resolução lista de exercícios espaço com produto interno

1) $\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$\langle (a,b,c,d), (x,y,z,w) \rangle = 2ax + by + cz + dw$

1) sejam $u_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ $u_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ e $v = (x, y, z, w)$

P1) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2), (x,y,z,w) \rangle =$

$= 2(a_1+a_2)x + (b_1+b_2)y + (c_1+c_2)z + (d_1+d_2)w$

$= (2a_1x + b_1y + c_1z + d_1w) + (2a_2x + b_2y + c_2z + d_2w)$

$= \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$.

P2) seja $\lambda \in \mathbb{R}$

$\langle \lambda u_1, v \rangle = \langle (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1), (x, y, z, w) \rangle =$

$= 2(\lambda a_1)x + (\lambda b_1)y + (\lambda c_1)z + (\lambda d_1)w$

$= \lambda (2a_1x + b_1y + c_1z + d_1w)$

$= \lambda \langle u_1, v \rangle$

P3) $\langle u_1, v \rangle = 2a_1x + b_1y + c_1z + d_1w =$

$= 2xa_1 + yb_1 + zc_1 + wd_1 = \langle v, u_1 \rangle$.

P4) seja $v \neq 0$

$\langle v, v \rangle = 2x^2 + y^2 + z^2 + w^2 > 0$ (pois pelo menos uma das entradas de v é não nula).

$\therefore$ Temos um produto interno!

2) $T: W \to V$ injetora

$\langle \cdot, \cdot \rangle_T : W \times W \to \mathbb{R}$, $\langle u, v \rangle_T = \langle T(u), T(v) \rangle$

sejam $u, v, w \in W$.

(P1) $\langle u+v, w \rangle_T = \langle T(u+v), T(w) \rangle =$

$= \langle T(u) + T(v), T(w) \rangle =$

$= \langle T(u), T(w) \rangle + \langle T(v), T(w) \rangle$

$= \langle u, w \rangle_T + \langle v, w \rangle_T$

(P2) seja $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\langle \lambda u, w \rangle_T = \langle T(\lambda u), T(w) \rangle = \langle \lambda T(u), T(w) \rangle$

$= \lambda \langle T(u), T(w) \rangle = \lambda \langle u, w \rangle_T$

(P3) $\langle u, v \rangle_T = \langle T(u), T(v) \rangle = \overline{\langle T(v), T(u) \rangle}$

$= \overline{\langle v, u \rangle_T}$

(P4) seja $u \neq 0$ (Como T é inj, $T(u) \neq 0$)

$\langle u, u \rangle_T = \langle \underbrace{T(u)}_{\neq 0}, \underbrace{T(u)}_{\neq 0} \rangle > 0$

$\therefore \langle \cdot, \cdot \rangle_T$ é um p. i em W.

3) A resolução análoga a questão 1.

4) $\langle p, q \rangle = p(1) q(1)$

(P1), (P2) (P3) são satisfeitas

(P4) não é válida!

Tome $p(x) = x - 1$ $(p \neq 0)$

$\langle p, p \rangle = p(1) \cdot p(1) = 0$

5) a) $u = (2, 1, 3)$, $v = (1, 7, k)$

$0 = \langle u, v \rangle = 2 + 7 + 3k$

$3k = -9$

$\boxed{k = -3}$

b) $u = (k, k, 1)$, $v = (k, 5, 6)$

$0 = \langle u, v \rangle = k^2 + 5k + 6$

$k^2 + 5k + 6 = 0$

$k_1 = -2 \qquad k_2 = -3$

6) $V = M_2(\mathbb{R})$

$\langle A, B \rangle = \det(AB)$

não def um produto interno!

(P1) $\langle A+B, C \rangle = \det((A+B)C) = \det(AC + BC)$

$\neq \det(AC) + \det(BC)$

(P2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$

$\langle 2A, B \rangle = \det(2AB) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36$

$\neq$

$2\langle A, B \rangle = 2\det(AB) = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 = 18$

(P4) seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A \neq 0$, mas

$\langle A, A \rangle = \det(A^2) = 0$

7) $\langle u, v \rangle = 3 + 2i$

a) $\langle (2-4i)u, v \rangle = (2-4i)\langle u, v \rangle = (2-4i) \cdot (3+2i)$

$= 14 - 8i$

b) $\langle u, (3+2i)v \rangle = \overline{(3+2i)}\langle u, v \rangle =$

$= (3-2i)(3+2i) = 9 + 4 = 13$.

2) $T: W \to V$ injetora

$\langle \cdot , \cdot \rangle_T : W \times W \to \mathbb{R}$, $\langle u, v \rangle_T = \langle T(u), T(v) \rangle$

sejam $u, v, w \in W$.

(P1) $\langle u+v, w \rangle_T = \langle T(u+v), T(w) \rangle =$
$= \langle T(u)+T(v), T(w) \rangle =$
$= \langle T(u), T(w) \rangle + \langle T(v), T(w) \rangle$
$= \langle u, w \rangle_T + \langle v, w \rangle_T$

(P2) seja $\lambda \in \mathbb{K}$.
$\langle \lambda u, w \rangle_T = \langle T(\lambda u), T(w) \rangle = \langle \lambda T(u), T(w) \rangle$
$= \lambda \langle T(u), T(w) \rangle = \lambda \langle u, w \rangle_T$

(P3) $\langle u, v \rangle_T = \langle T(u), T(v) \rangle = \overline{\langle T(v), T(u) \rangle}$
$= \overline{\langle v, u \rangle_T}$

(P4) seja $u \neq 0$ (Como T é inj, $T(u) \neq 0$)
$\langle u, u \rangle_T = \langle \underbrace{T(u)}_{\neq 0}, \underbrace{T(u)}_{\neq 0} \rangle > 0$

$\therefore \langle \cdot , \cdot \rangle_T$ é um p. i em W.

3) A resolução análoga a questão 1.

4) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1)$
(P1), (P2) (P3) são satisfeitas
(P4) não é válida!
Tome $p(x) = x-1$ $(p \neq 0)$
$\langle p, p \rangle = p(1) \cdot p(1) = 0$

8) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$.

a) $\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx$

$= \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

b) $\langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^{1} = 0$

c) $\langle 1, x^2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx =$

$= \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}$