do tipo $n \times 1$, tal que $(A - \lambda I_n)X = 0$. Ora, isto ocorre se, e somente se, $A - \lambda I_n$ não é inversível e portanto se, e somente se, $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$. Levando em conta a definição 3 deste item podemos concluir que λ é valor próprio de A quando, e somente quando, λ é raiz do polinômio característico de A.

3) Se λ é valor próprio de T, o número $s = \dim(V(\lambda))$ chama-se multiplicidade geométrica de λ. Reveja nos exemplos acima a multiplicidade geométrica dos valores próprios.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Achar os valores e os vetores próprios do operador T do $\mathbb{R}^2$ dado por:
   a) $T(x, y) = (x + y, x - y)$;
   b) $T(x, y) = (-x, -y)$;
   c) $T(1, 0) = (0, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$.

2. Achar os valores e os vetores próprios do operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por
   a) $T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$;
   b) $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (5, -1, 2)$.

3. Determinar valores e vetores próprios do operador T do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação à base canônica é:
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Determinar o polinômio característico e os valores próprios do operador linear $T: V \to V$ que é definido em uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ por $T(e_i) = \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$.

5. Calcular o polinômio característico e os valores próprios das seguintes matrizes:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Calcular o polinômio característico e os valores próprios da matriz:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Seja $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de um operador do $\mathbb{R}^2$. Ache os valores próprios de T. Existem, neste caso, dois vetores próprios linearmente independentes?

8. Seja A uma matriz triangular, ou seja, uma matriz $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$ (ou, ao contrário, $a_{ij} = 0$, sempre que $i < j$). Qual o polinômio característico de A?

9. Sejam A e B matrizes triangulares com a mesma diagonal principal ($a_{ii} = b_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$). Prove que: $p_A(t) = p_B(t)$.

*10. Provar que se λ é valor próprio de T, então λ^n é valor próprio de T^n. Generalizando, se $p(t)$ é um polinômio então $p(\lambda)$ é valor próprio de $p(T)$, onde $p(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n$ se $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$.

2. DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

Vamos examinar dois operadores do $\mathbb{R}^2$ que se comportam de maneira diferente quanto aos vetores próprios. São eles $T(x, y) = (y, x)$ e $S(x, y) = (x + y, y)$ cujas matrizes em relação à base canônica são
$$(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
respectivamente. Os polinômios característicos respectivos são $p_T(x) = x^2 - 1$ e $p_S(x) = (1 - x)^2$, cujas raízes são: $p_T(x)$: $1, -1$ e $p_S(x)$: 1 (dupla). São vetores próprios de T linearmente independentes: $f_1 = (1, 1)$, associado a 1, e $f_2 = (1, -1)$, associado a -1.

Logo $\{f_1, f_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Os vetores próprios de S devem satisfazer a condição $S(x, y) = (x, y)$, ou seja, $(x + y, y) = (x, y)$ que equivale ao sistema:
$$\begin{cases} x + y = x \\ \quad\;\; y = y \end{cases}$$
cuja solução geral é $y = 0$. O sub-espaço próprio de S é formado então pelos múltiplos do vetor $(1, 0)$ e portanto sua dimensão é 1. Então *é impossível formar uma base de $\mathbb{R}^2$ com vetores próprios de S*, contrariamente ao que se verificou com o operador T.