidade) Seja $k \in K$, para todo $T \in \mathcal{T}^p(V)$

$$k \wedge T = T \wedge k = kT$$

em particular $1 \in K$ é o elemento neutro do produto exterior.

3. (distributividade) Para todo $T \in \mathcal{T}^p(V)$, $S \in \mathcal{T}^q(V)$ e $R \in \mathcal{T}^t(V)$

$$T \wedge (S + R) = T \wedge S + T \wedge R$$

Dentre as propriedades listadas acima, a que requer mais atenção é da associatividade uma vez que a sua demonstração não é direta. Para demonstrá-la precisamos do seguinte lema;

Lema 2.5.3.8. *Se $\text{Alt}(T) = 0$, então $T \wedge S = S \wedge T = 0$, para todo tensor S .*

Demonstração. Se $T \in \mathcal{T}^p(V)$ e $S \in \mathcal{T}^q(V)$ então $T \otimes S \in \mathcal{T}^{(p+q)}(V)$. Seja G o subgrupo de $S_{(p+q)}$ formado pelas permutações que fixam os índices $p+1, \dots, p+q$; decorre que G é isomorfo a S_p . Assim se $\pi \in G$, então

$$\pi(1, \dots, p, p+1, \dots, p+q) = (\pi(1), \dots, \pi(p), p+1, \dots, p+q)$$

Portanto, para todo $\pi \in G$ temos que $(T \otimes S)^\pi = T^\pi \otimes S$ uma vez que

$$(T \otimes S)^\pi(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) = (-1)^\pi T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \cdot S(v_{p+1}, \dots, v_{p+q});$$

da onde,

$$\sum_{\pi \in G} (-1)^\pi (T \otimes S)^\pi = \left[\sum_{\pi \in G} (-1)^\pi T^\pi \right] \otimes S = \text{Alt}(T) \otimes S = 0$$

O subgrupo G decompõem S_{p+q} em uma união disjunta de classes laterais à esquerda, o que significa que existe um conjunto de elementos $\sigma_i \in S_{p+q}$, $1 \leq i \leq l$ tal que para todo $\tau \in S_{p+q}$ existe $\pi \in G$ tal que

$$\tau = \sigma_i \cdot G, \quad \text{para algum } i \in \{1, \dots, l\}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} T \wedge S &= \sum_{\tau \in S_{p+q}} (-1)^\tau (T \otimes S)^\tau = \sum_{i=1}^l \sum_{\pi \in G} (-1)^{\sigma_i \circ \pi} (T \otimes S)^{\sigma_i \circ \pi} = \\ &= \sum_{i=1}^l (-1)^{\sigma_i} \left[\sum_{\pi \in G} (-1)^\pi (T \otimes S)^\pi \right]^{\sigma_i} = \\ &= \sum_{i=1}^l (-1)^{\sigma_i} \left[\sum_{\pi \in G} (-1)^\pi T^\pi \right] \otimes S^{\sigma_i} = \sum_{i=1}^l (-1)^{\sigma_i} [\text{Alt}(T) \otimes S]^{\sigma_i} = 0 \end{aligned}$$

□

Proposição 2.5.3.9. *O produto exterior é associativo*

Demonstração. Pela linearidade do operador Alt

$$\begin{aligned} (T \wedge S) \wedge R - Alt(T \otimes S \otimes R) &= Alt[(T \wedge S) \otimes R] - Alt(T \otimes S \otimes R) = \\ &= Alt[(T \wedge S) \otimes R - T \otimes S \otimes R] = Alt[(T \wedge S - T \otimes S) \otimes R] \end{aligned}$$

No entanto,

$$Alt[T \wedge S - T \otimes S] = 0$$

Pelo lema, conclui-se que a expressão acima é nula da onde

$$(T \wedge S) \wedge R = Alt(T \otimes S \otimes R)$$

Analogamente,

$$T \wedge (S \wedge R) = Alt(T \otimes S \otimes R)$$

o que implica na associatividade. \square

O conjunto de todos os tensores alternados associados a um K -espaço vetorial V é o K -espaço vetorial

$$\Lambda(V) = \bigoplus_p \Lambda^p(V)$$

Devido as propriedades do produto exterior $(\Lambda(V), \wedge)$ é uma K -álgebra.

Proposição 2.5.3.10. *Sejam $\phi, \psi \in \Lambda^1(V)$, então;*

1. $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$;
2. $\phi \wedge \phi = 0$

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned} (\phi \wedge \psi)(v_1, v_2) &= Alt(\phi \otimes \psi)(v_1, v_2) = \phi \otimes \psi(v_1, v_2) - \phi \otimes \psi(v_2, v_1) = \\ &= \phi(v_1) \cdot \psi(v_2) - \phi(v_2) \cdot \psi(v_1). \end{aligned}$$

Portanto, ao trocarmos as posições de ϕ ψ obtemos o resultado. \square

Proposição 2.5.3.11. *Seja $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ uma base de V^* e $\mathcal{I}^p = \{I = (i_1, \dots, i_p) \mid 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq k\}$. Considere para cada $I = (i_1, \dots, i_p)$ o p -tensor alternado*

$$\phi_I = \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_p}$$

Então, o conjunto

$$\{\phi_I; I \in \mathcal{I}\}$$

é uma base para $\Lambda^p(V)$. A dimensão de $\Lambda^p(V)$ é .

Demonstração. Para mostrar que $\{\phi_I \mid I \in \mathcal{I}\}$ gera Λ^p basta lembrar que todo p -tensor T pode ser escrito de forma única como

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_p} T_{i_1 \dots i_p} \phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_p}$$

o que implica que

$$Alt(T) = \sum_{I \in \mathcal{I}^p} T_{i_1 \dots i_p} Alt(\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_p}) = \sum_{I \in \mathcal{I}^p} T_I \phi_I$$

A condição de ser linearmente independente é simples de ser verificada. Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ é uma base de V tal que $\phi_i(v_j) = \delta_{ij}$ e $v_J = (v_{j_1}, \dots, v_{j_p})$ então

$$\phi_J(v_J) = \delta_{IJ}$$

Portanto,

$$\sum_{I \in \mathcal{I}^p} T_I \phi_I = 0 \Rightarrow \sum_{I \in \mathcal{I}^p} T_I \phi_I(v_J) = T_J = 0$$

A dimensão é obtida através da contagem do conjunto $\{\phi_I \mid I \in \mathcal{I}^p\}$. Para isto, basta observar que $\phi \wedge \phi = 0$. \square

Problema 2.5.3.12. *Sejam $T \in \Lambda^p(V)$ e $S \in \Lambda^q(V)$, então*

$$T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T.$$

Desta forma, se V é um espaço vetorial de dimensão n , segue que $\Lambda(V) = \bigoplus_{n=0}^k \Lambda^n(V)$ é um espaço vetorial de dimensão 2^n . Ao munirmos $\Lambda(V)$ com o produto exterior \wedge ele torna-se uma álgebra na qual a relação $x^2 = 0$ é verificada para todo elemento $x \in V$. Considerando que V gera $\Lambda(V)$, a relação é universal.

A Álgebra Exterior $\Lambda(V)$ pode ser definida como uma álgebra fatorial. Para este fim, considere o ideal \mathcal{I} de $T(V)$ gerado pelos elementos da forma $\{v \otimes v \mid v \in V\}$. Pela definição, os elementos de V são de grau 1, ou seja, pertencem a $T^1(V) \Rightarrow \mathcal{I} \cap T^1 = 0$.

Dado o homomorfismo canônico $j : T(V) \rightarrow T(V)/\mathcal{I}$, a restrição de j a V é injetiva. Com isto podemos identificar V com sua imagem $j(V)$ e vê-lo como um subconjunto de $\Lambda(V) = T(V)/\mathcal{I}$. Como V gera a álgebra $T(V)$, V também gera a álgebra $\Lambda(V)$. Por construção, $j(v)^2 = 0$ para todo $v \in V$.

Podemos verificar que $\Lambda(V) = T(V)/\mathcal{I}$ é uma álgebra graduada. Com efeito, como \mathcal{I} é gerado por elementos homogêneos $v \otimes v$, \mathcal{I} é homogêneo no sentido que tomando $\mathcal{I}^i = \mathcal{I} \cap V^{(i)}$ $\mathcal{I} = \bigoplus_i \mathcal{I}^i$. Então $\Lambda(V)$ é graduada pelos subconjuntos $E^{(i)} = (V^{(i)} + \mathcal{I})/\mathcal{I}$, isto é

$$\Lambda(V) = \bigoplus_i E^{(i)}, \quad E^{(i)} \cdot E^{(j)} \subset E^{(i+j)}$$

Proposição 2.5.3.13. *(Propriedade Universal da Álgebra Exterior)*

Seja \mathcal{A} uma álgebra sobre um corpo K e $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ um homomorfismo tal que

$$f(v) \cdot f(v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Então existe um único homomorfismo $\phi : \Lambda(V) \rightarrow \mathcal{A}$ que estende f .

Demonstração. Pela propriedade Universal da Álgebra Tensorial existe um homomorfismo $f^* : T(V) \rightarrow \mathcal{A}$ definido por $f^*(v \otimes w) = f^*(v) \cdot f^*(w)$. Segue da propriedade de f que $f^*(v \otimes v) = 0, \forall v \in V$, o que implica em $\mathcal{I} \subset \text{Nucl}(f^*)$, consequentemente f^* induz um homomorfismo $f^* : T(V)/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$.

