

SOLUÇÃO. Os autovalores de A são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$ com autovetores associados $\mathbf{x}_1 = (4, 3)^T$ e $\mathbf{x}_2 = (1, -1)^T$. Logo,

$$A = XDX^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

e a solução é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= e^{At} \mathbf{Y}_0 \\ &= X e^{Dt} X^{-1} \mathbf{Y}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4e^{6t} + 2e^{-t} \\ 3e^{6t} - 2e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Compare com o Exemplo 1 da Seção 2. □

EXEMPLO 7. Use a exponencial de uma matriz para resolver o problema de valor inicial

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO. Como a matriz A não é diagonalizável, vamos calcular e^{At} pela definição. Observe que $A^3 = O$, de modo que

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A solução do problema de valor inicial é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= e^{At} \mathbf{Y}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + t + 2t^2 \\ 1 + 4t \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

EXERCÍCIOS

1. Fatore cada uma das matrizes A a seguir em um produto XDX^{-1} , onde D é diagonal.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

2. Para cada uma das matrizes no Exercício 1, use a fatoração XDX^{-1} para calcular A^6 .
 3. Para cada uma das matrizes invertíveis no Exercício 1, use a fatoração XDX^{-1} para calcular A^{-1} .
 4. Para cada uma das matrizes a seguir, encontre uma matriz B tal que $B^2 = A$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Seja A uma matriz diagonalizável $n \times n$ com matriz diagonalizante X . Mostre que a matriz $Y = (X^{-1})^T$ diagonaliza A^T .
 6. Seja A uma matriz diagonalizável cujos autovalores são iguais a 1 ou a -1 . Mostre que $A^{-1} = A$.
 7. Mostre que qualquer matriz 3×3 da forma

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

não é diagonalizável.

8. Para cada uma das matrizes a seguir, encontre todos os valores possíveis do escalar α que faz com que a matriz não seja diagonalizável ou mostre que não existe tal valor.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

9. Seja A uma matriz 4×4 e seja λ um autovalor de multiplicidade 3. Se $A - \lambda I$ tem posto 1, A é diagonalizável? Explique.
 10. Seja A uma matriz $n \times n$ com autovalores reais positivos $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$. Seja $\mathbf{x}_i$ o autovetor associado a λ_i para cada i e seja $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$.

(a) Mostre que $A^m \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^m \mathbf{x}_i$.

(b) Se $\lambda_1 = 1$, mostre que $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1$.

11. Seja A uma matriz $n \times n$ com um autovalor λ de multiplicidade n . Mostre que A é diagonalizável se e somente se $A = \lambda I$.
 12. Mostre que uma matriz nilpotente não-nula não é diagonalizável.
 13. Seja A uma matriz diagonalizável com matriz diagonalizante X . Mostre que os vetores colunas de X associados aos autovalores não-nulos de A formam uma base para $R(A)$.

- 14.** Segue do Exercício 13 que, para uma matriz diagonalizável, o número de autovalores não-nulos (contados de acordo com suas multiplicidades) é igual ao posto da matriz. Dê um exemplo de uma matriz não diagonalizável cujo posto não é igual ao número de autovalores não-nulos.
- 15.** Seja A uma matriz $n \times n$ e seja λ um autovalor de A cujo auto-espço tem dimensão k , onde $1 < k < n$. Qualquer base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ para o auto-espço pode ser estendida a uma base $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n\}$ para R^n . Sejam $X = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ e $B = X^{-1}AX$.
- (a) Mostre que B é da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda I & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

onde I é a matriz identidade $k \times k$.

- (b) Use o Teorema 6.1.1 para mostrar que λ é um autovalor de A com multiplicidade pelo menos k .
- 16.** Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vetores não-nulos em R^n , $n \geq 2$, e seja $A = \mathbf{xy}^T$. Mostre que:
- (a) Zero é um autovalor de A com $n - 1$ autovetores linearmente independentes e, portanto, tem multiplicidade pelo menos $n - 1$ (ver Exercício 15);
- (b) O outro autovalor de A é

$$\lambda_n = \text{tr } A = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado a λ_n ;

(c) Se $\lambda_n = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \neq 0$, então A é diagonalizável.

