MATRIZES, VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Março 2012

Matrizes, Vetores e Geometria Analítica

Editor, Coordenador de Revisão, Supervisor de Produção, Capa e Ilustrações:
Reginaldo J. Santos

ISBN 85-7470-014-2

Ficha Catalográfica

Santos, Reginaldo J.
S237m Matrizes, Vetores e Geometria Analítica / Reginaldo J. Santos - Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2012.

1. Geometria Analítica I. Título

CDD: 516.3

Sumário

Prefácio

Esse texto cobre o material para um curso de Geometria Analítica usando Matrizes e Vetores ministrado para estudantes da área de Ciências Exatas. O texto pode, mas **não** é necessário, ser acompanhado um programa como o MATLAB® *, SciLab ou o Maxima.

O conteúdo é dividido em sete capítulos. O Capítulo 1 trata das matrizes e sistemas lineares. Aqui todas as propriedades da álgebra matricial são demonstradas. A resolução de sistemas lineares é feita usando somente o método de Gauss-Jordan (transformando a matriz até que ela esteja na forma escalonada reduzida). Este método requer mais trabalho do que o método de Gauss (transformando a matriz, apenas, até que ela esteja na forma escalonada). Ele foi o escolhido, por que também é usado no estudo da inversão de matrizes no Capítulo 2. Neste Capítulo é também estudado o determinante, que é definido usando cofatores. As subseções 2.2.2 e 2.2.3 são independentes entre si. As demonstrações dos resultados deste capítulo podem ser, a critério do leitor, feitas somente para matrizes 3×3.

O Capítulo 3 trata de vetores no plano e no espaço. Os vetores são definidos de forma geométrica, assim como a soma e a multiplicação por escalar. São provadas algumas propriedades geometricamente. Depois são introduzidos sistemas de coordenadas de forma natural sem a necessidade da definição de base. Os produtos escalar e vetorial são definidos geometricamente. O Capítulo 4 trata de retas e planos no espaço. São estudados

*MATLAB® é marca registrada de The Mathworks, Inc.

ângulos, distâncias e posições relativas de retas e planos.

O Capítulo 5 traz um estudo das seções cônicas. São também estudadas as coordenadas polares e parametrizações das cônicas. As superfícies são estudadas no Capítulo 6 incluindo aí as quádricas, superfícies cilíndricas, cônicas e de revolução. Neste Capítulo são também estudadas as coordenadas cilíndricas, esféricas e parametrização de superfícies e curvas no espaço. O Capítulo 7 traz mudança de coordenadas, rotação e translação. Dada uma equação geral de 2º grau em duas ou três variáveis, neste Capítulo, através de mudanças de coordenadas é feita a identificação da cônica ou da quádrica correspondente a equação.

Os exercícios estão agrupados em três classes. Os "Exercícios Numéricos", que contém exercícios que são resolvidos fazendo cálculos, que podem ser realizados sem a ajuda de um computador ou de uma máquina de calcular. Os "Exercícios Teóricos", que contém exercícios que requerem demonstrações. Alguns são simples, outros são mais complexos. Os mais difíceis complementam a teoria e geralmente são acompanhados de sugestões. Os "Exercícios usando o MATLAB®", que contém exercícios para serem resolvidos usando o MATLAB® ou outro software. Os comandos necessários a resolução destes exercícios são também fornecidos juntamente com uma explicação rápida do uso. Os exercícios numéricos são imprescindíveis, enquanto a resolução dos outros, depende do nível e dos objetivos pretendidos para o curso.

O MATLAB® é um software destinado a fazer cálculos com matrizes (MATLAB® = MATrix LABoratory). Os comandos do MATLAB® são muito próximos da forma como escrevemos expressões algébricas, tornando mais simples o seu uso. Podem ser incorporados às rotinas pré-definidas, pacotes para cálculos específicos. Um pacote chamado `gaal` com funções que são direcionadas para o estudo de Geometria Analítica e Álgebra Linear pode ser obtido através da internet no endereço `http://www.mat.ufmg.br/~regi`, assim como um texto com uma introdução ao MATLAB® e instruções de como instalar o pacote `gaal`. O MATLAB® não é um software gratuito, embora antes a versão estudante vinha grátis ao se comprar o guia do usuário. Atualmente o SciLab é uma alternativa gratuita, mas que não faz cálculo simbólico. O Maxima é um programa de computação algébrica gratuito. Ambos podem ser usados como ferramenta auxiliar na aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Na página do autor na web podem ser encontrados pacotes de funções para estes programas além de links para as páginas do SciLab e do Maxima e várias páginas interativas que podem auxiliar na aprendizagem.

