um conjunto ortonormal em relação ao produto interno (2). Deixaremos a cargo do leitor a verificação do fato de que, ao adicionarmos as funções

$$\operatorname{sen} x \quad \operatorname{sen} 2x \quad \ldots \quad \operatorname{sen} nx$$

ao conjunto acima, obtemos outro conjunto ortonormal. Podemos, portanto, utilizar o Teorema 5.5.8 para encontrar a melhor aproximação de uma função contínua em termos de um polinômio trigonométrico de grau menor ou igual a um n dado, no sentido dos mínimos quadrados. Observe que

$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = \langle f, 1 \rangle \frac{1}{2}$$

de modo que, se

$$a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

e

$$a_k = \langle f, \cos kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$$

$$b_k = \langle f, \operatorname{sen} kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$, então esses coeficientes determinam a melhor aproximação de f por mínimos quadrados. Os a_j e b_k são *coeficientes de Fourier*, bastante conhecidos, que aparecem em diversas aplicações envolvendo aproximação de funções por séries trigonométricas.

EXERCÍCIOS

1. Quais dos conjuntos de vetores a seguir formam uma base ortonormal para R^2?

(a) $\{(1\ 0)^T, (0, 1)^T\}$

(b) $\{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})^T\ (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})^T\}$

(c) $\{(1, -1)^T, (1, 1)^T\}$

(d) $\left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)^T, \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^T \right\}$

2. Sejam

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}} \right)^T \qquad \mathbf{u}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)^T$$

$$\mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T$$

(a) Mostre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ formam uma base ortonormal para R^3.

(b) Seja $\mathbf{x} = (1, 1\ 1)^T$ Escreva $\mathbf{x}$ como uma combinação linear de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ usando o Teorema 5.5.2 e use a fórmula de Parseval para calcular $\|\mathbf{x}\|$.

3. Seja S o subespaço de R^3 gerado pelos vetores $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ do Exercício 2. Seja $\mathbf{x} = (1, 2, 2)^T$ Encontre a projeção ortogonal $\mathbf{p}$ de $\mathbf{x}$ sobre S. Mostre que $(\mathbf{p} - \mathbf{x}) \perp \mathbf{u}_2$ e $(\mathbf{p} - \mathbf{x}) \perp \mathbf{u}_3$.

4. Seja θ um número real fixo e sejam

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ é uma base ortonormal para R^2
(b) Escreva um vetor arbitrário $\mathbf{y}$ em R^2 como uma combinação linear $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$.
(c) Verifique que

$$c_1^2 + c_2^2 = \|\mathbf{y}\|^2 = y_1^2 + y_2^2$$

5. Suponha que $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ formam uma base ortonormal para R^2 e seja $\mathbf{u}$ um vetor unitário em R^2. Se $\mathbf{u}^T\mathbf{u}_1 = 1/2$, determine o valor de $|\mathbf{u}^T\mathbf{u}_2|$.

6. Seja $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ uma base ortonormal para um espaço V munido de produto interno e sejam

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_3$$

Determine o valor de:
(a) $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$,
(b) $\|\mathbf{u}\|$ e $\|\mathbf{v}\|$;
(c) o ângulo θ entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

7. As funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ formam um conjunto ortonormal em $C[-\pi, \pi]$. Se

$$f(x) = 3\cos x + 2\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$$

use o Corolário 5.5.3 para determinar o valor de

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

8. O conjunto

$$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\right\}$$

é um conjunto ortonormal de vetores em $C[-\pi, \pi]$ em relação ao produto interno definido (2).
(a) Use identidades trigonométricas para escrever a função $\operatorname{sen}^4 x$ como uma combinação linear de elementos de S.
(b) Use o item (a) e o Teorema 5.5.2 para encontrar os valores das integrais a seguir.

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx$ (ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \cos 2x\,dx$
(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \cos 3x\,dx$ (iv) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \cos 4x\,dx$

9. Prove que a transposta de uma matriz ortogonal é uma matriz ortogonal.

10. Se Q é uma matriz ortogonal $n \times n$ e se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores não-nulos em R^n qual a relação entre o ângulo entre $Q\mathbf{x}$ e $Q\mathbf{y}$ e o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$? Prove.

11. Seja Q uma matriz ortogonal $n \times n$. Use indução matemática para provar cada uma das afirmações a seguir.
(a) $(Q^m)^{-1} = (Q^T)^m = (Q^m)^T$ para todo inteiro positivo m.
(b) $\|Q^m\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in R^n$

12. Seja $\mathbf{u}$ um vetor unitário em R^n e seja $H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ Mostre que H é ao mesmo tempo ortogonal e simétrica e, portanto, sua própria inversa.

13. Seja Q uma matriz ortogonal e seja $d = \det(Q)$. Mostre que $|d| = 1$

14. Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é ortogonal. O produto de duas matrizes de permutação é uma matriz de permutação? Explique.

15. Mostre que, se U é uma matriz ortogonal $n \times n$, então

$$\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + \quad + \mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T = I$$

16. Use indução matemática para mostrar que, se $Q \in R^{n\times n}$ é, ao mesmo tempo, triangular superior e ortogonal, então $\mathbf{q}_j = \pm\,\mathbf{e}_j$, $j = 1, \quad , n$.

