

Para $\lambda = 2$ teremos o vetor próprio

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Então, formando a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{teremos } M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Seja $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ o operador linear cuja matriz, em relação à base canônica de $\mathbb{C}^4$ sobre $\mathbb{C}$, é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Então

$$p_T(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2-t \end{vmatrix} =$$

$$= (2-t)^2 \cdot [(1-t)(-2-t)-4] = (2-t)^2(t^2+t-6) = (2-t)^3(-3-t)$$

Logo, os valores próprios de $p_T(t)$ são 2 (com multiplicidade algébrica 3) e -3 (com multiplicidade algébrica 1).

Calculamos as dimensões de $V(2)$ e $V(-3)$, onde $V = \mathbb{C}^4$. A equação matricial $A(x y z t)^t = 2(x y z t)^t$ equivale ao sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2x \\ 2y = 2y \\ z + t = 2z \\ 4z - 2t = 2t \end{cases}$$

que equivale, por sua vez, a

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Donde $V(2) = \{(x, 0, z, z) | x, z \in \mathbb{C}\} = [(1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 1)]$, cuja dimensão é 2. Como a multiplicidade algébrica de 2 é 3, então T não é diagonalizável.

Cálculos análogos levam à conclusão que $V(-3) = \{(0, 0, z, -4z) | z \in \mathbb{C}\}$ e portanto $\dim V(-3) = 1$, o que mostra que $V(2) + V(-3) \neq \mathbb{C}^4$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determinar, se possível, uma matriz $M \in M_2(\mathbb{R})$ de maneira que $M^{-1}AM$ seja diagonal, nos seguintes casos:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Determinar uma matriz $M \in M_4(\mathbb{R})$, inversível, tal que $M^{-1}AM$ seja diagonal, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Determinar $M \in M_3(\mathbb{R})$, inversível, tal que $M^{-1}AM$ seja diagonal onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Achar uma matriz diagonal semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Estudar quanto à possibilidade de diagonalização as matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$