UNICIDADE □

Problema 2.5.3.14. *Álgebra de Clifford*

1. *Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} munido com uma forma bilinear não-degenerada $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, e seja $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ a forma quadrática associada. Considere a relação*

$$u \cdot v + v \cdot u = -2 \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in V$$

Mostre que com a relação acima obtemos uma álgebra $Cl(V, q)$ gerada por V .

2. *Suponha que $V = \mathbb{R}^n$ e a forma bilinear seja o produto interno euclídeo. Seja $Cl_n(\mathbb{R})$ a álgebra de Clifford gerada por \mathbb{R}^n . Mostre que $Cl_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$ e $Cl_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}$.*

2.6 Formas Diferenciais

Neste capítulo vamos definir formas diferenciais sobre \mathbb{R}^n e desenvolveremos as estruturas básicas para demonstrar o *Teorema de Stokes*. Além disto, vamos definir a Cohomologia de De Rham.

2.6.1 Definição

Definição 2.6.1.1. *O plano tangente à \mathbb{R}^n no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é o espaço*

$$T_x\mathbb{R}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n; \gamma(0) = x \text{ e } \gamma'(0) = v\}.$$

Proposição 2.6.1.2. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$, então;*

1. $T_x\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial.
2. $T_x\mathbb{R}^n \overset{iso}{\simeq} \mathbb{R}^n$.

Demonstração. 1. Suponha que $v, w \in T_x\mathbb{R}^3$ onde $v = \gamma'(0)$ e $w = \eta'(0)$. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, considere a curva $\eta = a.\gamma_1 + b.\gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$; então

$$a.v + b.w = \eta'(0) \rightarrow a.v + b.w \in T_x\mathbb{R}^3.$$

2. Vejamos que a base canonica $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de $T_x\mathbb{R}^n$. Considere, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, a curva $\gamma_i(t) = x + t.e_i$. Desta forma, segue que $e_i \in T_x\mathbb{R}^n$ e que β é uma base de $T_x\mathbb{R}^n$. □

Definição 2.6.1.3. 1. *Um referencial móvel sobre \mathbb{R}^n é uma aplicação C^∞ $e : \mathbb{R}^n \rightarrow Gl_n(\mathbb{R})$ definida por*

$$e(x) = \{e_1, \dots, e_n\}$$

onde para cada $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $e(x)$ é uma base de $T_x\mathbb{R}^n$.

2. *Um co-referencial móvel sobre \mathbb{R}^n é o dual do referencial;*

$$e^*(x) = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Decorre da proposição acima que a base canonica β de \mathbb{R}^n é um referencial móvel constante, e o seu dual é um co-referencial. Classicamente, adota-se a notação

$$dx_i = e_i^*.$$

Definição 2.6.1.4. 1. *Seja $\Omega^p(\mathbb{R}^n) = \cup_{x \in \mathbb{R}^n} \Lambda^p(T_x^*\mathbb{R}^n)$. Uma p -forma diferencial em \mathbb{R}^n é uma aplicação diferencial*

$$w : \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega^p(\mathbb{R}^n)$$

Uma p -forma diferenciável associa a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ um p -tensor alternado pertencendo a algebra exterior do espaço vetorial $T_x\mathbb{R}^n$.

Exemplos:

1. 0-forma - O espaço $\Omega^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
2. 1-forma - Se para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tivermos um funcional linear $w_x \in T_x^*\mathbb{R}^n$, variando diferenciavelmente com x , então w define uma 1-forma.
3. muitos exemplos de 1-forma podem ser produzidos a partir de 0-formas, uma vez que

$$f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n) \Rightarrow df_x \in T_x^*\mathbb{R}^n \Rightarrow df \in \Omega^1(\mathbb{R}^n).$$

Seja $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ e considere (x_1, \dots, x_n) as coordenadas de \mathbb{R}^n . Então,

$$df_x.u = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) (u).$$

Portanto,

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

De acordo com o capítulo anterior, se para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $e^*(x) = \{e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)\}$ é uma base de $T_x^*\mathbb{R}^n$, então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, temos que uma base de $\Lambda^p(T_x^*\mathcal{U})$ é dada por

$$\{e_I^* \mid I = (i_1, \dots, i_p)\}$$

Uma vez que em \mathbb{R}^n podemos considerar e_I^* como um co-referencial constante, uma p-forma pode ser descrita como

$$w = \sum_I w_I e_I^*, \quad w_I \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}).$$

Uma propriedade fundamental das formas é a condição de *naturalidade*, assim descrita: Toda aplicação $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ induz um homomorfismo $\phi^* : \Omega^p(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$[\phi^*w]_x(u_1, \dots, u_n) = w_{\phi(x)}(d\phi.u_1, \dots, d\phi.u_n)$$

Dizemos que a p-forma ϕ^*w é o *pull-back* de w por ϕ . Quando w é uma 0-forma, o pull-back de w por ϕ é a 0-forma $\phi^*w = w \circ \phi$

Problema 2.6.1.5. *Sejam ϕ e ψ aplicações diferenciáveis. Mostre que*

1. $\phi^*(w_1 + w_2) = \phi^*w_1 + \phi^*w_2$;
2. $\phi^*(w_1 \wedge w_2) = \phi^*w_1 \wedge \phi^*w_2$;
3. $\phi \circ \psi)^*w = \psi^*\phi^*w$

Exemplo:

Este exemplo é de particular importância para a compreensão e simplificação de alguns cálculos. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos descritos em coordenadas por $U = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ e $V = \{(y_1, \dots, y_m)\}$. Seja $\phi : U \rightarrow V$ uma aplicação C^∞ cujas coordenadas são $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$. Então,

$$\begin{aligned} \phi^* dy_\alpha &= d\phi_\alpha \\ (\phi^* dy_\alpha)(u) &= dy_\alpha(d\phi.u) = dy_\alpha\left(\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n u_i dy_\alpha\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n u_i dy_\alpha\left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_i} e_\beta\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^m u_i \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_i} dy_\alpha(e_\beta) = \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i} dx_i \right] (u) \end{aligned}$$

Segue a afirmação uma vez que a igualdade vale para todo $u \in T_x U$.

Problema 2.6.1.6. *Seja $\phi : U \rightarrow V$ um difeomorfismo de abertos de \mathbb{R}^n . Sejam (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_m) coordenadas em U e V respectivamente. Mostre que para todo $y = \phi(x)$ temos que*

$$[\phi^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m)]_x = \det[d\phi_x](dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)_x$$

Theorem 2.6.1.7. *(Teorema da Mudança de Variável) Sejam U, V abertos de \mathbb{R}^n e $\phi : U \rightarrow V$ um difeomorfismo que preserve a orientação. Se w é uma n-forma integrável em V , então*

$$\int_{\phi(U)} w = \int_U \phi^*w$$

Demonstração. Exercício □

Exemplo: Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $w = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Suponha que $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\phi(u, v) = (u, v, g(u, v)),$$

onde $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, é a parametrização de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$. Vamos calcular

$$\int_S w$$

Pelo Teorema de mudança de variável, temos que

$$\int_S w = \int_U \phi^* w,$$

de forma que o cálculo a ser efetuado é para determinar o lado direita da igualdade acima;

$$\phi^* w = \sum_{\{ijk\}} (f_i \circ \phi) \phi^*(dx_j \wedge dx_k) = \sum_{\{ijk\}} (f_i \circ \phi) (\phi^* dx_j) \wedge (\phi^* dx_k)$$

No entanto,

$$\phi^*(dx_1) = d\phi_1 = du$$

$$\phi^*(dx_2) = d\phi_2 = dv$$

$$\phi^*(dx_3) = dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv$$

da onde temos que

$$\phi^*(dx_1 \wedge dx_2) = du \wedge dv$$

$$\phi^*(dx_3 \wedge dx_1) = -\frac{\partial g}{\partial u} du \wedge dv$$

$$\phi^*(dx_2 \wedge dx_3) = -\frac{\partial g}{\partial v} du \wedge dv$$

Substituindo na expressão,

$$\begin{aligned} \phi^* w &= [-f_1 \frac{\partial g}{\partial u} - f_2 \frac{\partial g}{\partial v} + f_3] du \wedge dv = \\ &= \langle (f_1, f_2, f_3), (-\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{\partial g}{\partial v}, 1) \rangle du \wedge dv \end{aligned}$$

integrando obtemos

$$\begin{aligned} \int_U \phi^* w &= \int_U \langle (f_1, f_2, f_3), (-\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{\partial g}{\partial v}, 1) \rangle dudv = \\ &= \int_U \langle F, N \rangle dudv = \int_U \langle F, n \rangle dA, \quad (dA = |N| dudv) \end{aligned}$$

Portanto, a integração de uma 2-formas sobre uma superfície S é, como era de se esperar, a integral de superfície sobre S do campo definido pelos coeficientes da 2-forma.