No fim de cada capítulo temos um "Teste do Capítulo", onde o aluno pode avaliar os seus conhecimentos. Os Exercícios Numéricos e os Exercícios usando o MATLAB® estão resolvidos após o último capítulo utilizando o MATLAB®. Desta forma o leitor que não estiver interessado em usar o software pode obter apenas as respostas dos exercícios, enquanto aquele que tiver algum interesse, pode ficar sabendo como os exercícios poderiam ser resolvidos fazendo uso do MATLAB® e do pacote `gaal`.

Gostaria de agradecer aos professores que colaboraram apresentando correções, críticas e sugestões, entre eles Joana Darc A. S. da Cruz, Rinaldo Vieira da Silva Junior e Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos.

Histórico

Março 2012 Mudança na formatação do texto. Algumas correções. Várias figuras foram refeitas. Foram acrescentados o exercício 5.2.12 sobre a propriedade refletora da elipse e o exercício 5.2.13 sobre a propriedade refletora da hipérbole.

Março 2010 Foram acrescentados dois exercícios e dois itens em um exercício na Seção 5.2 e dois itens em um exercício na Seção 6.3. Foram escritas as respostas dos exercícios das Seções 5.2. e 6.3.

Julho 2009 Algumas correções. Várias figuras foram refeitas.

Março 2008 Algumas correções. Foram acrescentados dois exercícios à Seção 4.3. As respostas de alguns exercícios foram reescritas.

Março 2007 Várias figuras foram refeitas e outras acrescentadas. Foi acrescentado um item ao Teorema 2.13 na página 104. Foram reescritos o Exemplo 3.12 e o Corolário 3.10.

Março 2006 Os Capítulos 1 e 2 foram reescritos. Foi acrescentada uma aplicação às Cadeias de Markov. Foram acrescentados vários exercícios aos Capítulos 3 e 4. O Capítulo 5 foi reescrito. Foram escritas as respostas dos exercícios das Seções 4.3. e 6.1. Foram acrescentados exercícios numéricos às Seções 4.3 e 5.1 e exercícios teóricos às Seções 3.1, 4.2, 5.1 e 7.3.

Julho 2004 Foi acrescentada uma aplicação à criptografia (Exemplo na página 88). Foi acrescentado um exercício na Seção 1.1. Foi incluída a demonstração de que toda matriz é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida. Este resultado era o Teorema 1.4 na página 26 que passou para o Apêndice II da Seção 1.2. O Teorema 1.4 agora contém as propriedades da relação "ser equivalente por linhas" com a demonstração. No Capítulo 3 foram acrescentados 2 exercícios na seção 3.1, 1 exercício na Seção 3.2. No Capítulo 4 a Seção 4.1 foi reescrita e foram acrescentados 2 exercícios.

Março 2002 Criado a partir do texto 'Geometria Analítica e Álgebra Linear' para ser usado numa disciplina de Geometria Analítica.

Sugestão de Cronograma

Capítulo 1	Seções 1.1 e 1.2	8 aulas
Capítulo 2	Seções 2.1 e 2.2	8 aulas
Capítulo 3	Seções 3.1 e 3.2	8 aulas
Capítulo 4	Seções 4.1 e 4.2	8 aulas
Capítulo 5	Seções 5.1 e 5.2	8 aulas
Capítulo 6	Seções 6.1 a 6.3	12 aulas
Capítulo 7	Seções 7.1 a 7.3	12 aulas
	Total	64 aulas

1

Matrizes e Sistemas Lineares

1.1 Matrizes

Uma **matriz** A, $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A i**-ésima linha** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix},$$

para $i = 1, \ldots, m$ e a j**-ésima coluna** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

para $j = 1, \ldots, n$. Usamos também a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Dizemos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o **elemento** ou a **entrada** de posição i, j da matriz A.
Se $m = n$, dizemos que A é uma **matriz quadrada de ordem** n e os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam a **diagonal (principal)** de A.

Exemplo 1.1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são 2×2. A matriz C é 2×3, D é 1×3, E é 3×1 e F é 1×1.
De acordo com a notação que introduzimos, exemplos de elementos de algumas das matrizes dadas acima são $a_{12} = 2$, $c_{23} = -2$, $e_{21} = 4$, $[A]_{22} = 4$, $[D]_{12} = 3$.

