22. Provar que $T \in L(\mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$ é uma isometria.

Solução

Basta mostrar que T conserva as normas:

$$\|T(x, y)\|^2 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy =$$

$$= x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

23. Mostrar que o operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$T(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z, \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y, \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)$$

é uma isometria nesse espaço euclidiano

Solução

$$\|T(x, y, z)\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{2}{3\sqrt{2}}xy - \frac{2}{\sqrt{6}}xz - \frac{1}{\sqrt{3}}yz +$$

$$+ \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{6}y^2 - \frac{4}{3\sqrt{2}}xy + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{2}{3\sqrt{2}}xy + \frac{2}{\sqrt{6}}xz + \frac{1}{\sqrt{3}}yz =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 = \|(x, y, z)\|^2.$$

24. Seja T uma isometria de um espaço euclidiano V. Mostrar que T conserva o cosseno do ângulo entre dois vetores não nulos de V.

Solução

Sejam u e v os vetores. Como T conserva as normas e conserva o produto interno, então:

$$\frac{<u, v>}{\|u\| \, \|v\|} = \frac{<T(u), T(v)>}{\|T(u)\| \, \|T(v)\|}$$

O primeiro membro é o cosseno do ângulo entre u e v, ao passo que o segundo membro é o cosseno do ângulo entre T(u) e T(v).

25. Para que valores de n, $m \in \mathbb{R}$ o operador linear T do $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) =$ $= \left(x, my + \frac{\sqrt{2}}{2}z, ny + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$ é uma isometria?

Solução

$$\|T(x, y, z)\|^2 = x^2 + \left(my + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)^2 + \left(ny + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)^2 = x^2 + m^2y^2 + \frac{1}{2}z^2 +$$

$$+ \sqrt{2}\,myz + n^2y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2}\,nyz = x^2 + (m^2 + n^2)y^2 + z^2 + (\sqrt{2}m + \sqrt{2}n)yz =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m^2 + n^2 = 1 \\ m + n = 0 \end{cases} \Longrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \ \text{ e } \ n = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo $T(x, y, z) = \left(x, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$.

26. Se T_1 e T_2 são isometrias num espaço euclidiano V, mostrar que $T_1 \circ T_2$ também o é. Se T é uma isometria em V, provar que T^{-1} também é uma isometria em V.

Solução

(I) Já sabemos que se T_1 e $T_2 \in L(V)$, então $T_1 \circ T_2$ também pertence. Por outro lado $\|T_1 \circ T_2(u)\| = \|T_1(T_2(u))\| = \|T_2(u)\| = \|u\|, \forall u \in V$,
pois tanto T_1 como T_2 conservam as normas. Logo $T_1 \circ T_2$ é isometria.

(II) Já vimos que uma isometria é um isomorfismo. Logo existe T^{-1}. Além disso:
$\|T^{-1}(u)\|^2 = <T^{-1}(u), T^{-1}(u)> = <T(T^{-1}(u)), T(T^{-1}(u))> = <I(u), I(u)> =$ $= \|u\|^2$.

Logo $\|T^{-1}(u)\| = \|u\|, \forall u \in V$. Portanto T^{-1} é também uma isometria em V.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considere no $\mathbb{R}^2$ o produto interno dado por $<u, v> = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$ para todo par de vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
   a) Determinar m a fim de que os vetores $(1 + m, 2)$ e $(3, m - 1)$ sejam ortogonais.
   b) Determinar todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ ortogonais a (2, 1).
   c) Determinar todos os vetores $(m, m - 1)$ de norma igual a 1.

2. Determinar todos os vetores do $\mathbb{R}^3$ de norma igual a 2 que sejam ortogonais simultaneamente a (2, 1, 2) e (– 1, 3, 4).

3. Determinar uma base ortonormal de cada um dos seguintes sub-espaços do $\mathbb{R}^4$ utilizando o processo de Gram-Schmidt:

   a) W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 3, 4)].
   b) W = [(2, 0, 0, 0), (1, 3, 3, 0), (3, – 3, – 3, 0)].