Problema 2.6.1.8. Calcule

$$\int_S w,$$

onde w é a 2-formas do exemplo acima e S é parametrizada por $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v))$$

2.6.2 Derivada Exterior

Definição 2.6.2.1. Para cada $p \in \{1, \dots, n\}$, o operador derivada exterior é o operador $d_p : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$ definido como segue;

1. Se $p = 0$ e $w \in \Omega^0(U)$,

$$d_0 w = dw = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dx_i$$

2. Se $p > 0$ e $w = \sum_I w_I dx_I \in \Omega^p(U)$, onde $w_I \in \Omega^0(U)$, então

$$d_p w = \sum_I dw_I \wedge dx_I$$

Exemplos:

1. $U \subset \mathbb{R}^2$, $w = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \in \Omega^1(U)$ e $F = (f_1, f_2)$

$$\begin{aligned} dw &= df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 = \\ &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 = \text{rot}(F) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

2. $U \subset \mathbb{R}^3$, $w = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 \in \Omega^1(U)$ e $F = (f_1, f_2, f_3)$.

$$\begin{aligned} dw &= \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_1 + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_2 + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_3}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_3 = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 = \\ &= \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] dx_1 \wedge dx_2 + \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right] dx_1 \wedge dx_3 + \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right] dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Portanto, $dw = 0 \Leftrightarrow \text{rot}(F) = 0$

3. $U \subset \mathbb{R}^3$, $w = f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3$ e $F = (f_{12}, -f_{13}, f_{23})$

$$dw = \left[\frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \left(-\frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right] = \text{div}(F) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Portanto, $dw = 0 \Leftrightarrow \text{div}(F) = 0$.

Theorem 2.6.2.2. Para todo $p \in \{1, \dots, n\}$, operador derivada exterior $d_p : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$ satisfaz as seguintes propriedades;

1. (linearidade)

$$d_p(w_1 + w_2) = d_p w_1 + d_p w_2;$$

2. (lei da multiplicação) Se $w \in \Omega^p(U)$, então

$$d_p(w \wedge \theta) = d_p w \wedge \theta + (-1)^p w \wedge d\theta$$

3. (condição de cociclo)

$$d_{p+1} \circ d_p = 0$$

Além disto, a família de operadores

$$\{d_p : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1} \mid 1 \leq p \leq n\}$$

é a única família de operadores que satisfaz as propriedades acima e $d_0 = d$ (a derivada exterior sobre 0-formas coincide com a derivada usual sobre funções).

Demonstração. A verificação das propriedades acima é direta. Para verificar a unicidade suponha que existe uma família de operadores

$$\{D_p : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)\}$$

tal que $D_0 = d$. Então, $D(dx_I) = 0$ uma vez que

$$D(dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge D(dx_{i_n}) = \sum_j (-1)^{i_j-1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge D(dx_{i_j}) \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

e $D(dx_{i_j}) = D(dx_{i_j}) = 0$.

Desta maneira, se $w = \sum_I a_I dx_I$, então

$$Dw = \sum_I [D(a_I) \wedge dx_I + a_I D(dx_I)] = \sum_I d(a_I) \wedge dx_I = dw.$$

□

Corolário 2.6.2.3. Seja $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo. Então, para toda forma $w \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ segue que

$$d_p(\phi^* w) = \phi^* d_p w$$

Demonstração. Basta verificar que o operador $D = (\phi^{-1})^* \circ d \circ \phi^*$ satisfaz as propriedades do teorema acima e $Dw = dw$ para 0-formas. Se $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$, então $\phi^* f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$, $d(\phi^* f) \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$(\phi^{-1})^* d\phi^* f \in \Omega^1(\mathbb{R}^n), \quad e$$

$$Df = (\phi^{-1})^* d(f \circ \phi) = d(f \circ \phi).d(\phi^{-1}) = df$$

Segue da unicidade que $D_p = d_p$ □

2.6.3 Cohomologia de De Rham

Pelo que foi vimos, a derivada exterior define a sequência

$$\Omega^0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d_1} \dots \Omega^p(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d_p} \Omega^{p+1}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d_{p+1}} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(\mathbb{R}^n)$$

onde $d_{p+1} \circ d_p = 0$ (neste caso, dizemos que a sequência acima é um *complexo*). Portanto, para todo $p \in \{1, \dots, n\}$ temos que

$$\text{Img}(d_p) \subset \text{Nucl}(d_{p+1})$$

Definição 2.6.3.1. 1. $w \in \Omega^p(U)$ é uma forma fechada se $d_p w = 0$ ($\Rightarrow w \in H_{DR}^p(U)$) e

$$Z^p(\mathbb{R}^n) = \{w \in \Omega^p(\mathbb{R}^n) \mid dw = 0\}.$$

2. $w \in \Omega^p(U)$ é uma forma exata se existe $\eta \in \Omega^{p-1}(U)$ tal que $w = d_{p-1}\eta$, e

$$B^p(\mathbb{R}^n) = \{w \in \Omega^p(\mathbb{R}^n) \mid w \text{ é exata}\}.$$

Considere a seguinte relação de equivalência em $Z^p(\mathbb{R}^n)$:

$$w \sim w' \Leftrightarrow w' - w \in B^p(\mathbb{R}^n); \quad [w] = w + d_{p-1}\Omega^{p-1}$$

Se $w' \sim w$ dizemos que w' e w são cohomólogas.

Definição 2.6.3.2. O p -ésimo grupo de Cohomologia de De Rham do \mathbb{R}^n é o espaço vetorial (quociente)

$$H_{DR}^p(U) = \frac{\text{Nucl}(d_p)}{\text{Img}(d_{p-1})} = Z^p(\mathbb{R}^n)/B^p(\mathbb{R}^n).$$

Por convenção, $H_{DR}^p(U) = 0$ se $p < 0$. Como havíamos visto antes, $H_{DR}^0(U) = \text{Nucl}(d) = \{f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \mid df = 0\}$.

Embora os espaços $\Omega^p(U)$ sempre tenham dimensão finita, os espaços vetoriais $H_{DR}^p(U)$ tem dimensão finita.

Problema 2.6.3.3. Se U possui k componentes conexas $\Leftrightarrow H_{DR}^0(U) \simeq \mathbb{R}^k$.

Proposição 2.6.3.4. O espaço vetorial

$$H_{DR}^*(U) = \bigoplus_{i=0}^n H_{DR}^i(U)$$

é uma álgebra quando munido com a multiplicação

$$\cdot : H_{DR}^p(U) \times H_{DR}^q(U) \rightarrow H_{DR}^{p+q}(U)$$

$$([w_1], [w_2]) \rightarrow [w_1] \cdot [w_2] = [w_1 \wedge w_2]$$

Demonstração. Uma vez que, sendo w_1 e w_2 formas fechadas, a forma $w_1 \wedge w_2$ também é fechada, pois,

$$d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^{|w_1|} w_1 \wedge dw_2.$$

Assim, é suficiente mostrar que o produto esta bem definido, uma vez que a propriedade de associatividade é herdada do produto exterior. Suponha que $[w_1] = [w_1']$ e $[w_2] = [w_2']$, para mostrar que o produto está bem definido é preciso verificar que

$$[w_1] \cdot [w_2] = [w_1'] \cdot [w_2']$$

ou seja

$$[w_1 \wedge w_2] = [w_1^i \wedge w_2^j]$$

Fazendo $w_1^i = w_1 + d\eta_1$ e $w_2^j = w_2 + d\eta_2$, temos que

$$\begin{aligned} w_1^i \wedge w_2^j &= (w_1 + d\eta_1) \wedge (w_2 + d\eta_2) = \\ &= w_1 \wedge w_2 + w_1 \wedge d\eta_2 + d\eta_1 \wedge w_2 + d\eta_1 \wedge d\eta_2 = \\ &= w_1 \wedge w_2 + d[\eta_1 \wedge w_2 + (-1)^p w_1 \wedge \eta_2 + \eta_1 \wedge \eta_2] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [w_1] \cdot [w_2] = [w_1^i] \cdot [w_2^j]$$

□

Uma vez que $\phi^* d = d\phi^*$, uma aplicação diferenciável $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ induz um homomorfismo $\phi^* : H_{DR}^p(\mathbb{R}^m) \rightarrow H_{DR}^p(\mathbb{R}^n)$, pois, uma p -forma w é fechada (exata) em $\Omega^p(\mathbb{R}^m)$ então ela é fechada (exata) em $\Omega^p(\mathbb{R}^n)$. Vale a lei da composição, ou seja, o diagrama

$$U \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} W$$

induz o diagrama

$$H_{DR}^p(W) \xrightarrow{\psi^*} H_{DR}^p(V) \xrightarrow{\phi^*} H_{DR}^p(U)$$

de forma que $(\psi \circ \phi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.

