$$+(-3)\det\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} = 35.$$

7.6. 1. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$.

b) $A^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{24}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ e

$$X = \begin{pmatrix}\frac{39}{24}\\ \frac{11}{8}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

7.7. 1. 3.

2. Se $\dim V = n$, $\det H = \lambda^n$.

3. $\det F = 0$ ou $\det F = 1$.

4. $\det F = 6$ e $\det F^2 = 36$.

8.3. 5. São formas bilineares: a), b), c), d) e h).

6. a) Matriz de $f(u, v) = x_1 \cdot y_1$: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

b) Matriz de $f(u, v) = x_1 \cdot y_2$: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

c) Matriz de $f(u, v) = x_1 \cdot (y_1 + y_2)$: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

d) Matriz de $f(u, v) = 0$: $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

h) Matriz de $f(u, v) = x_1y_2 - x_2y_1$: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

7. a) $\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & +1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}19 & 3\\ 33 & 21\end{pmatrix}$.

8. a) $b = c$;

b) $a = d = 0$ e $b = -c$;

c) $ad = bc$.

9. a) $(\varphi \otimes \varphi)((x_1, x_2); (y_1, y_2)) =$
$= 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$;

b) $(\psi \otimes \varphi)((x_1, x_2); (y_1, y_2)) =$
$= 2x_1y_1 - 2x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2$;

c) $(\varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi)((x_1, x_2); (y_1, y_2)) =$
$= -3x_1y_2 + 3x_2y_1$.

10. $(\varphi \otimes \psi)((x_1, x_2); (y_1, y_2, y_3)) =$
$= 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2 - 2x_1y_3 - 3x_2y_3$;

$(\psi \otimes \varphi)((x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2)) =$
$= 2x_1y_1 + 2x_2y_1 - 2x_3y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_2 - 3x_3y_2$;

Não existe $\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi$.

8.4. 1. $P^t \cdot A \cdot P = B$. Logo $A \approx B$.

2. a) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Se $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $P^t \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \cdot P =$
$= \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

4. Em relação à base canônica $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

5. $P^t = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

8.5. 1. No $\mathbb{R}^2$: $ax_1y_1 + bx_2y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_2$.
No $\mathbb{R}^3$: $ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_1y_3 + bx_2y_1 + dx_2y_2 + ex_2y_3 + cx_3y_1 + ex_3y_2 + fx_3y_3$.

2. $\mathbb{R}^2$: $ax_1y_2 - ax_2y_1$.
$\mathbb{R}^3$: $ax_1y_2 - ax_2y_1 + bx_1y_3 - bx_3y_1 + cx_2y_3 - cx_3y_2$.

8.6. 1. a) $f((x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3)) = \frac{1}{2}(2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2)$.

c) $f((x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

2. a) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 2 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

8.7. 1. a) $q(y_1, y_2) = y_1^2$;

c) $q(y_1, y_2) = y_1^2 - 2y_2^2$;

e) $q(y_1, y_2) = 4y_1^2 - 4y_2^2$.

3. a) $q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - \frac{5}{4}z_2^2 + \frac{9}{5}z_3^2$.

Substituição linear: $\begin{cases}x_1 = z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{2}{5}z_3\\ x_2 = z_2 + \frac{4}{5}z_3\\ x_3 = z_3\end{cases}$

c) $q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - 10z_2^2 - \frac{19}{10}z_3^2$.

Substituição linear: $\begin{cases}x_1 = z_1 - 3z_2 - \frac{7}{10}z_3\\ x_2 = z_2 - \frac{1}{10}z_3\\ x_3 = z_3\end{cases}$

4. $q(z_1, z_2) = az_1^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a}\right)z_2^2$

Substituição linear: $\begin{cases}x_1 = z_1 - \frac{b}{a}z_2\\ x_2 = z_2\end{cases}$

2ª PARTE

1.1. 1. a) $\sqrt{2}$ e $(1, \sqrt{2} - 1)$; $-\sqrt{2}$ e $(-1, \sqrt{2} + 1)$;

b) -1 e qualquer vetor não nulo;

c) Não há valores próprios reais.

2. a) 2 e (1, 0, 0); 3 e (5, 1, 1); -1 e (1, 3, -3);

b) 0 (duplo) e (1, 0, 0) e (0, 1, 0); 2 e (0, 0, 1);

3. 3 (triplo) e (1, 0, 0, 0) e (0, 0, 0, 1);
4 e (0, 0, 1, 0).