4. Determinar uma base ortonormal do sub-espaço W de $\mathbb{R}^3$ dado por $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.

5. Considere a seguinte transformação linear do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^2$: $F(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x)$. Determine uma base ortonormal de Ker(F).

6. Seja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ um subconjunto de um espaço euclidiano V cujos vetores são ortogonais dois a dois. Prove que $\left\| \sum_{i=1}^{n} g_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|g_i\|^2$ (teorema de Pitágoras generalizado).

7. Em $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno definido por: $<f(t), g(t)> = \int_0^1 f(t)g(t)dt$

a) Ortonormalizar a base $\{1, 1 + t, 2t^2\}$;

b) Achar o complemento ortogonal do sub-espaço $W = [5, 1 + t]$.

8. Determinar uma base ortonormal de W e uma base ortonormal de $W^\perp$, onde W é o sub-espaço de $\mathbb{R}^4$ dado por $W = \{(x, y, z, t) : x + y = 0 \text{ e } 2x + z = y\}$.

9. Determinar um vetor unitário do $\mathbb{R}^3$ que seja ortogonal a todos os vetores do sub-espaço

$$W = [(1, 2, -1), (-1, 0, 2)]$$

10. Determinar a projeção ortogonal do vetor $(1, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ sobre o sub-espaço

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z = 0 \text{ e } z - 2t = 0\}$$

11. Provar que os vetores 1, t e $t^2 - \frac{1}{3}$ de $P_2(\mathbb{R})$ são dois a dois ortogonais em relação ao produto interno dado por:

$$<f(t), g(t)> = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

12. Determinar uma base ortonormal do sub-espaço $W = [(1, 1, 1), (1, -2, 3)]$ do $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno dado por:

$$<u, v> = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3,$$

para todo par de vetores $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$ do $\mathbb{R}^3$.

13. Determinar um polinômio de grau 3 em $P_3(\mathbb{R})$ que seja ortogonal a 1, t e t^2 com relação ao produto interno definido no início deste capítulo como exemplo 2.

14. Sejam u e v dois vetores linearmente independentes do $\mathbb{R}^3$. Mostrar que existem dois, e apenas dois, vetores de norma igual a 1 que são ortogonais simultaneamente a u e v.

15. Sejam U e V sub-espaços vetoriais de um espaço euclidiano de dimensão finita. Provar que $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

16. Seja W um sub-espaço de um espaço euclidiano de dimensão finita V. Para todo $v \in V$, seja $v = w + w'$ com $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Mostrar que a aplicação $T: V \to V$ dada por: $T(v) = w - w'$ é linear e tem a seguinte propriedade $<u, T(v)> = <T(v), u>$, $\forall u, v \in V$.

17. Seja $\{g_1, g_2, g_3\}$ uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$. Para todo $u \in \mathbb{R}^3$ definem-se os co-senos diretores de u em relação à base dada por $\cos\alpha = \frac{<u, g_1>}{\|u\|}$, $\cos\beta = \frac{<u, g_2>}{\|u\|}$ e $\cos\gamma = \frac{<u, g_3>}{\|u\|}$. Provar que:

a) $u = \|u\|((\cos\alpha)g_1 + (\cos\beta)g_2 + (\cos\gamma)g_3)$;

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

18. Seja V um espaço euclidiano. Se $T: V \to V$ é uma transformação linear que conserva o produto interno, prove que T é uma isometria. (Veja a proposição 7.)

19. Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $u = (2, 2, 2)$ e $v = (3, 3, 1)$.

a) Determinar dois vetores v_1 e v_2 tais que $v = v_1 + v_2$; v_1 é ortogonal a u e $v_2 = \lambda u$ $(\lambda \in \mathbb{R})$;

b) Se $w = (-5, 1, -1)$ decompor v em uma parcela de $W = [u, w]$ e uma parcela de $W^\perp$;

c) Determinar uma base ortonormal de W.

