EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Mostrar que $f: U \times V \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear se, e somente se,

   a) $f(a_1u_1 + a_2u_2, v) = a_1f(u_1, v) + a_2f(u_2, v)$ e

   b) $f(u, a_1v_1 + a_2v_2) = a_1f(u, v_1) + a_2f(u, v_2)$

   para todos os vetores u, u_1, u_2 de U, todos os vetores v, v_1, v_2 de V e quaisquer escalares a_1 e a_2 em $\mathbb{R}$.

2. Provar que se $f: U \times V \to \mathbb{R}$ e $g: U \times V \to \mathbb{R}$ são bilineares, então $f + g$ e λf são bilineares ($\lambda \in \mathbb{R}$).

3. Provar que $B(U; V)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

4. Seja $f: U \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Provar que

   a) $f(o, v) = f(u, o) = 0$;

   b) $f(-u, v) = f(u, -v) = -f(u, v)$;

   c) $f\left(\sum_{i=1}^{r} a_iu_i, v\right) = \sum_{i=1}^{r} a_if(u_i, v)$;

   d) $f\left(u, \sum_{j=1}^{n} b_jv_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j f(u, v_j)$;

   e) $f\left(\sum_i a_iu_i, \sum_i b_jv_j\right) = \sum_{i,j} a_ib_j f(u_i, v_j)$.

5. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$. Quais das seguintes funções são formas bilineares:

   a) $f(u, v) = x_1y_1$;

   b) $f(u, v) = x_1y_2$;

   c) $f(u, v) = x_1(y_1 + y_2)$;

   d) $f(u, v) = 0$;

   e) $f(u, v) = 1$;

   f) $f(u, v) = x_1^2 + x_2y_1$;

   g) $f(u, v) = x_1y_1 + x_2y_2 + 1$;

   h) $f(u, v) = x_1y_2 - x_2y_1$.

6. Calcular a matriz das formas bilineares que aparecem no exercício anterior em relação à base canônica.

7. Seja a forma bilinear do $\mathbb{R}^2$, $f(u, v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$. Calcular sua matriz em relação às seguintes bases do $\mathbb{R}^2$:

   a) $\{(1, 1), (1, -1)\}$;

   b) $\{(2, 1), (1, 2)\}$;

   c) $\{(2, 3), (4, 1)\}$.

8. Seja a forma bilinear $f(u, v) = ax_1y_1 + bx_2y_1 + cx_1y_2 + dx_2y_2$. Que condições devem satisfazer *a, b, c* e *d* para que:

   a) $f(u, v) = f(v, u)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$;

   b) $f(u, v) = -f(v, u)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$;

   *c) Exista $u \neq 0$ tal que $f(u, v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

   *d) $f(u, v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$ acarrete $u = 0$.

9. Sejam $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ as formas lineares dadas por $\varphi(x, y) = 2x + y$ e $\psi(x, y) = x - y$. Calcular as formas bilineares:

   a) $\varphi \otimes \psi$;

   b) $\psi \otimes \varphi$;

   c) $\varphi \otimes \varphi$;

   d) $\psi \otimes \psi$;

   e) $\varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi$;

   f) $\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi$.

10. Sejam $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\psi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por $\varphi(x, y) = 2x + 3y$ e $\psi(x, y, z) = x + y - z$. Calcular as formas bilineares $\varphi \otimes \psi$ e $\psi \otimes \varphi$. Existe $\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi$?

11. Seja $f: U \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Seja u_0 um vetor fixo de U. Se $W = \{v \in V \mid f(u_0, v) = 0\}$, prove que W é sub-espaço vetorial de V.

*12. Sejam V um espaço, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $\varphi: V \to \mathbb{R}$ uma forma linear. A matriz de φ é, por definição, a matriz $1 \times n$

$$(\varphi)_{\{v_i\}} = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)).$$

Como se obtém a matriz de $\varphi \otimes \sigma$ a partir das matrizes de φ e de σ?

Sugestão: voltar ao exercício 9.

3. MATRIZES CONGRUENTES — MUDANÇA DE BASE PARA UMA FORMA BILINEAR

A partir de agora estudaremos formas bilineares definidas em $V \times V$ com valores em $\mathbb{R}$. Neste caso consideraremos sempre a mesma base para definir a matriz de uma forma bilinear.

Definição 2 – Dizemos que duas matrizes A e B de ordem n são *congruentes* se existe uma matriz inversível P, do mesmo tipo, de maneira que $B = P^tAP$.

Usaremos a notação $A \approx B$ para indicar que A e B são congruentes. Essa relação binária em $M_n(\mathbb{R})$ tem as seguintes propriedades:

(I) $A \approx A$;

(II) $A \approx B \Longrightarrow B \approx A$;

(III) $A \approx B$ e $B \approx C \Longrightarrow A \approx C$.