4. $p_T(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \ldots (\lambda_n - t)$.
Os valores próprios de T são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

5. a) $t^2 - 3t + 1$; $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$;

b) $t^2 - 4$; ± 2;

c) $t^2 - 3t + 2$; 1 e 2;

d) $t^2 - 4$; ± 2.

6. $p_A(t) = (t - 2)^3(t - 3)$; 2 (duplo) e 3.

7. 1 (duplo); não há.

8. $p_A(t) = (a_{11} - t)(a_{22} - t) \ldots (a_{nn} - t)$.

1.2. 1. a) $M = \begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; b) Não existe.

2. $M = \begin{pmatrix}1 & -1 & -13 & -7\\ 2 & 1 & -37 & 1\\ 0 & 0 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$

3. $M = \begin{pmatrix}2 & -4 & -4\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

5. a) É diagonalizável pois o valor próprio -1 (duplo) tem multiplicidade geométrica 2;

b) É diagonalizável para todos os valores de m e n;

c) É diagonalizável pois há 2 valores próprios (duplos) 3 e -3 com multiplicidade geométrica 2;

d) É diagonalizável pois o valor próprio 2 (triplo) tem multiplicidade geométrica 3.

1.3. 6. *Resolução*: A é a matriz de um operador auto-adjunto T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$. Pelo teor. 2 existe uma base ortonormal C do $\mathbb{R}^n$ formada de valores próprios de T. Se P é a matriz de mudança de B para C: $P^{-1} \cdot (T)_B \cdot P = (T)_C$. Como $P^{-1} = P^t$, pois as bases são ortonormais, a resolução está concluída.

1.5. 1. a) $A^p = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}12 + 14^p & 4 \cdot 14^p - 4\\ 3 \cdot 14^p - 3 & 12 \cdot 14^p + 1\end{pmatrix}$.

2. a) $e^A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}e^{14} + 12e & 4e^{14} - 4e\\ 3e^{14} - 3e & 12e^{14} + e\end{pmatrix}$.

1.7. 1. $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

2. b) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

3. a) $p_J(t) = (\lambda - t)^n$
b) $\dim V(\lambda) = 1$

9. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2. 1. a) Hipérbole
b) Hipérbole
c) Duas retas

2. a) $\frac{x_1^2}{3} - \frac{y_1^2}{2} = 1$ (hipérbole)

3. a) Elipsóide
d) $x_1^2 + 2z_1^2 = 1$: superfície cilíndrica de diretriz elíptica

4. b) $\lambda = -1$: parábola
$\lambda < -1$: hipérbole

$$\lambda > -1 \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}: \text{um ponto} \\ \lambda > \frac{3}{2}: \text{vazio} \\ \lambda < \frac{3}{2}: \text{elipse} \end{cases}$$

3.2. 1. a) $L_0 = \frac{1}{2}(t^2 - 3t + 2)$, $L_1 = -t^2 + 2t$, $L_2 = \frac{1}{2}(t^2 - t)$.

2. a) $t^2 = L_1 + 4t^2$;
b) $t^2 + t + 1 = L_0 + 3L_1 + 7L_2$,
c) $1 = L_0 + L_1 + L_2$.

3. $L_0 = \frac{1}{24}(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$,
$L_1 = -\frac{1}{6}t(t-2)(t-3)(t-4)$,
$L_2 = \frac{1}{4}t(t-1)(t-3)(t-4)$,
$L_3 = -\frac{1}{24}t(t-1)(t-2)(t-4)$,
$L_4 = \frac{1}{24}t(t-1)(t-2)(t-3)$;
$t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 = L_0 + L_1 + 19L_2 + 97L_3 + 301L_4$
$3t^4 - 2t^3 + t^2 - t + 5 = 5L_0 + 6L_1 + 39L_2 + 200L_3 + 657L_4$.

4. $\frac{10}{3}$; $\frac{19}{2}$.

7. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.1. 1. a) $\{2^n, (-1)^n\}$;
b) $\{1, (-2)^n\}$;
c) $\{(1+\sqrt{3})^n, (1-\sqrt{3})^n\}$;
d) $\left\{\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^n \cos n\varphi, \left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^n \operatorname{sen} n\varphi\right\}$ onde $\varphi = \arg\left(\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{11})\right)$;
e) $\{(\sqrt{5})^n \cos n\varphi, (\sqrt{5})^n \operatorname{sen} n\varphi\}$ onde $\varphi = \arg(1 + 2i)$;
f) $\{3^n, n3^n\}$;
g) $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right\}$;
h) $\{1, (-1)^n\}$.

