EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular P^tAP e comparar com B. Conclusão?

2. Seja a forma bilinear do $\mathbb{R}^2$ dada por $f(u, v) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 - x_2y_1$ para todo $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$. Calcular a matriz de f em relação às bases:
   a) $\{(0, 1), (1, 0)\}$; b) $\{(1, 0), (0, 1)\}$; c) $\{(1, 1), (1, -1)\}$.
   Verifique que elas são congruentes duas a duas.

3. Seja a forma bilinear do $\mathbb{R}^3$ dada por
$$f(u, v) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 8x_3y_3 + x_1y_2 - \frac{3}{2}x_1y_3 - 2x_2y_3.$$
   Calcular sua matriz em relação às bases $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e provar diretamente que as matrizes são congruentes.

4. Sejam as formas lineares do $\mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = x + y + z$ e $\psi(x, y, z) = 2x - y$. Calcular a matriz de $\varphi \otimes \psi$ em relação às bases do exercício 3.

*5. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encontre uma matriz inversível P tal que P^tAP seja uma matriz diagonal.

6. Provar que se P^tAP é uma matriz simétrica então A é simétrica e reciprocamente. Que se pode dizer se A é anti-simétrica? Foi usado o fato de P ser inversível?

4. FORMAS BILINEARES SIMÉTRICAS E ANTI-SIMÉTRICAS

Definição 4 — Uma forma bilinear $f: V \times V \to \mathbb{R}$ é chamada *simétrica* se $f(u, v) = f(v, u)$, para todo $(u, v) \in V \times V$.

É claro que se f e g são simétricas então f + g também é pois
$$(f + g)(u, v) = f(u, v) + g(u, v) = f(v, u) + g(v, u) = (f + g)(v, u).$$
O mesmo acontece, é evidente, com λf ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$). Portanto o conjunto das formas bilineares simétricas de $V \times V$ em $\mathbb{R}$ é um sub-espaço de $B(V)$ que se denota por $B_s(V)$.

Nota: É evidente que a matriz de uma forma bilinear simétrica é uma matriz simétrica. Seja, por outro lado, A uma matriz simétrica e seja f a forma representada por A, com relação a uma certa base. Assim:
$$f(u, v) = X^tAX'$$
mantendo as notações anteriormente usadas neste capítulo. Daí
$$f(v, u) = (X')^tAX = (X')^tA^t(X^t)^t = (X^tAX')^t = (f(u, v))^t = f(u, v)$$
pois f(u, v) é uma matriz 1 × 1 que, portanto, coincide com sua transposta.

Logo o espaço das formas bilineares simétricas é isomorfo ao espaço das matrizes reais simétricas cuja dimensão é $n(n + 1)/2$ (exercício resolvido 8 – § 6 – capítulo 3).

Desse isomorfismo segue, inclusive, que a dimensão de $B_s(V)$ é também $n(n + 1)/2$ desde que a dimensão de V seja n.

Por último, da relação $B = P^tAP$ segue que B é simétrica se, e somente se, A é simétrica. Logo se f é uma forma bilinear simétrica sua representação matricial será simétrica qualquer que seja a base considerada.

Teorema 1 — Seja $f: V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Então existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é diagonal.

Demonstração (por indução sobre a dimensão de V): São triviais os casos em que $f = 0$ e aquele em que $\dim V = 1$. Suponhamos pois $f \neq 0$ e $\dim V > 1$. Certamente existe um vetor v_1 tal que $f(v_1, v_1) \neq 0$. De fato, se $f(v, v) = 0$, $\forall v \in V$, então $f(u + v, u + v) = f(u, u) + f(u, v) + f(v, u) + f(v, v) = 2f(u, v) = 0$, $\forall u, v \in V$. Daí $f = 0$ o que é absurdo. Considerando o vetor v_1 tal que $f(v_1, v_1) \neq 0$, todo vetor $v \in V$ admite a seguinte decomposição
$$v = \left(v - \frac{f(v, v_1)}{f(v_1, v_1)} v_1\right) + \frac{f(v, v_1)}{f(v_1, v_1)} v_1 = x_1 + x_2$$
Observemos que x_2 é múltiplo de v_1 e que
$$f(x_1, v_1) = f\left(v - \frac{f(v, v_1)}{f(v_1, v_1)} v_1, v_1\right) = f(v, v_1) - \frac{f(v, v_1)}{f(v_1, v_1)} f(v_1, v_1) = 0$$
(dizemos que x_1 é ortogonal a v_1 relativamente a f). Como um múltiplo não nulo de v_1 não pode ser ortogonal a v_1 (relativamente a f), a decomposição acima é única no seguinte sentido: todo vetor $v \in V$ se decompõe, de maneira única, como a soma de um múltiplo de v_1 e um vetor ortogonal a v_1 relativamente a f.

O sub-espaço gerado por v_1 é de dimensão 1; logo os vetores ortogonais a v_1 (relativamente a f) formam um sub-espaço de dimensão $n - 1$. A restrição $\overline{f}$ de f a este sub-espaço é simétrica; pela hipótese de indução existe uma base