$$\cos\theta = \frac{<u, v>}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{0}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \quad e \quad \theta = \frac{\pi}{2};$$

b) $\|u\| = \sqrt{2}$, $\|v\| = 3$ e $<u, v> = 2 + 1 + 0 = 3$. Logo

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

15. Sejam u e v vetores de um espaço vetorial euclidiano. Mostrar que $\{u, v\}$ é L.D. se, e somente se,

$$|<u, v>| = \|u\|\,\|v\|.$$

Solução

Se $\{u, v\}$ é L.D., então um dos seus vetores é combinação linear do outro. Seja $u = \alpha v$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$|<u, v>| = |<\alpha v, v>| = |\alpha|\,|<v, v>| = |\alpha|\,\|v\|^2 \text{ e } \|u\|\,\|v\| = \|\alpha v\|\,\|v\| =$$
$$= |\alpha|\,\|v\|\,\|v\| = |\alpha|\,\|v\|^2.$$

Logo $|<u, v>| = \|u\|\,\|v\|$. Por outro lado, suponhamos $|<u, v>| = \|u\|\,\|v\|$.

Se $v = o$, então $\{u, v\}$ é L.D. obviamente. Suponhamos $v \neq o$. Então

$|<u, v>| = \|u\|\,\|v\| \Longrightarrow <u, v>^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2$ logo $4<u, v>^2 - 4|u|^2\,|v|^2 = 0$.

Mas $4<u, v>^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2$ é o discriminante do trinômio do segundo grau (em x)

$$\|v\|^2x^2 - 2<u, v>x + \|u\|^2 = <u - xv, u - xv>.$$

Considerando a raiz $\alpha = \frac{<u, v>}{\|v\|^2}$ (dupla) do trinômio temos $<u - \alpha v, u - \alpha v> = 0$ o que equivale a $u = \alpha v$. Portanto $u - \alpha v = o$ e $\{u, v\}$ é L.D.

16. Sejam u e v vetores fixos de um espaço vetorial euclidiano. Achar o vetor de menor norma do conjunto $\{u + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, supondo $v \neq o$.

Solução

Seja $w = u + tv$. Então

$$\|w\| = \sqrt{<u + tv, u + tv>} = \sqrt{\|u\|^2 + 2<u, v>t + \|v\|^2t^2}$$

Daí

$$\frac{d\,\|w\|}{dt} = \frac{2<u, v> + 2\,\|v\|^2t}{2\sqrt{\|u\|^2 + 2<u, v>t + \|v\|^2t^2}}$$

O vetor de menor norma no conjunto dado é aquele cujo coeficiente t anula a derivada acima. Então:

$$t = -\frac{<u, v>}{\|v\|^2}$$

e a resposta do problema é $w_0 = u - \frac{<u, v>}{\|v\|^2}\,v$.

17. Sejam $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 1, 2)$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. **Determinar os vetores $w \in \mathbb{R}^3$** tais que $\|w\| = 1$ e $<u, w> = <v, w> = 0$.

Solução

Seja $w = (x, y, z)$. Então:

$\|w\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $<u, w> = x + y = 0$ e $<v, w> = y + 2z = 0$.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

chegaremos a $z = \pm\frac{1}{3}$, $x = \pm\frac{2}{3}$ e $y = \mp\frac{2}{3}$.

Logo $w = \left(\pm\frac{2}{3}, \mp\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}\right) = \pm\frac{1}{3}(2, -2, 1)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função $<u, v> = x_1y_1 + tx_2y_2$ é um produto interno sobre o $\mathbb{R}^2$?

2. Mostrar que se $<u, v> = 0$, para todo vetor v, então $u = o$.

3. No espaço $V = P_3(\mathbb{R})$ consideremos o produto interno $<f(t), g(t)> = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

   Calcular $<f(t), g(t)>$, $\|f(t)\|$, $\|g(t)\|$ e $\|f(t) + g(t)\|$ quando $f(t) = t^3 - t - 1$, e $g(t) = t^2 + 1$. Repita o exercício com $f(t) = 2$ e $g(t) = t^3 + t + 1$.

