

EXERCÍCIOS

- Sejam $\mathbf{x} = (-1, -1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{y} = (1, 1, 5, -3)^T$. Mostre que $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Calcule $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{y}\|_2$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2$ e verifique a validade do teorema de Pitágoras.
- Seja $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{y} = (8, 2, 2, 0)^T$.
 - Encontre o ângulo θ entre \mathbf{x} e \mathbf{y} .
 - Encontre a projeção vetorial \mathbf{p} de \mathbf{x} sobre \mathbf{y} .
 - Verifique que $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ é ortogonal a \mathbf{p} .
 - Calcule $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|_2$, $\|\mathbf{p}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_2$ e verifique a validade do teorema de Pitágoras.
- Seja $\mathbf{w} = (1/4, 1/2, 1/4)^T$ e use a Equação (1) para definir um produto interno em \mathbb{R}^3 . Sejam $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{y} = (-5, 1, 3)^T$.
 - Mostre que \mathbf{x} e \mathbf{y} são ortogonais em relação a esse produto interno com peso.
 - Calcule os valores de $\|\mathbf{x}\|$ e $\|\mathbf{y}\|$ para esse produto interno.
- Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Determine o valor de cada uma das expressões a seguir.

(a) $\langle A, B \rangle$ (b) $\|A\|_F$ (c) $\|B\|_F$ (d) $\|A + B\|_F$

- Mostre que a Equação (2) define um produto interno em $\mathbb{R}^{m \times n}$.
- Mostre que o produto interno definido pela Equação (3) satisfaz as duas últimas condições na definição de produto interno.
- Para $C[0, 1]$ com produto interno definido por (3), calcule:

(a) $\langle e^x, e^{-x} \rangle$ (b) $\langle x, \sin \pi x \rangle$ (c) $\langle x^2, x^3 \rangle$

- Para $C[0, 1]$ com produto interno definido por (3), considere os vetores 1 e x .
 - Encontre o ângulo θ entre 1 e x .
 - Determine a projeção vetorial \mathbf{p} de 1 sobre x e verifique que $1 - \mathbf{p}$ é ortogonal a \mathbf{p} .
 - Calcule $\|1 - \mathbf{p}\|$, $\|\mathbf{p}\|$, $\|1\|$ e verifique a validade do teorema de Pitágoras.
- Para $C[-\pi, \pi]$ com produto interno definido por (6), mostre que $\cos mx$ e $\sin nx$ são ortogonais e que ambos são vetores unitários. Determine a distância entre os dois vetores.
- Mostre que as funções x e x^2 são ortogonais em P_5 em relação ao produto interno definido por (5), onde $x_i = (i - 3)/2$ para $i = 1, \dots, 5$.
- Considere em P_5 o produto interno como no Exercício 10 e a norma definida por

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \left\{ \sum_{i=1}^5 [p(x_i)]^2 \right\}^{1/2}$$

Calcule:

(a) $\|x\|$ (b) $\|x^2\|$ (c) a distância entre x e x^2

- Se V é um espaço munido de um produto interno, mostre que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

satisfaz as duas primeiras propriedades na definição de norma.

- Mostre que

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

define uma norma em \mathbb{R}^n .

14. Mostre que

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

define uma norma em R^n .

15. Calcule $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_\infty$ para cada um dos vetores a seguir pertencentes a R^3 .

(a) $\mathbf{x} = (-3, 4, 0)^T$ (b) $\mathbf{x} = (-1, -1, 2)^T$ (c) $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$

16. Sejam $\mathbf{x} = (5, 2, 4)^T$ e $\mathbf{y} = (3, 3, 2)^T$. Calcule $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$. Para qual dessas normas os dois vetores estão mais próximos? Para qual eles estão mais longe?

17. Sejam \mathbf{x} e \mathbf{y} dois vetores em um espaço com produto interno. Mostre que, se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, então a distância entre \mathbf{x} e \mathbf{y} é

$$(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)^{1/2}$$

18. Considere R^n com o produto interno

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Encontre uma fórmula para a distância entre dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$.

19. Seja $\mathbf{x} \in R^n$. Mostre que $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2$.

20. Seja $\mathbf{x} \in R^2$. Mostre que $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$.

[Sugestão: Escreva \mathbf{x} na forma $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ e use a desigualdade triangular.]

21. Dê um exemplo de um vetor não-nulo $\mathbf{x} \in R^2$ para o qual

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_1$$

22. Mostre que, em qualquer espaço vetorial normado,

$$\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$$

23. Mostre que, quaisquer que sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} em um espaço vetorial normado,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq | \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| |$$

24. Mostre que, quaisquer que sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} em um espaço vetorial munido de um produto interno,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

Interprete geometricamente esse resultado para o espaço vetorial R^2 .

25. O resultado do Exercício 24 não é válido para normas que não estão associadas a produtos internos. Dê um exemplo disso em R^2 para a norma $\|\cdot\|_1$.

26. Determine se as expressões a seguir definem ou não normas em $C[a, b]$.

(a) $\|f\| = |f(a)| + |f(b)|$

(b) $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$

(c) $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

27. Seja $\mathbf{x} \in R^n$. Mostre que:

(a) $\|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty$ (b) $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty$

Dê exemplos de vetores em R^n para os quais as igualdades nos itens (a) e (b) são válidas.

28. Desenhe o conjunto de pontos $(x_1, x_2) = \mathbf{x}^T$ em R^2 para os quais:

(a) $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ (b) $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ (c) $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$

29. Considere o espaço vetorial R^n com o produto interno $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$. Mostre que, qualquer que seja a matriz $A \ m \times n$, temos:

(a) $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T \mathbf{y} \rangle$ (b) $\langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|A\mathbf{x}\|^2$