O ESPAÇO VETORIAL P_n

Vamos denotar por P_n o conjunto de todos os polinômios de grau menor do que n*. Defina $p + q$ e αp por

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x)$$

e

$$(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$$

para todo número real x. É fácil verificar que os axiomas de A1 a A8 são satisfeitos. Logo, P_n é um espaço vetorial em relação às operações usuais de soma e multiplicação por um escalar de funções.

PROPRIEDADES ADICIONAIS DE ESPAÇOS VETORIAIS

Vamos encerrar esta seção com um teorema que enuncia as três propriedades mais fundamentais de espaços vetoriais. Outras propriedades importantes são dadas nos Exercícios 7, 8 e 9.

Teorema 3.1.1. *Se V é um espaço vetorial e* $\mathbf{x}$ *é um elemento de V, então:*

(i) $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
(ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ *implica que* $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ (*isto é, a inversa aditiva de* $\mathbf{x}$ *é única*);
(iii) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Demonstração. Dos axiomas A6 e A8, tem-se

$$\mathbf{x} = 1\mathbf{x} = (1+0)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = \mathbf{x} + 0\mathbf{x}$$

Logo,

$$-\mathbf{x} + \mathbf{x} = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + 0\mathbf{x}) = (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) + 0\mathbf{x} \qquad \text{(A2)}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0\mathbf{x} = 0\mathbf{x} \qquad \text{(A1, A3 e A4)}$$

Para provar (ii), suponha que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Então

$$-\mathbf{x} = -\mathbf{x} + \mathbf{0} = -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

Portanto,

$$-\mathbf{x} = (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) + \mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{y} = \mathbf{y} \qquad \text{(A1, A2, A3 e A4)}$$

Finalmente, para provar (iii), observe que

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x} = (1 + (-1))\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} \qquad \text{[(i) e A6]}$$

Logo,

$$\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{(A8)}$$

e, de (ii), tem-se

$$(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$$ □

EXERCÍCIOS

1. Considere os vetores $\mathbf{x}_1 = (8, 6)^T$ e $\mathbf{x}_2 = (4, -1)^T$ em R^2.
   (a) Encontre o comprimento de cada vetor.
   (b) Seja $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Determine o comprimento de $\mathbf{x}_3$. Qual a relação entre seu comprimento e a soma dos comprimentos de $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$?

* Incluindo o polinômio identicamente nulo. (N.T.)

(c) Desenhe um gráfico ilustrando como $\mathbf{x}_3$ pode ser construído geometricamente usando $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$. Use esse gráfico para dar uma interpretação geométrica da sua resposta em (b).

2. Repita o Exercício 1 para os vetores $\mathbf{x}_1 = (2, 1)^T$ e $\mathbf{x}_2 = (6, 3)^T$.

3. Seja C o conjunto dos números complexos. Defina a soma em C por

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

e defina a multiplicação por um escalar por

$$\alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi$$

para todos os números reais α. Mostre que C é um espaço vetorial em relação a essas operações.

4. Mostre que $R^{m\times n}$, com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar, satisfaz os oito axiomas de espaços vetoriais.

5. Mostre que $C[a, b]$, com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar, satisfaz os oito axiomas de espaços vetoriais.

6. Seja P o conjunto de todos os polinômios. Mostre que P, com as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar para funções, forma um espaço vetorial.

7. Mostre que o elemento $\mathbf{0}$ de um espaço vetorial é único.

8. Sejam $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ vetores em um espaço vetorial V. Mostre que, se

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$$

então $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

9. Seja V um espaço vetorial e seja $\mathbf{x} \in V$. Mostre que:
(a) $\beta\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todos os escalares β;
(b) se $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

10. Seja S o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Defina a multiplicação por um escalar e a soma em S por

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$

Usamos o símbolo $\oplus$ para denotar a soma nesse sistema para evitar confusão com a soma usual $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ de vetores linhas. Mostre que S, junto com a multiplicação usual por um escalar e a operação $\oplus$, não é um espaço vetorial. Quais dos oito axiomas não são válidos?

11. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais com a soma definida por

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e a multiplicação por um escalar definida por

$$\alpha \circ (x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$

Como a multiplicação por um escalar é definida de maneira diferente da usual, usamos um símbolo diferente para evitar confusão com a multiplicação usual de um vetor linha por um escalar. V é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

12. Denote por R^+ o conjunto dos números reais positivos. Defina a operação de multiplicação por um escalar por

$$\alpha \circ x = x^\alpha$$

para cada $x \in R^+$ e para cada número real α. Defina a operação de soma por

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{para todos} \quad x, y \in R^+$$

Então, para esse sistema, o produto do escalar -3 por ½ é dado por

$$-3 \circ \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

e a soma de 2 com 5 é dada por

$$2 \oplus 5 = 2 \cdot 5 = 10$$

R^+ é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

13. Seja R o conjunto de todos os números reais. Defina a multiplicação por um escalar por

$$\alpha x = \alpha \cdot x \qquad \text{(a multiplicação usual de números reais)}$$

e a soma, denotada por $\oplus$, por

$$x \oplus y = \max(x, y) \qquad \text{(o máximo entre dois números)}$$

R é um espaço vetorial em relação a essas operações? Justifique sua resposta.

14. Denote por Z o conjunto de todos os números inteiros com a soma definida da maneira usual e a multiplicação por um escalar definida por

$$\alpha \circ k = [[\alpha]] \cdot k \quad \text{para todos} \quad k \in Z$$

onde $[[\alpha]]$ denota o maior inteiro menor ou igual a α. Por exemplo,

$$2{,}25 \circ 4 = [[2{,}25]] \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$$

Mostre que Z não é um espaço vetorial em relação a essas operações. Quais dos axiomas não são válidos?

15. Denote por S o conjunto de todas as seqüências infinitas de números reais com a multiplicação por um escalar e a soma definidas por

$$\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$$

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

Mostre que S é um espaço vetorial.

16. Podemos definir uma bijeção entre os elementos de P_n e de R^n por

$$p(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n)^T = \mathbf{a}$$

Mostre que, se $p \leftrightarrow \mathbf{a}$ e $q \leftrightarrow \mathbf{b}$, então

(a) $\alpha p \leftrightarrow \alpha\mathbf{a}$ qualquer que seja o escalar α;
(b) $p + q \leftrightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

[Em geral, dois espaços vetoriais são ditos *isomorfos* se existe uma bijeção entre eles que preserva a multiplicação por um escalar e a soma como em (a) e (b).]

2 SUBESPAÇOS

Dado um espaço vetorial V, é muitas vezes possível formar um outro espaço vetorial usando um subconjunto S de V e as operações de V. Como V é um espaço vetorial, as operações de soma e multiplicação por um escalar sempre produzem um outro vetor em V. Para um novo sistema, usando um subconjunto S de V, ser um espaço vetorial, o conjunto S tem que ser fechado em relação às operações de soma e multiplicação por um escalar. Em outras palavras, a soma de dois elementos em S tem que ser sempre um elemento de S e a multiplicação de um elemento de S por um escalar tem que pertencer sempre à S.

EXEMPLO 1. Seja $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \; x_2 = 2x_1 \right\}$. S é um subconjunto de R^2. Se $\begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix}$ é um elemento qualquer de S e α é um escalar arbitrário, então

$$\alpha \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha c \\ 2\alpha c \end{pmatrix}$$

é um elemento de S. Se $\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix}$ são dois elementos arbitrários de S, então sua soma

$$\begin{pmatrix} a + b \\ 2a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ 2(a + b) \end{pmatrix}$$