*20. Seja V um espaço euclidiano. Se $u \in V$, $W = [u]$ e E é a transformação linear que associa a cada vetor de V sua projeção ortogonal sobre W, mostre que:

$$\|v - E(v)\| \leq \|v - w\|, \ \forall v \in V \text{ e } \forall w \in W.$$

Interpretar geometricamente esse resultado.

21. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita e seja E a projeção ortogonal de V sobre o sub-espaço W de V. Mostrar que o operador linear E tem a seguinte propriedade: $<E(u), v> = <u, E(v)>$, $\forall u, v \in V$.

22. Determine $m \in \mathbb{R}$ a fim de que o seguinte operador linear do $\mathbb{R}^3$ seja uma isometria:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + mz, \frac{-1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right).$$

23. Determinar uma matriz ortogonal $(A^t = A^{-1})$ cuja primeira linha seja $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

*24. Mostrar que a matriz de mudança de base entre duas bases ortonormais de um espaço euclidiano de dimensão finita é uma matriz ortogonal.

25. Mostre que $(I_2 - A)(I_2 + A)^{-1}$ é uma matriz ortogonal, onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

*26. No espaço vetorial $V = M_n(\mathbb{R})$ consideremos o produto interno definido por $< A, B > = \operatorname{tr}(AB^t)$. Dada uma matriz $M \in V$, seja $T_M: V \to V$ o operador linear definido por $T_M(X) = MX$, $\forall X \in V$. Mostre que T_M é uma isometria se, e somente se, M é uma matriz ortogonal.

27. Determine a isometria do $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Obs.: x, y e z devem ser determinados numericamente.

*28. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Sendo U um subespaço vetorial de V, indiquemos por $E : V \to U$ a projeção ortogonal de V sobre U. Provar que E é sobrejetora, isto é, $\operatorname{Im}(E) = U$.

5. OPERADORES AUTO-ADJUNTOS

Definição 8 – Seja V um espaço vetorial euclidiano. Um operador $A \in L(V)$ se diz *auto-adjunto* se

$$<A(u), v> = <u, A(v)>$$

para quaisquer $u, v \in V$.

Se a dimensão de V é finita os operadores auto-adjuntos admitem uma caracterização matricial bastante simples, como veremos a seguir.

Proposição 9 – Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Então, um operador $A \in L(V)$ é auto-adjunto se, e somente se, a matriz de A em relação a uma base ortonormal de V é simétrica.

Demonstração

$(\Longrightarrow)$ Seja $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ uma base ortonormal de V. Por hipótese

$$<A(g_i), g_j> = <g_i, A(g_j)>$$

para quaisquer i, j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Mas se a matriz de A em relação a B é $(A)_B = (a_{ij})$, então

$$A(g_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} g_k \quad \text{e} \quad A(g_j) = \sum_{t=1}^{n} a_{tj} g_t$$

$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, e daí

$$< \sum_{k=1}^{n} a_{ki} g_k, g_j> = <g_i, \sum_{t=1}^{n} a_{tj} g_t>.$$

Donde

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \delta_{kj} = \sum_{t=1}^{n} a_{tj} \delta_{it}$$

e portanto $a_{ji} = a_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ e $(A)_B$ é simétrica.

$(\Longleftarrow)$ Seja $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ uma base ortonormal de V e admitamos que $(A)_B = (a_{ij})$ é simétrica. Então, como

$<A(g_i), g_j> = < \sum_{k=1}^{n} a_{ki} g_k, g_j> = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \delta_{kj} = a_{ji}$ e, analogamente,

$<g_i, A(g_j)> = a_{ij}$,

obtemos que

$$<A(g_i), g_j> = <g_i, A(g_j)>$$

para quaisquer $g_i, g_j \in B$. Considerando então vetores genéricos $u, v \in V$, $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ e $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j$, teremos

$$<A(u), v> = < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A(g_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j> = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j <A(g_i), g_j> =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j <g_i, A(g_j)> = <u, A(v)>.$$