Lema 2.6.3.5. (Lema de Poincaré)

Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma região estrelada de \mathbb{R}^n , então $H_{DR}^p(U) = 0$ para $p > 0$ e $H_{DR}^0(U) \simeq \mathbb{R}$

Demonstração. A idéia da demonstração é construir um operador $S_p : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p-1}(U)$ tal que

$$d_{p-1}S_p + S_{p+1}d_p = id_{\Omega^p} \quad \text{quando } p > 0$$

e

$$S_1d = id - e, \quad e(w) = w(0) \quad \text{se } p = 0$$

A existência deste operador implica imediatamente no Lema, pois, se w é uma forma fechada, então

$$w = d_{p-1}S_p w, \quad \text{se } p > 0$$

$$w = w(0), \quad \text{se } p = 0$$

1. Primeiramente, vamos construir o homomorfismo $\widehat{S}_p : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{p-1}(U)$. Toda forma $w \in \Omega^p(U \times \mathbb{R})$ pode ser escrita na forma

$$w = \sum_I f_I(x, t) dx_I + \sum_J g_J(x, t) dt \wedge dx_J$$

onde $I = (i_1, \dots, i_p)$ e $J = (j_1, \dots, j_{p-1})$ são multi-índices. Defina

$$\widehat{S}_p(w) = \sum_J \left[\int_0^1 g_J(x, t) dt \right] dx_J$$

Decorre de

$$dw = \sum_J \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I + \sum_I \frac{\partial f_I}{\partial t} dt \wedge dx_I + \sum_J \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_J$$

que

$$\begin{aligned} d\widehat{S}_p(w) + \widehat{S}_{p+1}dw &= \sum_{J,i} \left[\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dt \right] dx_i \wedge dx_J + \sum_I \left[\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t} dt \right] dx_I - \sum_{J,i} \left[\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dt \right] dx_i \wedge dx_J = \\ &= \sum_I \left[\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t} dt \right] dx_I = \sum_I [f_I(x, 1) - f_I(x, 0)] dx_I. \end{aligned}$$

2. Agora, seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, mais precisamente,

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 1, & t \geq 1; \\ 0 \leq \psi(t) \leq 1, & t \in (0, 1) \end{cases}$$

e $\phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ a aplicação $\phi(x, t) = \psi(t)x$. Defina $S_p(w) = \widehat{S}^p(\psi^*w)$. Seja $w = \sum_I h_I(x)dx_I$, desde que

$$\phi^*(dx_i) = x_i\psi'(t)dt + \psi(t)dx_i$$

temos que

$$\phi^*(w) = \sum_I h_I(\psi(t)x) (d\psi(t)x_{i_1} + \psi(t)dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (d\psi(t)x_{i_p} + \psi(t)dx_{i_p})$$

Na notação utilizada, a expressão acima implica que o primeiro termo, independente de dt , é dado por

$$\sum_I h_I(\psi(t)x)\psi(t)^p dx_I$$

o que implica em

$$dS_p(w) + S_{p+1}dw = \begin{cases} \sum_I h_I(x)dx_I = w, & p > 0; \\ w(x) - w(0), & p = 0 \end{cases}$$

□

O lema de Poincaré implica que os espaços \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) tem cohomologia de De Rham trivial ($H_{DR}^p = 0, p \neq 0$). Veremos que é possível definir a Cohomologia de De Rham para espaços mais gerais do que $\mathbb{R}^n, n \geq 1$.

2.6.4 Teorema de Stokes

Finalmente, chegamos ao ponto prometido de mostrar que os teorema clássicos de integração são na realidade casos particulares de um teorema geral conhecido por *Teorema de Stokes*.

Para demonstrar o Teorema de Stokes são necessários alguns conceitos elementares que de certa forma manifestam o resultado do Teorema de De Rham.

Para efeito da exposição, considere o n-cubo em \mathbb{R}^n como sendo

$$I_n = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] = [0, 1]^n$$

Definição 2.6.4.1. Um n-cubo singular em $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma função continua $c : [0, 1]^n \rightarrow U$. Por convenção, $[0, 1]^0 = \{0\} = \mathbb{R}^0$.

Exemplos:

1. $c : [0, 1]^0 \rightarrow U$ corresponde ao ponto $c(0) \in U$;
2. $c : [0, 1]^1 \rightarrow U$ corresponde a uma curva em U ;
3. O n-cubo I_n é um n-cubo singular definido por $I_n : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n, I_n(x) = x$

Seja $\mathcal{C}_n(U)$ o grupo livre gerado pelos n-cubos singulares, de tal forma que cada elemento do grupo é escrito como combinação linear de um número finito de n-cubos singulares. Assim, todo $c \in \mathcal{C}_n(U)$ é da forma

$$c = \sum_{i=1}^k a_i c_i, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad c_i : I_n \rightarrow U \quad \text{n-cubo singular}$$

Os elementos de $\mathcal{C}_n(U)$ são denominados de *n-cadeias*.

Para cada n-cubo I_n , e para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, nos definimos 2 (n-1)-cubos singulares como segue; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$I_n^{(i,0)}(x) = I_n(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

$$I_n^{(i,1)}(x) = I_n(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1})$$

O $(n-1)$ -cubo $I_n^{(i,0)}$ é chamado de face $(i, 0)$ de I_n e $I_n^{(i,1)}$ de face $(i, 1)$ de I_n .

Exemplos:

1. $n=2$;
 $I_2^{(1,0)}(x) = I_2(0, x_1)$ e $I_2^{(1,1)}(x) = I_2(1, x_1)$
 $I_2^{(2,0)}(x) = I_2(x_1, 0)$ e $I_2^{(2,1)}(x) = I_2(x_1, 1)$
2. $n=3$;
 $I_3^{(1,0)}(x) = I_3(0, x_1, x_2)$ e $I_3^{(1,1)}(x) = I_3(1, x_1, x_2)$
 $I_3^{(2,0)}(x) = I_3(x_1, 0, x_2)$ e $I_3^{(2,1)}(x) = I_3(x_1, 1, x_2)$
 $I_3^{(3,0)}(x) = I_3(x_1, x_2, 0)$ e $I_3^{(3,1)}(x) = I_3(x_1, x_2, 1)$.

Definição 2.6.4.2. Seja $c : I_n \rightarrow U$ um n -cubo singular; para cada $\alpha \in \{0, 1\}$

1. A face (i, α) de C é

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I_n^{(i,\alpha)}$$

2. O bordo de um n -cubo singular é

$$\partial c = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$

3. o bordo de uma n -cadeia $c = \sum_{i=1}^k n_i c_i$ é

$$\partial c = \sum_{i=1}^k n_i \partial c_i$$

Exemplos:

1. $n=1$;
2. $n=2$;
3. $n=3$;

Lema 2.6.4.3. O bordo define um homomorfismo $\partial_n : \mathcal{C}_n(U) \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(U)$ tal que

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \quad (\partial^2 = 0)$$

DEFINIR CADEIAS CICLOS E BORDOS + HOMOLOGIA SINGULAR.

Os operadores d e ∂ gozam de propriedades similares ($d^2 = 0$ e $\partial^2 = 0$) sugerindo alguma realação entre cadeias e formas. Esta relação é estabelecida ao integrar formas sobre cadeias. por isto, estaremos considerando apenas n -cubos singulares *diferenciáveis*.

Se w é uma k -forma definida sobre I_k , então podemos escrevê-la como $w = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Defina

$$\int_{I_k} w = \int_{I_k} f$$

ou equivalentemente,

$$\int_{I_k} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_{I_k} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

Se w é uma k -forma em U e c é um k -cubo singular em U , nós definimos

$$\int_c w = \int_{I_k} c^* w$$

ou seja

$$\int_c f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_{I_k} (c^*) (f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = \int_{I_k} (f \circ c) dx_1 \dots dx_k.$$

O caso $k=0$ precisa ser tratado separadamente. Uma 0-forma w é uma função, se $c : \{0\} \rightarrow U$ é um 0-cubo singular em U nós definimos

$$\int_c w = w(0)$$

A integral de w sobre uma k -cadeia $c = \sum_{i=1}^l n_i c_i$ é definida por

$$\int_c w = \sum_{i=1}^l a_i \int_{c_i} w$$

Classicamente, a integral de uma 1-forma sobre uma 1-cadeia é denominada *integral de linha*, enquanto a integração de uma 2-formas sobre uma 2-cadeia é uma *integral de suoperfície*.

Theorem 2.6.4.4. (*Teorema de Stokes*)

Se w é uma $(k-1)$ -cadeia sobre um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e c é uma k -cadeia em U , então

$$\int_c dw = \int_{\partial c} w$$

Demonstração. Primeiramente, suponha que $c = I_k$ e w é uma $(k-1)$ -forma sobre I_k . Então, w pode ser escrita como

$$w = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge dx_k$$

observamos que

$$(I_k^{(j,\alpha)}) dx_i = \begin{cases} 0, & i = j; \\ dx_j, & i \neq j. \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_{I_{k-1}} (I_k^{(j,\alpha)})^* (f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge dx_k) = \begin{cases} 0, & i = j; \\ \int_{I_k} f_i(x_1, \dots, \alpha, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k, & i \neq j \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \int_{\partial I_k} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge dx_k &= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 \int_{I_{k-1}} (I_k^{(j,\alpha)})^* (f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge dx_k) = \\ &= \sum_{j=1}^k [(-1)^{j+1} \int_{I_k} f_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k + (-1)^j \int_{I_k} f_i(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k] \end{aligned}$$

O cálculo do outro lado da expressão nos dá

$$\begin{aligned} \int_{I_k} d(f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge dx_k) &= \int_{I_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge dx_k = \\ &= (-1)^{i-1} \int_{I_k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini e o Teorema Fundamental do Cálculo, nós temos

$$\begin{aligned} \int_{I_k} d(f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge d\hat{x}_i \wedge \cdots \wedge dx_k) &= (-1)^{i-1} \int_{I_{k-1}} \left[\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right] dx_1 \dots d\hat{x}_i \dots dx_k = \\ &= (-1)^{i-1} \int_{I_{k-1}} [f(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, 0, \dots, x_k)] dx_1 \dots d\hat{x}_i \dots dx_k = \\ &= (-1)^{i-1} \int_{I_k} f(x_1, \dots, 1, \dots, x_k) + (-1)^i \int_{I_k} f(x_1, \dots, 0, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k \end{aligned}$$

Comparando as expressões () e () concluímos que

$$\int_{\partial I_k} w = \int_{I_k} dw$$

Se c é um cubo singular qualquer, segue das propriedades vistas dos operadores \int e d que

$$\int_c dw = \int_{I_k} c^*(dw) = \int_{I_k} d(c^*w) = \int_{\partial I_k} c^*w = \int_{\partial c} w$$

Finalmente, se c é uma k -cadeia singular $c = \sum_{i=1}^l a_i c_i$, então

$$\int_c dw = \sum_{i=1}^l a_i \int_{c_i} dw = \sum_{i=1}^l a_i \int_{\partial c_i} w = \int_{\partial c} w$$

□

Capítulo 3

Variedades Diferenciáveis

3.0.5 Definição

Vamos considerar o \mathbb{R}^n munido com a topologia induzida pela função distância.