2. $\{1, 2^n, 3^n\}$.

3. $\{1, (-1)^n, 2^n, 3^n\}$.

4. $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 2 = 1 + 2 + 2$.

5. $a_n = \frac{c}{2^n}(1 + \sqrt{5})^n + \frac{d}{2^n}(1 - \sqrt{5})^n$ onde
c e *d* são as soluções do sistema linear
$(1 + \sqrt{5})c + (1 - \sqrt{5})d = 2$ e $(1 + \sqrt{5})^2 c + (1 - \sqrt{5})^2 d = 8$.

5.1. 1. a) $-2 \operatorname{sen} t$;
c) $13e^{2t}$;
e) $13e^{2t} - 5$;
g) $e^{t^2}(8t^3 + 4t^2 + 14t + 1)$;
i) $-t^3 + 2t^2 + 7t + 10$.

2. a) $\omega \cos \omega t$;
c) $(-\omega^2 + \omega) \operatorname{sen} \omega t$;
e) $(-\omega^2 + \omega^3) \operatorname{sen} \omega t$.

3. a) $-\omega \operatorname{sen} \omega t$;
d) 0.

5.2. 1. a) $D^5 - D^3 + 5D^2 - 3D - 2$;
d) $5D^3 - 19D^2 + 13D - 3$.

3. Funções constantes; polinômios de grau n − 1.

4. Sim.

5. $4e^{2t}$.

6. $t + 3$.

7. Polinômios da forma $at + (5 - 2a)$.

5.3. 1. a) $f' = 0$;
c) $f^{(n)} = 0$;
e) $f'' - 3f' + f = 0$;
g) $f'' + \omega^2 f = 0$;
i) $f'' = f$.

2. a) D^2;
c) $D^{(n)} + D^{(n-1)} + \ldots + D + 1$;
e) $D^2 + 1$.

3. a) f constante;
c) ke^t;
d) ke^{at}.

5. c) $\alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
d) $t + \alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t$.

6. c) $e^t(\alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
d) $e^t \cos t - 2e^t \operatorname{sen} t$.

5.4. 1. a) $\alpha e^t + \beta e^{-2t}$;
c) $\alpha \cos 2t + \beta \operatorname{sen} 2t$;
e) $\alpha e^{2t} + \beta e^{4/3t}$;
g) $\alpha e^t + \beta t e^t$.

2. a) $2(\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \cos\sqrt{2}t)$;
b) $e^{3/2t} + 2te^{3/2t}$;
c) $-e^{2t} + 4e^t$.

4. a) $f'' + 8f' + 16f = 0$;
b) $f'' - 9f = 0$;
c) $f'' - 4f' + 20f = 0$.

5. $e^t(2 \cos 5t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5t)$.

5.5. 1. a) $\alpha e^{2t} + \beta e^{-3t}$;
c) $\alpha + \beta e^{-2t} + \gamma e^t$;
e) $\alpha + \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} + \delta t^2 e^{2t}$;
g) $\alpha e^{5t} + \beta t e^{5t}$;
i) $\alpha \operatorname{sen} \omega t + \beta \cos \omega t$.

5.6. 2. a) $X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} \\ e^t \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$

6. b) $X(t) = \begin{pmatrix} (1 + t^2)e^{2t} \\ 1 - e^{2t} + 3te^{2t} \\ t^2e^{2t} \\ -1 + e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix}$

6.1. 1. a) 5;
c) 3;
e) 26.

4. a) $\frac{8}{17}(4, 0, 0, 1)$;
b) u_1;
c) $\frac{19}{5}(1, 1, 1, 1, 1)$.

5. a) $\frac{7}{6}u_1 + u_2 + 2u_3$.

6. (x, y, 0).

9. $[g]^\perp$ e $[g]$.

6.2. 1. a) $\frac{1}{2}(3, 3)$;
b) (2, 1);
c) (0, 0, 0);
d) $\frac{7}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

2. a) 1;
c) 12.

6.3. 1. a) $k = \frac{7}{5}$;
b) $k = \frac{53}{31}$;
c) $k = \frac{2}{7}$.

2. $l' = \frac{4}{3}$, $m' = \frac{5}{3}$.

3. $l' = \frac{37}{539}$, $m' = \frac{1.533}{539}$, $n' = \frac{-60}{49}$.