Uma matriz que só possui uma linha é chamada **matriz linha**, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada **matriz coluna**, No Exemplo 1.1 a matriz D é uma matriz linha e a matriz E é uma matriz coluna.
Dizemos que duas matrizes são iguais se elas têm o mesmo tamanho e os elementos correspondentes são iguais, ou seja, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ são **iguais** se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Vamos definir operações matriciais análogas às operações com números e provar propriedades que são válidas para essas operações. Veremos, mais tarde, que um sistema de equações lineares pode ser escrito em termos de uma única equação matricial.
Vamos, agora, introduzir as operações matriciais.

1.1.1 Operações com Matrizes

Definição 1.1. A **soma** de duas matrizes de **mesmo tamanho** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$

$$C = A + B$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,,$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo 1.2. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de C a soma das duas matrizes A e B, então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 2 + 1 & -3 + 5 \\ 3 + 0 & 4 + 3 & 0 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Definição 1.2. A **multiplicação de uma matriz** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ **por um escalar** (número) α é definida pela matriz $m \times n$

$$B = \alpha A$$

obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α, ou seja,

$$b_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,,$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[\alpha A]_{ij} = \alpha\ a_{ij}$. Dizemos que a matriz B é um **múltiplo escalar** da matriz A.

Exemplo 1.3. O produto da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ pelo escalar -3 é dado por

$$-3\,A = \begin{bmatrix} (-3)(-2) & (-3)\,1 \\ (-3)\,0 & (-3)\,3 \\ (-3)\,5 & (-3)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.3. O **produto** de duas matrizes, tais que **o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda,** $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ é definido pela matriz $m \times n$

$$C = AB$$

obtida da seguinte forma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \tag{1.1}$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$.

A equação (1.1) está dizendo que o elemento i, j do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2}} & \boxed{\ldots} & & \boxed{a_{ip}} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & \boxed{b_{1j}} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & \boxed{b_{2j}} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \ldots & \boxed{\vdots} & \ldots & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & \boxed{b_{pj}} & \ldots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

A equação (1.1) pode ser escrita de forma compacta usando a **notação de somatório**.

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

e dizemos "somatório de k variando de 1 a p de $a_{ik}b_{kj}$". O símbolo $\sum\limits_{k=1}^{p}$ significa que estamos fazendo uma soma em que o índice k está variando de $k = 1$ até $k = p$. Algumas propriedades da notação de somatório estão explicadas no Apêndice I na página 27.

Exemplo 1.4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se chamamos de C o produto das duas matrizes A e B, então

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1\,(-2) + 2 \cdot 0 + (-3)\,5 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3)\,(-4) & 0 \\ 3\,(-2) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 0\,(-4) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação. No exemplo anterior o produto BA não está definido (por quê?). Entretanto, mesmo quando ele está definido, BA pode não ser igual à AB, ou seja, o produto de matrizes **não é comutativo**, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 1.5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Então,

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Vamos ver no próximo exemplo como as matrizes podem ser usadas para descrever quantitativamente um processo de produção.

Exemplo 1.6. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. Usando matrizes podemos determinar quantos gramas dos insumos A e B são necessários na produção de x kg do produto X, y kg do produto Y e z kg do produto Z.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \end{array} = A \qquad X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array}$$

$$AX = \left[\begin{array}{c} x+y+z \\ 2x+y+4z \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \end{array}$$

Definição 1.4. A **transposta** de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é definida pela matriz $n \times m$

$$B = A^t$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji}\,,$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Escrevemos também $[A^t]_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 1.7. As transpostas das matrizes

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad C = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{array}\right] \quad \text{são}$$

$$A^t = \left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}\right], \quad B^t = \left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad C^t = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{array}\right].$$

A seguir, mostraremos as propriedades que são válidas para a álgebra matricial. Várias propriedades são semelhantes àquelas que são válidas para os números reais, mas deve-se tomar cuidado com as diferenças. Uma propriedade importante que é válida para os números reais, mas não é válida para as matrizes é a comutatividade do produto, como foi mostrado no Exemplo 1.5. Por ser compacta, usaremos a notação de somatório na demonstração de várias propriedades. Algumas propriedades desta notação estão explicadas no Apêndice I na página 27.