Definição 3.0.5.1. *Um espaço topológico X é uma Variedade Topológica de dimensão n se para todo ponto $p \in X$ existem vizinhanças abertas $\widehat{U}_\alpha \subset X$ e $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e um homomorfismo $\phi_\alpha : \widehat{U}_\alpha \rightarrow U_\alpha$, onde $p \in \widehat{U}_\alpha$.*

Observação 3.0.5.2. *No caso em que $\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta \neq \emptyset$, então a aplicação*

$$\phi_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta)$$

é um homomorfismo local do \mathbb{R}^n . A aplicação $\phi_{\beta\alpha}$ é denominada mudança de coordenada de X .

Embora as variedades topológicas existam, elas não são espaços onde se possam construir os operadores d e \int do cálculo.

Ao par $(\widehat{U}_\alpha, \phi_\alpha)$, obtido na definição acima, denominamos de *carta local* de X . Um *atlas* de X é um conjunto \mathfrak{A} formado por cartas locais que cobrem X , ou seja,

$$\mathfrak{A} = \{(\widehat{U}_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda, X \subset \cup_\alpha \widehat{U}_\alpha\},$$

onde Λ é um conjunto indexador. Dizemos que o atlas \mathfrak{A} é *maximal* se para todo par de cartas locais $(\widehat{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ e $(\widehat{U}_\beta, \phi_\beta)$ tais que

1. $(\widehat{U}_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathfrak{A}$
2. $\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta \neq \emptyset$ e
3. $\phi_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta)$ é um homeomorfismo

temos que $(\widehat{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ e $(\widehat{U}_\beta, \phi_\beta)$ estão contidos em \mathfrak{A} .

Um atlas \mathfrak{A} no qual as mudanças de coordenadas são homeomorfismos são denominados de *estrutura topológica* de X .

Definição 3.0.5.3. *Um variedade topológica X é uma variedade diferenciável se admite um atlas \mathfrak{A} cujas mudanças de coordenadas são difeomorfismos. Neste caso, dizemos que \mathfrak{A} é uma estrutura diferencial sobre X .*

Observação 3.0.5.4. *Seja $[X]$ = classe de variedades homeomorfas a X . De acordo com a definição, uma variedade X é diferenciável se existir $M \in [X]$ que admita uma estrutura diferenciável. Existem exemplos de variedades com um número infinito de estruturas diferenciáveis não equivalentes.*

Exemplos:

1. Considere o espaço $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Usaremos projeção estereográfica para mostrar que S^1 é uma variedade diferenciável.

Seja $N=(0,1)$ o pólo norte, a reta definida pelos pontos N e $(u, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ é

$$r(t) = (0, 1) + t(u - 0, 0 - 1) = (tu, 1 - t)$$

A interseção com de $r(t)$ com S^1 é obtida quando

$$t^2 u^2 + (1 - t)^2 = 1$$

da onde obtemos a equação

$$t[t(u^2 + 1) - 2] = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{2}{u^2 + 1}$$

e

$$(x, y) = \left(\frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right)$$

é fácil verificar que

$$u = \frac{x}{1 - y}$$

Desta forma, vamos definir a carta (\widehat{U}_1, ϕ_1) por

$$\widehat{U}_1 = S^1 - \{N\} \quad \text{e} \quad \phi_1(x, y) = \frac{x}{1 - y}$$

Analogamente, utilizamos projeção estereográfica através do pólo sul $S = (0, -1)$ para definir a carta

$$\widehat{U}_2 = S^1 - \{S\} \quad \text{e} \quad \phi_1(x, y) = \frac{x}{1 + y}$$

Tanto ϕ_1 quanto ϕ_2 são homeomorfismos, vejamos para ϕ_2 ;

- (a) ϕ_2 é sobrejetora; desde que $y \neq -1$ temos que para um fixado $u \in \mathbb{R}$ $\phi_2(u(1 + y), y) = u$. Porém, é preciso que $(u(1 + y), y) \in \widehat{U}_2$, isto é,

$$u^2(1 + y)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow u^2 = \frac{1 - y}{1 + y} \Rightarrow y = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

Consequentemente,

$$\phi_2^{-1}(u) = \left(\frac{2u}{1 + u^2}, 1 - u^2 \right)$$

- (b) ϕ_2 é injetora;
Suponha que $\frac{x}{1 + y} = \frac{z}{1 + w}$ e $x^2 + y^2 = 1$, $z^2 + w^2 = 1$. Então,

$$x^2(1 + w)^2 = z^2(1 + y)^2 \Rightarrow x^2 + 2x^2w + x^2w^2 = z^2 + 2z^2y + z^2y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x^2w + x^2(1 - z^2) = z^2 + 2z^2y + z^2(1 - x^2) \Rightarrow 2x^2(1 + w) = 2z^2(1 + y)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + w}{1 + y} = \frac{z^2}{x^2}$$

Comparando com a equação $\frac{1 + w}{1 + y} = \frac{z}{x}$ concluímos que $z = x$ e $w = y$.

- (c) ϕ_2 é homomorfismo.

Bata ver que as expressões encontradas para ϕ_2 e ϕ_2^{-1} são contínuas.

Segue da construção que $S^1 = \widehat{U}_1 \cup \widehat{U}_2$ e $\widehat{U}_1 \cap \widehat{U}_2 = (S^1 - \{N\}) \cap (S^1 - \{S\})$. A mudança de coordenada neste caso é dada por

$$\phi_{21} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}, \quad \phi_{21}(u) = \frac{1}{u}$$

Consequentemente, $\mathfrak{A} = \{(\widehat{U}_1, \phi_1), (\widehat{U}_2, \phi_2)\}$ define uma estrutura diferenciável sobre S^1 .

2. Considere o espaço $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ Utilizando a mesma idéia da projeção estereográfica, sejam $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$ os pólos norte e sul da esfera e considere

$$\widehat{U}_1 = S^2 - \{N\}, \quad \phi : \widehat{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida por

$$\phi_1(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right)$$

e

$$\widehat{U}_2 = S^2 - \{S\}, \quad \phi : \widehat{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida por

$$\phi_2(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 + z}, \frac{y}{1 + z} \right)$$

Uma vez que $S^2 = \widehat{U}_1 \cup \widehat{U}_2$ e $\widehat{U}_{21} = (S^2 - \{N\}) \cap (S^2 - \{S\}) \neq \emptyset$, a mudança de coordenada $\phi_{21} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ definida por

$$\phi_{21}(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right)$$

implica que $\mathfrak{A} = \{(\widehat{U}_1, \phi_1), (\widehat{U}_2, \phi_2)\}$ define uma estrutura diferenciável sobre S^2 .

3. Considere o espaço $T^2 = S^1 \times S^1$.

Se considerarmos sobre T^2 a topologia produto e as cartas locais como cartas produto das cartas de S^1 , então segue que T^2 é uma variedade diferenciável cujo atlas é

$$\mathfrak{A} = \{(\widehat{U}_1 \times \widehat{U}_1, \phi_1 \times \phi_1), (\widehat{U}_1 \times \widehat{U}_2, \phi_1 \times \phi_2), (\widehat{U}_2 \times \widehat{U}_1, \phi_2 \times \phi_1), (\widehat{U}_2 \times \widehat{U}_2, \phi_2 \times \phi_2)\}$$

4. $\mathbb{R}P^n =$ Plano Projetivo Real

Considere em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ a seguinte relação de equivalência: sejam $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = tx$$

Defina $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} / \sim$. Assim, o plano projetivo corresponde ao espaço das retas em \mathbb{R}^{n+1} que passam pela origem.

3.0.6 Fibrados Tangente e Cotangente

No caso do \mathbb{R}^n , o plano tangente a um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$T_p \mathbb{R}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \gamma'(0), p = \gamma(0), \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n\}$$

onde a curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞ .

Problema 3.0.6.1. Mostre que para todo $p \in \mathbb{R}^n$ temos que $T_p \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ como espaço vetorial

Se $U \in \mathbb{R}^n$ é um aberto, então para todo $p \in U$ segue que $T_p U \simeq T_p \mathbb{R}^n$.

O conceito de espaço tangente é fundamental em *Topologia Diferencial*, uma vez que muitas das técnicas baseiam-se na utilização do operador derivação. Para definir o plano tangente de uma variedade num determinado ponto é necessário fixar uma carta local.

Seja X uma variedade diferenciável, \mathfrak{A} uma estrutura diferenciável sobre X e $x \in X$. Considere $(\widehat{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ uma carta $\in \mathfrak{A}$ tal que $x \in \widehat{U}_\alpha$. Seja $p = \phi_\alpha(x)$; neste caso, defina

$$T_x X = T_p U_\alpha$$

Considerando que x pode estar em contido em várias cartas é preciso nos certificar de que a definição esta consistente. Para isto, seja $(\widehat{U}_\beta, \phi_\beta) \in \mathfrak{A}$ uma outra carta tal que $x \in \widehat{U}_\beta$. Seja $q = \phi_\beta(x)$. De acordo com a definição, temos que

$$T_x = T_q U_\beta$$

Decorre da definição de estrutura diferenciável que

$$\phi_{\beta\alpha} : \phi_\alpha(\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta)$$

é um difeomorfismo. Uma vez que $q = \phi_\beta(p)$, segue que

$$d\phi_{\beta\alpha} : T_p U_\alpha \rightarrow T_q U_\beta$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais. Portanto, a definição do plano tangente $T_x X$ esta consistente *a menos de difeomorfismo* (este é ponto de vista em *Topologia Diferencial*).

