$H(\mathbf{x}_0)$ é chamada de *matriz hessiana* de F em $\mathbf{x}_0$.

O ponto estacionário pode ser classificado da seguinte maneira:

(i) $\mathbf{x}_0$ é um ponto de mínimo local de F se $H(\mathbf{x}_0)$ é positiva definida;
(ii) $\mathbf{x}_0$ é um ponto de máximo local de F se $H(\mathbf{x}_0)$ é negativa definida;
(iii) $\mathbf{x}_0$ é um ponto de sela de F se $H(\mathbf{x}_0)$ é indefinida.

EXEMPLO 6. Encontre os pontos de mínimo local para a função

$$F(x, y, z) = x^2 + xz - 3\cos y + z^2$$

SOLUÇÃO. As derivadas parciais de primeira ordem de F são

$$F_x = 2x + z$$
$$F_y = 3\,\mathrm{sen}\,y$$
$$F_z = x + 2z$$

Temos que (x, y, z) é um ponto estacionário de F se e somente se $x = z = 0$ e $y = n\pi$, onde n é um inteiro. Seja $\mathbf{x}_0 = (0, 2k\pi, 0)^T$. A matriz hessiana de F em $\mathbf{x}_0$ é dada por

$$H(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de $H(\mathbf{x}_0)$ são 3, 3 e 1. Como os autovalores são todos positivos, $H(\mathbf{x}_0)$ é positiva definida e, portanto, F tem um mínimo local em $\mathbf{x}_0$. Por outro lado, em um ponto estacionário da forma $\mathbf{x}_1 = (0, (2k-1)\pi, 0)^T$, a matriz hessiana é

$$H(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de $H(\mathbf{x}_1)$ são -3, 3 e 1, logo $H(\mathbf{x}_1)$ é indefinida e $\mathbf{x}_1$ é um ponto de sela de F. □

EXERCÍCIOS

1. Encontre a matriz associada a cada uma das formas quadráticas a seguir.

(a) $3x^2 - 5xy + y^2$
(b) $2x^2 + 3y^2 + z^2 + xy - 2xz + 3yz$
(c) $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - 2xz + 3yz$

2. Reordene os autovalores no Exemplo 2 de modo que $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$ e refaça o exemplo. Em que quadrantes vão ficar os semi-eixos positivos de x' e y'? Esboce o gráfico e compare-o com a Fig. 6.5.3.

3. Para cada um dos itens a seguir, encontre uma mudança apropriada de coordenadas (isto é, uma rotação e/ou uma translação), de modo que a cônica resultante esteja em forma canônica; identifique a curva e esboce seu gráfico.

(a) $x^2 + xy + y^2 - 6 = 0$
(b) $3x^2 + 8xy + 3y^2 + 28 = 0$
(c) $-3x^2 + 6xy + 5y^2 - 24 = 0$
(d) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y - 1 = 0$