4. Sejam $f(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ e $g(t) = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$ polinômios quaisquer de $P_n(\mathbb{R})$. A função

   $(f(t), g(t)) \mapsto a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \in \mathbb{R}$

   é um produto interno no espaço $P_n(\mathbb{R})$?

5. Seja T um isomorfismo de um espaço vetorial V. Provar que se $<u, v>$ é um produto interno sobre V, então o mesmo acontece com a função $P_T: V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $P_T(u, v) = <T(u), T(v)>$.

6. Seja V um espaço vetorial euclidiano. Dada uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V definamos $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ por $a_{ij} = <e_i, e_j>$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

a) Provar que A é uma matriz simétrica.

b) Mostrar que se $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, então o produto escalar em V pode ser expresso na forma matricial seguinte: $<u, v> = (x_1 x_2 \ldots x_n) A (y_1 y_2 \ldots y_n)^t$.

7. Seja V um espaço euclidiano com produto interno $<u, v>$. Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a aplicação:

$$(u, v) \to \alpha <u, v>$$

também é um produto interno sobre V? (Veja exercício resolvido nº 5.)

8. Chama-se traço de uma matriz $A = (a_{ij})$, quadrada de ordem n, a soma dos termos da sua diagonal principal.

Notação: tr(A). Assim, $tr(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$. Sendo $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$, mostre que $<A, B> = tr(B^t A)$ define um produto interno sobre V.

9. No espaço vetorial $V = M_2(\mathbb{R})$ considere o produto interno definido no exercício 8. Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcule $<A, B>$, $\|A\|$, $\|B\|$ e $d(A, B)$.

10. No espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^4$ sejam $u = (1, 2, 0, 1)$ e $v = (3, 1, 4, 2)$. Determinar $<u, v>$, $\|u\|$, $\|v\|$, $d(u, v)$, $\dfrac{u + v}{\|u + v\|}$ e o co-seno do ângulo de u e v.

11. Sejam u e v dois vetores não nulos de um espaço vetorial euclidiano. Sendo θ o ângulo de u e v, mostrar que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| \cos\theta$. (Esta igualdade é conhecida como lei dos co-senos na geometria elementar.)

12. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Determinar o co-seno do ângulo entre u e v, dado $\|u\| = 5$, $\|v\| = 8$ e $\|u + v\| = \sqrt{129}$.

13. Verifique a lei do paralelogramo num espaço euclidiano V: $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$, $\forall u, v \in V$.

*14. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$ e

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Definamos $<u, v> = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$.

a) Mostrar que o produto assim definido satisfaz as duas primeiras condições da definição de produto interno.

b) Mostrar que a condição (c) da definição de produto interno é válida se, e somente se, M é simétrica.

c) Qual a matriz M que leva ao produto interno usual do $\mathbb{R}^2$?

d) Quais das seguintes matrizes definem produtos internos sobre o $\mathbb{R}^2$ segundo a definição de $<u, v>$ que foi dada acima:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Sabendo que $\|u\| = 3$ e $\|v\| = 5$, com u e v elementos de um espaço euclidiano, determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de maneira que $<u + \alpha v, u - \alpha v> = 0$.

*16. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ (produto interno usual) para mostrar que, dados os números reais estritamente positivos a_1, a_2, a_3, vale a desigualdade:

$$(a_1 + a_2 + a_3) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geqslant 9.$$

*17. Sendo a, b e c números reais estritamente positivos tais que $a + b + c = 1$, utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz no $\mathbb{R}^3$ para provar que

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geqslant 8.$$

18. Determinar a norma de cada um dos seguintes vetores:

a) $u = (3, 1, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$;

b) $f(t) = t^2 + t - 1$, em relação ao produto interno $<f(t), g(t)> = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ em relação ao produto do exercício proposto nº 8 desta série.

19. Mostrar que a soma de dois produtos internos sobre um espaço V também é um produto interno sobre V (antes, pense bem no significado da palavra "soma").