Desta forma, seria mais conveniente, em termos formais, definir o plano tangente como o quociente de todos os planos obtidos através de cartas, mas tal definição tem pouco utilidade prática. Talvez a definição mais abstrata e útil seja a seguinte;

Problema 3.0.6.2. Seja $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ o espaço das funções diferenciáveis sobre \mathbb{R}^n e

$$\Gamma(\mathbb{R}^n) = \{D : C^\infty \rightarrow C^\infty \mid D \text{ é } \mathbb{R} - \text{linear}\}$$

o espaço dos operadores lineares definidos sobre $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Mostre que para todo $p \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$T_p \mathbb{R}^n \simeq \Gamma(\mathbb{R}^n)(p) = \{D_p\}$$

É claro, uma vez que sabemos como definir o plano tangente a X num ponto $x \in X$, então podemos definir o plano cotangente a $x \in X$ como sendo o plano *dual* T_x^*X . Para descrever o plano cotangente explicitamente, lembre que para todo $p \in \mathbb{R}^n$

$$T_p^*\mathbb{R}^n = \Lambda^1(T_p\mathbb{R}^n)$$

da onde concluímos que um elemento de $T_p^*\mathbb{R}^n$ corresponde a uma 1-forma avaliada em p . O mesmo pode ser dito para T_x^*X .

Definido o plano tangente, é natural colar esta informação no que denomina-se *Fibrado Tangente* de X .

Definição 3.0.6.3. *O Fibrado tangente de uma variedade diferenciável X é o espaço*

$$TX = \bigcup_{x \in X} T_x X = \{(x, v) \mid x \in X, v \in T_x X\}$$

munido da topologia que torna a projeção $\pi : TX \rightarrow X$, onde $\pi(x, v) = x$, uma função contínua. A imagem inversa $\pi^{-1}(x) = T_x X$ é denominada a fibra de TX .

Para melhor entender o fibrado tangente de uma variedade é preciso reconhecer que sua descrição é feita através das cartas é sempre local. Seja $\mathfrak{A} = \{(\tilde{U}_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ uma estrutura diferencial sobre X , se $x \in \tilde{U}_\alpha$ então

$$T_x X = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in T_{\phi_\alpha}(x)U_\alpha\} \simeq \mathbb{R}^n$$

implica que para todo $\alpha \in \Lambda$ existe um isomorfismo

$$v_\alpha : \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

3.0.7 Aplicações Diferenciáveis entre Variedades

Ao longo desta seção considere (M^m, \mathfrak{A}_M) e (N^n, \mathfrak{A}_N) variedades diferenciáveis.

Definição 3.0.7.1. *Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é diferenciável se para quaisquer cartas locais $(\tilde{U}, \phi) \in \mathfrak{A}_M$, $(\tilde{V}, \psi) \in \mathfrak{A}_N$, a aplicação $f_{VU} = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : U \rightarrow V$ for diferenciável, onde $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$.*

A aplicação $f_{VU} : U \rightarrow V$ é uma aplicação diferenciável entre espaços euclidianos e portanto poderá ser analisada com as técnicas usuais de cálculo. A derivada da aplicação f_{VU} no ponto $p \in U$ define uma transformação linear $df_{VU}(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se fixarmos as bases canônicas do \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , então teremos a aplicação $df_{VU} : U \rightarrow M(m, n)$, onde para cada ponto $p \in U$ df_{VU} será uma matriz $m \times n$.

A seguir, citaremos alguns resultados de Análise no \mathbb{R}^n que serão úteis para mostrarmos que determinados espaços são variedades diferenciáveis.

Theorem 3.0.7.2. *Sejam U, V abertos do \mathbb{R}^n e $f : U \rightarrow V$ uma função diferenciável. Se no ponto $p \in U$ temos que df_p é não singular, então existem vizinhanças $U' \subset U$ de p e $V' \subset V$ de $f(p)$ tais que $f : U' \rightarrow V'$ é um difeomorfismo.*

Definição 3.0.7.3. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $f : U \rightarrow V$ uma aplicação diferenciável tal que para todo ponto $p \in U$ a derivada df_p tem posto máximo;*

1. Se $m < n$, dizemos que f é uma imersão ($\text{posto}(df_p) = m$);
2. Se $m > n$, dizemos que f é uma submersão ($\text{posto}(df_p) = n$).

Theorem 3.0.7.4. *(Forma Local das Imersões)*

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $f : U \rightarrow V$ uma imersão ($m < n$). Então, existem abertos $U', W' \subset \mathbb{R}^m$ e uma função diferenciável $\Phi : W' \rightarrow U'$ tal que a composição $f \circ \Phi : W' \rightarrow V$ é dada por

$$f \circ \Phi(u_1, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_m, \phi_1(u_1, \dots, u_m), \dots, \phi_{n-m}(u_1, \dots, u_m)),$$

onde as funções $\phi_i : W' \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

Demonstração. Vamos considerar o caso particular onde $m = 2$ e $n = 3$. A generalização é simples e direta. Seja

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

então

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Como $\text{posto}(df_p) = 2$, podemos supor que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

é não singular. Assim, se definirmos a aplicação $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, concluímos que dg_p é não singular. Pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças $U' \subset U$ e V' de $f(p)$, tais que $g : U' \rightarrow V'$ é um difeomorfismo. Seja $\Phi = g^{-1} : V' \rightarrow U'$; denotando $u = f_1(x, y)$, $v = f_2(x, y)$ e $\phi_1(u, v) = f_3 \circ \Phi(u, v)$ concluímos que

$$f \circ \Phi : V' \rightarrow U' \quad f \circ \Phi(u, v) = (u, v, \phi_1(u, v))$$

□

Problema 3.0.7.5. *Demonstre a Forma Local das Imersões para n e m arbitrários.*

Decorre do Teorema da Forma Local das Imersões que toda Imersão é localmente o gráfico de uma aplicação, e por isto domínio e imagem (local) são difeomorfos.

Theorem 3.0.7.6. *(Forma Local das Submersões)*

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow V$ uma submersão ($m > n$). Então, existe uma vizinhança $U' (\subset U)$ de p , um aberto $W \subset \mathbb{R}^m$ e um difeomorfismo $\Phi : W \rightarrow U'$ tal que a composta $f \circ \Phi : W \rightarrow V$ é dada pela projeção

$$f \circ \Phi(u_1, \dots, u_n, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_n)$$

Demonstração. Vamos mostrar apenas para o caso quando $n=3$ e $m=2$. Seja

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$$

então

$$df_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Por hipótese temos que $\text{posto}(df_p) = 2$ para todo $p \in U$; por isto podemos assumir que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

é não singular

Defina a função $F : U \rightarrow V \times \mathbb{R}$ por

$$F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), z)$$

cujá derivada no ponto p é

$$dF_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(dF_p) \neq 0$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças $U' (\subset U)$ de p e $W (\subset V \times \mathbb{R})$ contendo $f(p)$, tais que $F : U' \rightarrow W$ é um difeomorfismo. Seja $\Phi = F^{-1} : W \rightarrow U'$, $u = f_1(x, y, z)$ e $v = f_2(x, y, z)$, assim

$$f \circ \Phi(u, v, z) = f(x, y, z) = (u, v)$$

□

Corolário 3.0.7.7. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, e $f : U \rightarrow V$ uma submersão, então para todo ponto $c \in V$ o conjunto $f^{-1}(c)$ é uma variedade diferenciável.*

Corolário 3.0.7.8. (Teorema da Função Implícita)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, e $f : U \rightarrow V$ uma aplicação tal que o determinante

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} \neq 0$$

então a equação

$$f(x_1, \dots, x_m) = c$$

admite solução. Além disto, existe uma vizinhanças $U' \subset \mathbb{R}^k$ sobre a qual estão definidas aplicações diferenciáveis

$$\phi_1, \dots, \phi_{m-k} : U' \rightarrow U$$

de forma que se $f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) = c$, então

$$x_{k+1} = \phi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, x_m = \phi_{m-k}(x_1, \dots, x_k)$$

Em geral, pode acontecer de a aplicação não ser uma submersão em todos os pontos, o que motiva a seguinte definição;

Definição 3.0.7.9. Seja $f : U \rightarrow V$ uma aplicação diferenciável. Um ponto $c \in V$ é valor regular de f se

$$f^{-1}(c) \cap \{x \in U \mid df_x \text{ não é sobrejetiva}\} = \emptyset$$

caso contrário dizemos que c é um valor singular de f .

Exemplos:

1. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
2. $O_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = I\}$
3. $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$
4. Sejam $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ funções diferenciáveis e suponha que $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ é um valor regular de f_i , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, então

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, f_k(x_1, \dots, x_n) = c_k\}$$

é uma variedade diferenciável de dimensão $(n - k)$.

