Esse sistema pode ser resolvido por substituição de baixo para cima.

Contagem das Operações. A fatoração QR de A usando transformações de Givens ou rotações planas necessita de aproximadamente $\frac{4}{3}n^3$ multiplicações, $\frac{2}{3}n^3$ somas e $\frac{1}{2}n^2$ raízes quadradas.

EXERCÍCIOS

1. Para cada um dos vetores $\mathbf{x}$ a seguir, encontre uma matriz de rotação R tal que $R\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2\mathbf{e}_1$.

(a) $\mathbf{x} = (1, 1)^T$ (b) $\mathbf{x} = (\sqrt{3},\ \ 1)^T$ (c) $\mathbf{x} = (-4, 3)^T$

2. Dado $\mathbf{x} \in R^3$, defina

$$r_{ij} = \left(x_i^2 + x_j^2\right)^{1/2} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

Em cada um dos itens a seguir, encontre uma transformação de Givens G_{ij} tal que as coordenadas i e j de $G_{ij}\mathbf{x}$ são r_{ij} e 0, respectivamente.

(a) $\mathbf{x} = (3, 1\ \ 4)^T$, $\quad i = 1, j = 3$
(b) $\mathbf{x} = (1,\ \ \ 1\ 2)^T$, $\quad i = 1, j = 2$
(c) $\mathbf{x} = (4, 1\ \ \sqrt{3})^T$ $\quad i = 2, j = 3$
(d) $\mathbf{x} = (4, 1\ \ \sqrt{3})^T$ $\quad i = 3, j = 2$

3. Para cada um dos vetores $\mathbf{x}$ dados a seguir, encontre uma transformação de Householder tal que $H\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}_1$, onde $\alpha = \|\mathbf{x}\|_2$.

(a) $\mathbf{x} = (8,\ \ 1\ -4)^T$ (b) $\mathbf{x} = (6, 2, 3)^T$ (c) $\mathbf{x} = (7, 4, -4)^T$

4. Para cada um dos vetores a seguir, encontre uma transformação de Householder que anula suas duas últimas coordenadas.

(a) $\mathbf{x} = (5, 8, 4, 1)^T$ (b) $\mathbf{x} = (4, -3,\ \ 2,\ \ 1, 2)^T$

5. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determine o escalar β e o vetor $\mathbf{v}$ para a matriz de Householder $H = I - (1/\beta)\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ que anula os três últimos elementos de $\mathbf{a}_1$.
(b) Sem formar explicitamente a matriz H, calcule o produto HA.

6. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Use transformações de Householder para transformar A em uma matriz triangular superior R. Transforme também o vetor $\mathbf{b}$, isto é, calcule $\mathbf{b}^{(1)} = H_2H_1\mathbf{b}$.
(b) Resolva $R\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)}$ para $\mathbf{x}$ e verifique sua resposta calculando o resíduo $\mathbf{b}\quad A\mathbf{x}$.

7. Para cada um dos sistemas a seguir, use reflexões de Givens para transformá-lo em um sistema triangular superior e depois resolva esse sistema triangular.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$

(c) $\quad 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 2$
$$x_2 + 3x_3 = 2$$

8. Suponha que você quer anular a última coordenada de um vetor $\mathbf{x}$ e deixar as $n - 2$ primeiras inalteradas. Quantas operações são necessárias se isso for feito através de uma transformação de Givens G? E de uma transformação de Householder H? Se A é uma matriz $n \times n$, quantas operações são necessárias para calcular GA e HA?

9. Seja $H_k = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ uma transformação de Householder com
$$\mathbf{u} = (0, \ldots, 0, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)^T$$
Sejam $\mathbf{b} \in R^n$ e A uma matriz $n \times n$. Quantas somas e multiplicações são necessárias para se calcular (a) $H_k\mathbf{b}$; (b) H_kA?

10. Seja $Q^T = G_{n-k} \cdots G_2G_1$, onde cada G_i é uma transformação de Givens. Sejam $\mathbf{b} \in R^n$ e A uma matriz $n \times n$. Quantas somas e multiplicações são necessárias para se calcular (a) $Q^T\mathbf{b}$; (b) Q^TA?

11. Sejam R_1 e R_2 duas matrizes de rotação 2×2 e sejam G_1 e G_2 duas transformações 2×2 de Givens. Indique o tipo de transformação em cada um dos itens a seguir.

(a) R_1R_2 (b) G_1G_2 (c) R_1G_1 (d) G_1R_1

12. Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vetores distintos em R^n com $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2$. Defina
$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad Q = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$
Mostre que:

(a) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = 2(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T\mathbf{x}$ (b) $Q\mathbf{x} = \mathbf{y}$

13. Seja $\mathbf{u}$ um vetor unitário em C^n e seja
$$U = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$
(a) Mostre que $\mathbf{u}$ é um autovetor de U Qual o autovalor associado?
(b) Seja $\mathbf{z}$ um vetor não-nulo em C^n que é ortogonal a $\mathbf{u}$. Mostre que $\mathbf{z}$ também é um autovetor de U. Qual o autovalor associado?

14. Seja $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$, onde Q_1 e Q_2 são ortogonais e R_1 e R_2 são triangulares superiores invertíveis.
(a) Mostre que $Q_1^TQ_2$ é diagonal.
(b) Qual a relação entre R_1 e R_2? Explique.

6 A DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

Em muitas aplicações há necessidade de determinar o posto de uma matriz ou de determinar se a matriz tem ou não posto máximo. Teoricamente, poderíamos usar o método de Gauss para colocar a matriz em forma escada e depois contar o número de linhas não-nulas. No entanto, essa abordagem não é prática ao se trabalhar com aritmética de precisão finita. Se A não tem posto máximo e U é sua forma escada calculada, então, devido a erros de aproximação no processo, dificilmente U vai ter o número correto de linhas nulas. Na prática, a matriz de coeficientes envolve, geralmente, algum erro. Isso pode dever-se a erros nos dados ou ao sistema numérico finito. Portanto, em geral é mais prático perguntar se A está "próxima" de uma matriz que não tem posto máximo. No entanto, pode acontecer que A esteja próxima de uma matriz que não tem posto máximo, mas não sua forma escada calculada U

Vamos supor, em toda esta seção, que A é uma matriz $m \times n$ com $m \geq n$. (Essa hipótese é formulada apenas por conveniência; todos os resultados continuam válidos no caso $m < n$.) Vamos apresentar um método para determinar quão próxima A está de uma matriz de posto menor. O método envolve a fatoração de A em um produto $U\Sigma V^T$, onde U é uma matriz ortogonal $m \times m$, V é uma matriz ortogonal