1.1.2 Propriedades da Álgebra Matricial

Teorema 1.1. *Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados, α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades para as operações matriciais:*

(a) *(comutatividade)* $A + B = B + A$;

(b) *(associatividade)* $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(c) *(elemento neutro) A matriz* $\bar{0}$, $m \times n$, *definida por* $[\bar{0}]_{ij} = 0$, *para* $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ *é tal que*

$$A + \bar{0} = A,$$

para toda matriz A, $m \times n$. *A matriz* $\bar{0}$ *é chamada* ***matriz nula*** $m \times n$.

(d) *(elemento simétrico) Para cada matriz* A, *existe uma única matriz* $-A$, *definida por* $[-A]_{ij} = -a_{ij}$ *tal que*

$$A + (-A) = \bar{0}.$$

(e) *(associatividade)* $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

(f) *(distributividade)* $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(g) *(distributividade)* $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;

(h) *(associatividade)* $A(BC) = (AB)C$;

(i) *(elemento neutro) Para cada inteiro positivo* p *a matriz,* $p \times p$,

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

chamada ***matriz identidade*** *é tal que*

$$A\, I_n = I_m A = A, \quad \textit{para toda matriz } A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

(j) *(distributividade)* $A(B+C) = AB + AC$ *e* $(B+C)A = BA + CA$;

(k) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

(l) $(A^t)^t = A$;

(m) $(A+B)^t = A^t + B^t$;

(n) $(\alpha A)^t = \alpha\, A^t$;

(o) $(AB)^t = B^t A^t$;

Demonstração. Para provar as igualdades acima, devemos mostrar que os elementos da matriz do lado esquerdo são iguais aos elementos correspondentes da matriz do lado direito. Serão usadas várias propriedades dos números sem citá-las explicitamente.

(a) $[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B+A]_{ij}$;

(b) $[A+(B+C)]_{ij} = a_{ij}+[B+C]_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = [A+B]_{ij}+c_{ij} = [(A+B)+C]_{ij}$;

(c) Seja X uma matriz $m \times n$ tal que

$$A + X = A \tag{1.2}$$

para qualquer matriz A, $m \times n$. Comparando os elementos correspondentes, temos que

$$a_{ij} + x_{ij} = a_{ij}\,,$$

ou seja, $x_{ij} = 0$, para $i = 1\ldots,m$ e $j = 1\ldots,n$. Portanto, a única matriz que satisfaz (1.2) é a matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero. Denotamos a matriz X por $\bar{0}$.

(d) Dada uma matriz A, $m \times n$, seja X uma matriz $m \times n$, tal que

$$A + X = \bar{0}\,. \tag{1.3}$$

Comparando os elementos correspondentes, temos que

$$a_{ij} + x_{ij} = 0\,,$$

ou seja, $x_{ij} = -a_{ij}$, para $i = 1\ldots,m$ e $j = 1\ldots,n$. Portanto, a única matriz que satisfaz (1.3) é a matriz em que todos os seus elementos são iguais aos simétricos dos elementos de A. Denotamos a matriz X por $-A$.

(e) $[\alpha(\beta A)]_{ij} = \alpha[\beta A]_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta)a_{ij} = [(\alpha\beta)A]_{ij}$.

(f) $[(\alpha+\beta)A]_{ij} = (\alpha+\beta)a_{ij} = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = [\alpha A]_{ij} + [\beta A]_{ij} = [\alpha A + \beta A]_{ij}$.

(g) $$\begin{aligned}[\alpha(A+B)]_{ij} &= \alpha[A+B]_{ij} = \alpha(a_{ij}+b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = [\alpha A]_{ij} + [\alpha B]_{ij} \\ &= [\alpha A + \alpha B]_{ij}.\end{aligned}$$

(h) A demonstração deste item é a mais trabalhosa. Sejam A, B e C matrizes $m \times p$, $p \times q$ e $q \times n$ respectivamente. A notação de somatório aqui pode ser muito útil, pelo fato de ser compacta.

$$\begin{aligned}[A(BC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}[BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ik}(b_{kl}c_{lj}) = \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^{q}(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \\ &= \sum_{l=1}^{q}[AB]_{il}c_{lj} = [(AB)C]_{ij}\,.\end{aligned}$$

(i) Podemos escrever a matriz identidade em termos do delta de Kronecker que é definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

como $[I_n]_{ij} = \delta_{ij}$. Assim,

$$[AI_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[I_n]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}.$$

A outra igualdade é análoga.

(j)
$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}[B+C]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}) = \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij}\,.\end{aligned}$$

A outra igualdade é inteiramente análoga a anterior e deixamos como exercício.