3.0.8 Subvariedades Diferenciáveis

3.0.9 Variedades com Bordo

3.0.10 Teorema do Ponto Fixo de Browder

3.0.11 Orientação

Em \mathbb{R}^n :

Dizemos que as bases $\beta_\alpha = \{e_1^\alpha, \dots, e_n^\alpha\}$ e $\beta_\beta = \{e_1^\beta, \dots, e_n^\beta\}$ de \mathbb{R}^n são *equivalentes* se a mudança de base

$$T_{\beta\alpha} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad T_{\beta\alpha}(e_i^\beta) = \sum_{j=1}^n t_{ij}^\alpha e_j^\alpha$$

satisfaz a condição

$$\det(T_{\beta\alpha}) > 0$$

A relação

$$\beta_\alpha \sim \beta_\beta \Leftrightarrow \det(T_{\beta\alpha}) > 0$$

define uma relação de equivalência sobre o conjunto das bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ de \mathbb{R}^n . Ao fixarmos uma base de \mathbb{R}^n , por exemplo a base canônica $c = \{e_1, \dots, e_n\}$, observamos que o conjunto das classes possui 2 classes distintas. Assim, seja

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} = \frac{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}{\sim} = \{[1], [-1]\}$$

onde [1] corresponde as bases β_α tais que $\det(T_{\alpha c}) > 0$ e [-1] as bases tais que $\det(T_{\alpha c}) < 0$.

Uma *orientação* em \mathbb{R}^n consiste em fixar uma classe de $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$. Neste caso, uma orientação esta determinada ao fixarmos uma base para \mathbb{R}^n .

Em um aberto de \mathbb{R}^n :

Conforme vimos anteriormente, é possível fixar sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ um referencial movel

$$\beta = \{e_1, \dots, e_n\},$$

o que significa que para todo $p \in U$ o conjunto

$$\beta = \{e_1(p), \dots, e_n(p)\},$$

é uma base de $T_p U$. Neste caso, dizemos que o referencial é globalmente definido em U . Vamos assumir que, em todo ponto $p_0 \in U$, o conjunto $\beta = \{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ representa a classe [1] $\in \mathcal{O}_{T_p U}$. Uma orientação em U consiste em dar uma orientação para cada plano tangente $T_p U$. Sendo assim, uma orientação em U corresponde a fixar um referencial movel em U .

Sejam $U \in \mathbb{R}^n$ e $V \in \mathbb{R}^m$ abertos com orientações fixas. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow V$ preserva orientação se para todo ponto $p \in U$ temos que $\det(df_p) > 0$.

Em uma Variedade Diferenciável X:

Seja $\mathfrak{A}_X = \{(\widehat{U}_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ a estrutura diferenciável definida sobre X. Nem toda variedade diferenciável admite um referencial movel globalmente definido, por isto, temos que trabalhar localmente. Para cada $\alpha \in \Lambda$, defina um referencial movel $\beta_\alpha = \{e_1^\alpha, \dots, e_n^\alpha\}$ (equivalentemente, uma orientação).

Definição 3.0.11.1. *Uma orientação sobre X corresponde a munir cada aberto \widehat{U}_α com uma orientação de tal forma que sempre que $\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta \neq \emptyset$, a matriz da transformação de coordenadas*

$$d\phi_{\alpha\beta}(x) : T_{\phi_\alpha(x)}U_\alpha \rightarrow T_{\phi_\beta(x)}U_\beta$$

preserva a orientação.

Existem variedades que não admitem uma orientação, elas são denominadas variedades não orientáveis. Um exemplo clássico é a *Faixa de Moebius*, outros são o $\mathbb{R}P^{2n}$, \mathbb{K}^2 (Garrafa de Klein).

Problema 3.0.11.2. *O grupo fundamental de toda variedade não orientável possui um subgrupo normal isomorfo a \mathbb{Z}_2 .*

Digamos que os referenciais moveis β_α e β_β , definidos sobre \widehat{U}_α e \widehat{U}_β respectivamente, são compatíveis se $\det(d\phi_{\beta\alpha}(x)) > 0$ para todo $x \in \widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta$. Assim, orientar a variedade X corresponde a estender sobre X, de forma compatível, um referencial movel β_α definido sobre \widehat{U}_α .

Um outro ponto de vista sobre a definição de orientação pode ser dada através das formas diferenciais. Veja que fixar uma base para $T_p X$ corresponde a fixar uma base para $\Lambda^p(T_p X)$;

$$\beta_\alpha = \{e_1, \dots, e_n\} \leftrightarrow w_\beta = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

Uma vez que $\dim(\Lambda^n(T_p X)) = 1$, podemos definir a seguinte relação de equivalência entre seus elementos;

$$w' \sim w \Leftrightarrow \text{existe } \lambda > 0 \text{ tal que } w' = \lambda w$$

Portanto, ao fixarmos uma base β para $T_p X$, podemos dizer que w_β é uma base positiva para $\Lambda^p(T_p X)$. Agora, observamos que se $T\beta \cdot \beta$ é a matriz de mudança de base, então

$$w_{\beta'} = \det(T_{\beta', \beta}) w_\beta.$$

Consequentemente,

$$\beta' \sim \beta \Leftrightarrow w_{\beta'} \sim w_\beta$$

Portanto, uma orientação sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ corresponde a fixar uma n-forma globalmente definida, denominada *forma de volume*. O mesmo ocorre sobre uma variedade X.

Problema 3.0.11.3. *Mostre que;*

1. a *Faixa de Moebius* é não orientável;
2. S^n é orientável;
3. \mathbb{K} é não orientável
4. $\mathbb{R}P^{2n}$ é não orientável;
5. $\mathbb{R}P^{2n+1}$ é orientável;

3.1 Integração em Variedades

Sejam

$$\begin{aligned}\Omega^0(X) &= C^\infty(X, \mathbb{R}) \\ \Omega^p(X) &= \bigcup_{x \in X} \Lambda^p(T_x X)\end{aligned}$$

Definição 3.1.0.4. Uma p -forma sobre X é uma secção do fibrado vetorial $\Omega^p(X)$, isto é,

$$w : X \rightarrow \Omega^p(X),$$

onde para cada $x \in X$ temos que $w(x)$ é um tensor p -alternado definido sobre $T_x X$.

Conforme vimos anteriormente, se $\phi : V \rightarrow U$ é um difeomorfismo entre abertos em \mathbb{R}^k e f é uma função integrável em U , então;

$$\int_U f dx_1 \dots dx_n = \int_V (f \circ \phi) | \det(d\phi) | dy_1 \dots dy_n$$

Seja (X, \mathfrak{A}_X) uma n -variedade diferenciável, possivelmente com bordo, com a estrutura diferenciável

$$\mathfrak{A}_X = \{(\widehat{U}_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}.$$

Dado uma forma $w \in \Omega^p(X)$, dizemos que w é de suporte compacto se o fecho do conjunto

$$\{x \in X \mid w(x) \neq 0\},$$

denotado $Supp(w)$, é compacto. Assuma que w é uma p -forma com suporte compacto contido numa carta local \widehat{U}_α . Vamos supor que $\phi_\alpha : \widehat{U}_\alpha \rightarrow U_\alpha$ é um difeomorfismo que preserva orientação. Neste caso, $(\phi_\alpha^{-1})^* w$ é uma forma cujo suporte é compacto e esta contido em U_α . Defina

$$\int_X w = \int_{U_\alpha} (\phi_\alpha^{-1})^* w$$

Seja $\beta \in \Lambda$ tal que $\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta \neq \emptyset$, e $\phi_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\widehat{U}_\alpha \cap \widehat{U}_\beta)$ um difeomorfismo que preserva a orientação. Segue do fato do cálculo

$$\int_{\phi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha)} (\phi_\beta^{-1})^* w = \int_{\phi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha)} \phi_{\beta\alpha}^* (\phi_\beta^{-1})^* w = \int_{\phi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha)} (\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^* w = \int_{\phi_\alpha(U_\beta \cap U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* w$$

que a definição de integral não depende da carta utilizada, da onde temos que a definição é coerente.

Agora, vamos analisar o caso onde o $Supp(w)$ não esta contido numa carta local da variedade. A receita é utilizar *partição da unidade* de forma a decompor a forma w em um somatório de formas cujo suporte esta contido numa carta. Considere $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{\widehat{U}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ formada pelas cartas locais. Assim,

$$\int_X w = \sum_i \int_X \rho_i w$$

Para mostrar que $\int_X w$ independe da partição utilizada, seja $\{\rho'_\beta\}_{\beta \in \Lambda'}$ uma outra partição, também subordinada a cobertura $\{\widehat{U}_\alpha\}$. Portanto,

$$\int_X w = \sum_j \int_X \rho'_j w$$

onde

$$\int_X \rho'_j w = \sum_i \int_X \rho_i \rho'_j w$$

similarmente,

$$\int_X \rho_i w = \sum_j \int_X \rho'_j \rho_i w$$

Portanto,

$$\sum_i \int_X \rho_i w = \sum_i \sum_j \int_X \rho_j \rho_i w = \sum_j \sum_i \int_X \rho_i \rho_j w = \sum_j \int_X \rho_j w$$

Segue das propriedades locais e da definição que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $w_1, w_2 \in \Omega^p(X)$ que

$$\int_X \{aw_1 + bw_2\} = a \int_X w_1 + b \int_X w_2$$

Theorem 3.1.0.5. *Sejam X e Y variedades diferenciáveis e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável, então*

$$\int_Y w = \int_X f^* w$$

1. operador d , cadeias singulares, homologia, teorema de Stokes

3.2 Derivada Exterior

Definição 3.2.0.6. *O operador derivada exterior é o operador $d : \Omega^p(X) \rightarrow \Omega^{p+1}(X)$ definido por*

$$\begin{aligned} dw(Y_0, \dots, Y_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i Y_i(w(Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_p)) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} w([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_p). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Proposição 3.2.0.7. *O operador derivada exterior satisfaz as seguintes propriedades;*

1. d é \mathbb{R} -linear.
2. Se $w \in \Omega^p(X)$, então

$$d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^p w \wedge d\eta.$$

3. $d^2 = 0$
4. d é o único operador que satisfaz as propriedades acima tal que $d : \Omega^0(X) \rightarrow \Omega^1(X)$ coincide com a derivada sobre funções ($df(V) = L_V(f)$).