17. Seja

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que as colunas de A formam um conjunto ortonormal em R^4.
(b) Resolva o problema de mínimos quadráticos para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cada uma das escolhas de $\mathbf{b}$ a seguir.
 (i) $\mathbf{b} = (4, 0, 0, 0)^T$
 (ii) $\mathbf{b} = (1, 2, 3, 4)^T$
 (iii) $\mathbf{b} = (1, 1, 2, 2)^T$

18. Seja A a matriz do Exercício 17
(a) Encontre a matriz de projeção P que projeta ortogonalmente vetores em R^4 sobre $I(A)$.
(b) Para cada uma das soluções $\mathbf{x}$ encontradas no Exercício 17(b), calcule $A\mathbf{x}$ e compare com $P\mathbf{b}$.

19. Seja A a matriz do Exercício 17
(a) Encontre uma base ortonormal para $N(A^T)$.
(b) Determine a matriz de projeção que projeta ortogonalmente vetores em R^4 sobre $N(A^T)$.

20. Sejam A uma matriz $m \times n$, P a matriz de projeção que projeta ortogonalmente vetores em R^m sobre $I(A)$ e Q a matriz de projeção que projeta ortogonalmente vetores em R^n sobre $I(A^T)$. Mostre que:
(a) $I - P$ é a matriz de projeção de R^m sobre $N(A^T)$;
(b) $I - Q$ é a matriz de projeção de R^n sobre $N(A)$.

21. Seja P a matriz de projeção correspondente a um subespaço S de R^m. Mostre que:
(a) $P^2 = P$ (b) $P^T = P$

22. Seja A uma matriz $m \times n$ cujos vetores colunas são ortogonais dois a dois e seja $\mathbf{b} \in R^m$. Mostre que, se $\hat{\mathbf{x}}$ é a solução de *mínimos quadráticos para o sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então

$$\hat{x}_i = \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{a}_i}{\mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

23. Considere o espaço vetorial $C[-1, 1]$ com o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

e a norma

$$\|f\| = (\langle f, f\rangle)^{1/2}$$

(a) Mostre que os vetores 1 e x são ortogonais.
(b) Calcule $\|1\|$ e $\|x\|$.
(c) Encontre a melhor aproximação de mínimos quadráticos, por uma função linear $l(x) = c_1 1 + c_2 x$, de $x^{1/3}$ em $[-1, 1]$.
(d) Esboce os gráficos de $x^{1/3}$ e de $l(x)$ em $[-1, 1]$.

24. Considere o espaço $C[0, 1]$ munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Seja S o subespaço gerado pelos vetores 1 e $2x - 1$

(a) Mostre que 1 e $2x - 1$ são ortogonais.
(b) Determine $\|1\|$ e $\|2x - 1\|$.
(c) Encontre a melhor aproximação de mínimos quadráticos para $\sqrt{x}$ por uma função pertencente ao subespaço S.

25. Seja

$$S = \{1/\sqrt{2}, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx\}$$

Mostre que S é um conjunto ortonormal em $C[-\pi, \pi]$ munido do produto interno definido por (2).

26. Encontre a melhor aproximação de mínimos quadráticos para $f(x) = |x|$ em $[-\pi, \pi]$ por um polinômio trigonométrico de grau menor ou igual a 2.

27. Seja $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ uma base ortonormal para um espaço V munido de um produto interno. Seja S_1 o subespaço gerado por $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ e seja S_2 o subespaço gerado por $\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}, \ldots, \mathbf{x}_n$. Mostre que $S_1 \perp S_2$.

28. Seja $\mathbf{x}$ um elemento do espaço vetorial V do Exercício 27 e sejam $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ as projeções ortogonais de $\mathbf{x}$ sobre S_1 e S_2, respectivamente. Mostre que:
(a) $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$,
(b) se $\mathbf{x} \in S_1^{\perp}$, então $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ e, portanto, $S_1^{\perp} = S_2$.

29. Seja S um subespaço de um espaço V munido de um produto interno. Seja $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ uma base ortogonal para S e seja $\mathbf{x} \in V$. Mostre que a melhor aproximação de $\mathbf{x}$ de mínimos quadráticos por elementos de S é dada por

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle}{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \mathbf{x}_i$$

6 O PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Nesta seção, vamos aprender um processo para a construção de uma base ortonormal para um espaço de dimensão n munido de um produto interno. Começando com um base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, o método envolve a utilização de projeções ortogonais para a construção de uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$.

Vamos construir os $\mathbf{u}_i$ de modo que $[\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}] = [\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}]$ para $k = 1, \ldots, n$. Para começar o processo, seja

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}_1\|}\right)\mathbf{x}_1 \tag{1}$$

$[\{\mathbf{u}_1\}] = [\{\mathbf{x}_1\}]$, já que $\mathbf{u}_1$ é um vetor unitário com mesma direção que $\mathbf{x}_1$. Seja $\mathbf{p}_1$ a projeção ortogonal de $\mathbf{x}_2$ sobre $[\{\mathbf{x}_1\}] = [\{\mathbf{u}_1\}]$.

$$\mathbf{p}_1 = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1$$

Pelo Teorema 5.5.7,

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1) \perp \mathbf{u}_1$$

Observe que $\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1 \neq \mathbf{0}$, já que

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1 = -\frac{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{x}_1\|}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \tag{2}$$

e $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são linearmente independentes. Definindo

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1\|}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1) \tag{3}$$