(k) $[\alpha(AB)]_{ij} = \alpha\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(\alpha a_{ik})b_{kj} = [(\alpha A)B]_{ij}$ e

$[\alpha(AB)]_{ij} = \alpha\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\alpha b_{kj}) = [A(\alpha B)]_{ij}$.

(l) $[(A^t)^t]_{ij} = [A^t]_{ji} = a_{ij}$.

(m) $[(A+B)^t]_{ij} = [A+B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij}$.

(n) $[(\alpha A)^t]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha a_{ji} = \alpha [A^t]_{ij} = [\alpha A^t]_{ij}$.

(o) $[(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} [A^t]_{kj} [B^t]_{ik} = \sum_{k=1}^{p} [B^t]_{ik} [A^t]_{kj} = [B^t A^t]_{ij}$.

■

A **diferença** entre duas matrizes de mesmo tamanho A e B é definida por

$$A - B = A + (-B),$$

ou seja, é a soma da matriz A com a simétrica da matriz B.
Sejam A uma matriz $n \times n$ e p um inteiro positivo. Definimos a **potência** p de A, por $A^p = \underbrace{A \ldots A}_{p \text{ vezes}}$. E para $p = 0$, definimos $A^0 = I_n$.

Exemplo 1.8. Vamos verificar se para matrizes A e B, quadradas, vale a igualdade

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2. \tag{1.4}$$

Usando a propriedade (i) do teorema anterior obtemos

$$\begin{aligned} (A+B)(A-B) &= (A+B)A + (A+B)(-B) \\ &= AA + BA - AB - BB = A^2 + BA - AB - B^2 \end{aligned}$$

Assim, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ se, e somente se, $BA - AB = 0$, ou seja, se, e somente se, $AB = BA$. Como o produto de matrizes não é comutativo, a conclusão é que a igualdade (1.4), **não** vale para matrizes em geral. Como contra-exemplo basta tomarmos duas matrizes que não comutem entre si. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para estas matrizes

$$A+B=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},\quad A-B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad A^2=A=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\quad B^2=B=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

Assim,

$$(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}-1&0\\-2&1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=A^2-B^2.$$

1.1.3 Aplicação: Cadeias de Markov

Vamos supor que uma população é dividida em três estados (por exemplo: ricos, classe média e pobres) e que em cada unidade de tempo a probabilidade de mudança de um estado para outro seja constante no tempo, só dependa dos estados. Este processo é chamado **cadeia de Markov**.

Seja t_{ij} a probabilidade de mudança do estado j para o estado i em uma unidade de tempo (geração). Tome cuidado com a ordem dos índices. A matriz

$$T = \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}① & ② & ③\end{array}\\ \begin{bmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ ①\\②\\③\end{array}$$

é chamada **matriz de transição**. A distribuição da população inicial entre os três estados pode ser descrita pela seguinte matriz:

$$P_0=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{está no estado 1}\\\text{está no estado 2}\\\text{está no estado 3}\end{array}$$

A matriz P_0 caracteriza a distribuição inicial da população entre os três estados e é chamada **vetor de estado**. Após uma unidade de tempo a população estará dividida entre os três estados da seguinte forma

$$P_1 = \begin{bmatrix} t_{11}p_1 + t_{12}p_2 + t_{13}p_3 \\ t_{21}p_1 + t_{22}p_2 + t_{23}p_3 \\ t_{31}p_1 + t_{32}p_2 + t_{33}p_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{estará no estado 1} \\ \text{estará no estado 2} \\ \text{estará no estado 3} \end{array}$$

Lembre-se que t_{ij} é a probabilidade de mudança do estado j para o estado i. Assim, o vetor de estado após uma unidade de tempo é dada pelo produto de matrizes:

$$P_1 = TP_0.$$

Exemplo 1.9. Vamos considerar a matriz de transição

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ① & ② & ③ \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array} \tag{1.5}$$

e o vetor de estados inicial

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{está no estado 1} \\ \text{está no estado 2} \\ \text{está no estado 3} \end{array} \tag{1.6}$$

que representa uma população dividida de forma que $1/3$ da população está em cada estado.

Após uma unidade de tempo a matriz de estado será dada por

$$P_1 = TP_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Como estamos assumindo que em cada unidade de tempo a matriz de transição é a mesma, então após k unidades de tempo a população estará dividida entre os três estados segundo a matriz de estado

$$P_k = TP_{k-1} = T^2 P_{k-2} = \cdots = T^k P_0$$

Assim, a matriz T^k dá a transição entre k unidades de tempo.