- 17.** Seja A uma matriz diagonalizável $n \times n$. Prove que, se B é uma matriz semelhante a A , então B é diagonalizável.
- 18.** Mostre que, se A e B são duas matrizes $n \times n$ com a mesma matriz diagonalizante X , então $AB = BA$.
- 19.** A cidade de Mawtookit mantém uma população constante de 300.000 pessoas. Uma pesquisa em ciência política estimou que existem na cidade 150.000 independentes, 90.000 democratas e 60.000 republicanos.* Estimou-se, também, que, a cada ano, 20% dos independentes tornam-se democratas e 10% tornam-se republicanos. Analogamente, 20% dos democratas tornam-se independentes e 10% tornam-se republicanos, enquanto 10% dos republicanos viram democratas e 10% tornam-se independentes a cada ano. Seja

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 150.000 \\ 90.000 \\ 60.000 \end{pmatrix}$$

e seja $\mathbf{x}^{(1)}$ um vetor representando o número de pessoas em cada grupo após 1 ano.

- (a) Encontre uma matriz A tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)}$.
- (b) Mostre que $\lambda_1 = 1, 0, \lambda_2 = 0, 5$ e $\lambda_3 = 0, 7$ são os autovalores de A e fatore A em um produto DXD^{-1} , onde D é diagonal.
- (c) Qual grupo deverá dominar a longo prazo? Justifique sua resposta calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \mathbf{x}$.
- 20.** Na Aplicação 1, suponha que existem inicialmente p mulheres casadas e $10.000 - p$ mulheres solteiras ou divorciadas, onde $0 \leq p \leq 10.000$. Determine quantas mulheres casadas e quantas solteiras ou divorciadas deverão existir a longo prazo. Sua resposta depende de p ? Explique.
- 21.** Use a definição de exponencial de uma matriz para calcular e^A para cada uma das matrizes a seguir.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Nos Estados Unidos, existem apenas dois grandes partidos, o Partido Democrata e o Partido Republicano; eleitores de outros partidos, bem pequenos, são chamados de independentes. (N. T.)

22. Calcule e^A para cada uma das matrizes a seguir.

$$(a) A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Resolva o problema de valor inicial $Y' = AY$, $Y(0) = Y_0$ em cada um dos itens seguintes calculando $e^A Y_0$.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

24. Seja λ um autovalor de uma matriz A $n \times n$ e seja x um autovetor associado a λ . Mostre que e^λ é um autovalor de e^A e que x é um autovetor associado a e^λ .

25. Mostre que e^A é invertível para toda matriz diagonalizável A .

26. Seja A uma matriz diagonalizável com polinômio característico

$$p(\lambda) = a_1 \lambda^n + a_2 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n+1}$$

(a) Se D é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores de A , mostre que

$$p(D) = a_1 D^n + a_2 D^{n-1} + \cdots + a_{n+1} I = O$$

(b) Mostre que $p(A) = O$.

(c) Mostre que, se $a_{n+1} \neq 0$, então A é invertível e $A^{-1} = q(A)$ para algum polinômio q de grau menor do que n .

4 MATRIZES AUTO-ADJUNTAS

Vamos denotar por C^n o espaço vetorial de todas as n -uplas de números complexos. O conjunto C dos números complexos será o nosso corpo de escalares. Já vimos que uma matriz A com todos os elementos reais pode ter autovalores e autovetores complexos. Vamos estudar nesta seção matrizes com elementos complexos e considerar os análogos complexos de matrizes simétricas e ortogonais.

PRODUTOS INTERNOS COMPLEXOS

Se $\alpha = a + bi$ é um escalar complexo, o comprimento de α é dado por

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$