20. Encontrar a distância de u a v e o co-seno do ângulo entre u e v nos seguintes casos:

a) $u = (1, 1, 1, 1)$ e $v = (0, 0, 1, 1)$ com o produto interno usual do $\mathbb{R}^4$;

b) $u = 1 + t - t^2$ e $v = 3t^2$ com o produto considerado no exercício 18 b) acima;

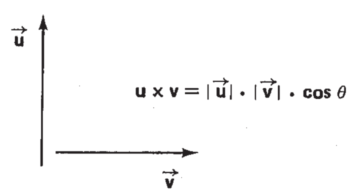
c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ com o produto interno do exercício proposto n.º 8.

*21. Sejam u e v vetores de um espaço vetorial euclidiano. Prove que $\langle u, v\rangle = 0$, se, e somente se, $\|u + \alpha v\| \geqslant \|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

*22. Sejam $e_1, e_2, \ldots, e_r$ vetores unitários (norma igual a 1) de um espaço euclidiano tais que $\|e_i - e_j\| = 1$ (sempre que $i \neq j$). Calcule o co-seno do ângulo entre dois vetores e_i e e_j.

3. ORTOGONALIDADE

Lembremos primeiro que dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ definidos por meio de segmentos orientados são ortogonais se, e somente se, seu produto escalar é zero.



Esse fato motiva a seguinte definição:

Definição 4 – Seja V um espaço euclidiano. Dizemos que dois vetores u, $v \in V$ são ortogonais se, e somente se, $\langle u, v\rangle = 0$. Um conjunto $S = \{u_1, \ldots, u_r\} \subset V$ se diz *ortonormal* se, e somente se, (I) $\|u_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ e (II) dois vetores quaisquer de S, distintos entre si, são *ortogonais*.

Nota: As condições (I) e (II) da definição acima podem ser substituídas pela seguinte: $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ (símbolo de Kronecker), $i, j = 1, \ldots, n$, cujo significado é $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Exemplo – No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ o conjunto $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é ortonormal. Por exemplo, a norma de $g_1 = (1, 0, 0)$ é $\|g_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$ e o produto interno de g_1 por g_2 é $\langle g_1, g_2\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$.

Em geral, para todo $n \geqslant 2$, o conjunto:

$$\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$$

é ortonormal no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Proposição 3 – Todo conjunto ortonormal $S = \{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ contido num espaço vetorial euclidiano é necessariamente L.I.

Demonstração

Suponhamos $\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_r g_r = o$. Então:

$$0 = \langle o, g_1\rangle = \langle \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_r g_r, g_1\rangle =$$
$$= \alpha_1 \langle g_1, g_1\rangle + \alpha_2 \langle g_2, g_1\rangle + \ldots + \alpha_r \langle g_r, g_1\rangle = \alpha_1.$$

De maneira análoga se prova que $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_r = 0$. ■

Outra demonstração: Sendo $o = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_r g_r$ então $0 = \|\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_r g_r\|^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_r^2$ é daí $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$. ■

Proposição 4 – Seja $S = \{g_1, \ldots, g_r\}$ um subconjunto ortonormal do espaço euclidiano V. Então, $\forall u \in V$, o vetor $v = u - \langle u, g_1\rangle g_1 - \ldots - \langle u, g_r\rangle g_r$ é ortogonal a todo vetor do sub-espaço gerado pelos vetores de S.

Demonstração

Observemos de início que se v for ortogonal aos vetores de S, então será ortogonal a toda combinação linear de S. De fato, seja $w = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_r g_r$ uma dessas combinações lineares. Então:

$$\langle v, w\rangle = \langle v, \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_r g_r\rangle = \alpha_1 \langle v, g_1\rangle + \ldots + \alpha_r \langle v, g_r\rangle = 0.$$

Provemos pois que v é ortogonal a cada g_i o que é uma questão apenas de cálculos. Vejamos:

$$\langle v, g_1\rangle = \langle u - \langle u, g_1\rangle g_1 - \ldots - \langle u, g_r\rangle g_r, g_1\rangle =$$
$$= \langle u, g_1\rangle - \langle u, g_1\rangle\langle g_1, g_1\rangle - \ldots - \langle u, g_r\rangle\langle g_r, g_1\rangle =$$
$$= \langle u, g_1\rangle - \langle u, g_1\rangle = 0$$