Localmente, ou seja, se fixarmos um aberto \hat{U}_α e um referencial movel $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre \hat{U}_α , então o co-referencial movel $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ implica que toda k -forma sobre \hat{U}_α é escrita na forma

$$w = \sum_I w_I^\alpha dx_I$$

Conforme definido em (...), temos que

$$d^\alpha w = \sum_I dw_I^\alpha \wedge dx_I$$

É preciso verificar que a definição dada independe da carta utilizada. Sejam $\alpha, \beta \in \Lambda$ tais que $\hat{U}_\alpha \cap \hat{U}_\beta \neq \emptyset$; a condição de compatibilidade deve ser

$$\phi_{\beta\alpha}^* d^\beta = d^\alpha \phi_{\beta\alpha}^*$$

o que segue diretamente da unicidade do operador derivada exterior definido em \mathbb{R}^n .

Assim, temos para cada $p \in \{0, \dots, n\}$ o operador $d_p : \Omega^p(X) \rightarrow \Omega^{p+1}(X)$.

3.3 Cohomologia de De Rham

No capítulo vimos a definição da Cohomologia de De Rham para um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. No caso de uma variedade diferenciável (X, \mathfrak{A}_X) , procedemos de forma análoga.

Decorre da proposição acima que sobre X temos o *complexo*

$$\Omega^0(X) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(X) \xrightarrow{d_1} \dots \Omega^p(X) \xrightarrow{d_p} \Omega^{p+1}(X) \xrightarrow{d_{p+1}} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(X)$$

e, por isto, podemos definir os espaços vetoriais

$$H_{DR}^p(X) = \frac{Nucl(d_p)}{Img(d_{p-1})}$$

denominados de p-ésimo grupo de Cohomologia de De Rham de X.

FORMA DE VOLUME

Proposição 3.3.0.8. *Seja X uma variedade diferenciável;*

1. *Se X é conexa, então $H_{DR}^0(X) \simeq \mathbb{R}$;*
2. *Se X é compacta e sem bordo, então $H_{DR}^p(X) \simeq \mathbb{R}$*

Demonstração. 1. trivial

2. Seja w_β uma forma de volume, então

$$\int_X w_\beta \neq 0$$

Suponha que w_β seja uma forma exata ; $w_\beta = d\eta$. Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_X w_\beta = \int_X d\eta = \int_{\partial X} \eta = 0$$

contradizendo o fato de ser w_β uma forma de volume. Assim, uma n-forma não pode ser exata mas sempre será fechada. Precisamos mostrar que dado duas formas de volume $w_\beta, w_{\beta'}$, temos que

$$w_{\beta'} - \omega_\beta = d\eta \Leftrightarrow w_{\beta'} = \omega_\beta.$$

TA MAL ...

Sejam n-forma

$$w_{\beta'} = \det(T_{\beta, \beta'}) w_\beta$$

da onde

$$w_{\beta'} - \omega_\beta = [\det(T_{\beta, \beta'}) - 1] w_\beta$$

□

Para efetuarmos alguns cálculos de grupos de Cohomologia de De Rham é preciso retornar ao Lema de Poincaré, onde construímos um operador, cujo análogo para variedades é

$$\widehat{S}_p : \Omega^p(X \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{p-1}(X),$$

onde se

$$w = \sum_I f_I(x, t) dx_I + \sum_J g_J(x, t) dt \wedge dx_J, \quad I = (i_1, \dots, i_p), J = (j_1, \dots, j_{p-1})$$

então,

$$\widehat{S}_p(w) = \sum_J \left[\int_0^1 g_J(x, t) dt \right] dx_J$$

Se considerarmos $\pi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ a projeção no 2º-fator e $i_a : X \rightarrow \mathbb{R} \times X$ o mergulho $i_a(x) = (x, a)$, então

$$d\widehat{S}_p w + \widehat{S}_{p+1} dw = w - \pi^* i_a^* w$$

$$(\pi^* i_a^* w = \sum_J g_J(x, a) dx_J)$$

Decorre da existência de \widehat{S}_p que

$$H_{DR}^p(\mathbb{R} \times X) \simeq H_{DR}^p(X)$$

uma vez que os homomorfismos

$$i_a^* : H_{DR}^p(X \times \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}^p(X), \quad \text{e} \quad \pi^* : H_{DR}^p(X) \rightarrow H^p(X \times \mathbb{R})$$

são tais que $i_a^* \pi^* = id_{H_{DR}^p(X)}$ e $\pi^* i_a^* = id_{H_{DR}^p(X \times \mathbb{R})}$

Proposição 3.3.0.9. *Se $f, g : X \rightarrow Y$ são aplicações homotópicas, então $f^* = g^*$*

Demonstração. Seja $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ uma homotopia tal que $H_0(x) = f(x)$ e $H_1(x) = g(x)$. Seja $a \in [0, 1]$ e considere o mergulho $i_a : X \rightarrow X \times [0, 1]$ dado por $i_a(x) = (x, a)$. Desta maneira, temos que

$$f = F \circ i_0, \quad e \quad g = F \circ i_1$$

o que implica em que $f^* = i_0^* \circ F^*$ e $g^* = i_1^* \circ F^*$.

De acordo com a proposição anterior, para qualquer $a \in [0, 1]$, segue que i_a^* é a inversa de $\pi^* : H^p(X) \rightarrow H^{p+1}(X \times [0, 1])$; ou seja, $i_0^* = i_1^*$. Consequentemente, $f^* = g^*$. □

Corolário 3.3.0.10. *Seja X uma variedade contrátil, então $H_{DR}^p(X) = 0$ se $p > 0$.*

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior ao tomarmos $Y = \{x_0\}$, onde $x_0 \in X$ □

Theorem 3.3.0.11.

$$H_{DR}^p(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, n \\ 0, & p \neq 0, n \end{cases}$$

Demonstração. Vamos assumir que o Teorema é verdadeiro para S^{n-1} e mostrar que isto implica no resultado para S^n .

Sejam N o pólo norte e S o pólo sul de S^n . Considere os abertos

$$U_N = S^n - \{N\}, \quad U_S = S^n - \{S\}$$

então

$$S^n = U_N \cup U_S \tag{3.2}$$

$$U_N \cap U_S \simeq S^{n-1} \times (0, 1) \tag{3.3}$$

afirmação: Se $p > 1$, então $H_{DR}^p(U_N \cup U_S) \simeq H_{DR}^{p-1}(U_N \cap U_S)$.

Seja $w \in H_{DR}^p(S^n)$. Se $p > 0$ temos que $H_{DR}^p(U_N) = H_{DR}^p(U_S) = 0$. Portanto, em U_N temos que $w = d\eta_N$ em U_S temos que $w = d\eta_S$. Consequentemente, em $U_N \cap U_S$ temos que

$$d\eta_N = d\eta_S \Rightarrow d(\eta_N - \eta_S) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_N - \eta_S \in H_{DR}^{p-1}(U_N \cap U_S)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \eta^* : H_{DR}^p(U_N \cup U_S) &\rightarrow H_{DR}^{p-1}(U_N \cap U_S) \\ w &\rightarrow \eta_N - \eta_S \end{aligned}$$

Agora, seja $\eta \in H_{DR}^{p-1}(U_N \cap U_S)$. Vamos construir uma p -forma em $H_{DR}^p(U_N \cap U_S)$. Seja $\{\rho_N, \rho_S\}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{U_N, U_S\}$ de S^n . Se η é uma $(p-1)$ -forma em $U_N \cap U_S$, considere as $(p-1)$ -formas

$$\eta_N = \rho_N \eta, \quad \eta_S = -\rho_S \eta$$

Observe que em $U_N \cap U_S$ temos que $\eta = (\rho_N + \rho_S)\eta = \eta_N - \eta_S$.

Em $H_{DR}^p(U_N \cup U_S)$, defina a p -forma w que restrito a U_N é $d\eta_N$ e em U_S é $d\eta_S$. Uma vez que sobre $U_N \cap U_S$ temos que

$$d\eta_N - d\eta_S = d\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad d\eta_N = d\eta_S$$

da onde segue que a p -forma w esta bem definida e é certamente fechada.

Assim, seja

$$\begin{aligned} w^* : H_{DR}^{p-1}(U_N \cap U_S) &\rightarrow H^p(U_N \cap U_S) \\ \eta &\rightarrow w \end{aligned}$$

Decorre da construção que $\eta^* w^* = w^* \eta^* = id$.

De acordo com a proposição anterior,

$$H_{DR}^p(U_N \cap U_S) \simeq H^p(S^{n-1})$$

Para concluir a proposição, basta observar que

$$H_{DR}^1(S^1) = \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad H_{DR}^k(S^n) = 0, \quad \text{se} \quad k > 1$$

□

3.4 Fibrados Vetoriais

3.4.1 Definição

3.4.2 Método do Referencial Móvel

3.4.3 Formas com valores em Fibrados Vetoriais