Exercícios Numéricos (respostas na página 510)

1.1.1. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se for possível calcule:

(a) $AB - BA$,

(b) $2C - D$,

(c) $(2D^t - 3E^t)^t$,

(d) $D^2 - DE$.

1.1.2. Conhecendo-se somente os produtos AB e AC, como podemos calcular $A(B + C)$, $B^t A^t$, $C^t A^t$ e $(ABA)C$?

1.1.3. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que:

(a) AB é diferente de BA.

(b) AE_j é a j-ésima coluna de A, para $j = 1, 2, 3$ e $E_i^t B$ é a i-ésima linha de B, para $i = 1, 2, 3$ (o caso geral está no Exercício 1.1.15 na página 21).

(c) $CD = \begin{bmatrix} d_1 C_1 & d_2 C_2 & d_3 C_3 \end{bmatrix}$, em que $C_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, são as colunas de C (o caso geral está no Exercício 1.1.16 (a) na página 22).

(d) $DC = \begin{bmatrix} d_1 C_1 \\ d_2 C_2 \\ d_3 C_3 \end{bmatrix}$, em que $C_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são as linhas de C (o caso geral está no Exercício 1.1.16 (b) na página 22).

(e) Escrevendo B em termos das suas colunas, $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$, em que $B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, o produto AB pode ser escrito como $AB = A \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 \end{bmatrix}$ (o caso geral está no Exercício 1.1.17 (a) na página 23).

(f) escrevendo A em termos das suas linhas, $A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, o produto AB pode ser escrito como $AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{bmatrix}$ (o caso geral está no Exercício 1.1.17 (b) na página 23).

1.1.4. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Verifique que $xA_1 + yA_2 + zA_3 = AX$, em que A_j é a j-ésima coluna de A, para $j = 1, 2, 3$ (o caso geral está no Exercício 1.1.18 na página 24).

1.1.5. Encontre um valor de x tal que $AB^t = 0$, em que

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.1.6. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{bmatrix}$, em que y é uma número real não nulo, verificam a equação $X^2 = 2X$.

1.1.7. Mostre que se A e B são matrizes que comutam com a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $AB = BA$.

1.1.8. (a) Determine todas as matrizes A, 2×2, **diagonais** (os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero) que comutam com toda matriz B, 2×2, ou seja, tais que $AB = BA$, para toda matriz B, 2×2.

(b) Determine todas as matrizes A, 2×2, que comutam com toda matriz B, 2×2, ou seja, tais que $AB = BA$, para toda matriz B, 2×2.

Exercícios usando o MATLAB®

Uma vez inicializado o MATLAB®, aparecerá na janela de comandos um prompt `>>` ou `EDU>>`. O prompt significa que o MATLAB® está esperando um comando. Todo comando deve ser finalizado teclando-se **Enter**. Comandos que foram dados anteriormente podem ser obtidos novamente usando as teclas ↑ e ↓. Enquanto se estiver escrevendo um comando, este pode ser corrigido usando as teclas ←, →, **Delete** e **Backspace**. O MATLAB® faz diferença entre letras maiúsculas e minúsculas.

No MATLAB®, pode-se obter ajuda sobre qualquer comando ou função. O comando
`>> help`
(sem o prompt `>>`) mostra uma listagem de todos os pacotes disponíveis. Ajuda sobre um pacote específico ou sobre um comando ou função específica pode ser obtida com o comando
`>> help nome`,
(sem a vírgula e sem o prompt `>>`) em que `nome` pode ser o nome de um pacote ou o nome de um comando ou função.

Além dos comandos e funções pré-definidas, escrevemos um pacote chamado `gaal` com funções específicas para a aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Este pacote pode ser obtido gratuitamente através da internet no endereço `http://www.mat.ufmg.br/~regi`, assim como um texto com uma introdução ao MATLAB® e instruções de como instalar o pacote `gaal`. Depois deste pacote ser devidamente instalado, o comando `help gaal` no prompt do MATLAB® dá informações sobre este pacote.

Mais informações sobre as capacidades do MATLAB® podem ser obtidas em [4, 17].

Vamos descrever aqui alguns comandos que podem ser usados para a manipulação de matrizes. Outros comandos serão introduzidos a medida que forem necessários.

`>> syms x y z` diz ao MATLAB® que as variáveis `x y` e `z` são simbólicas.

`>> A=[a11,a12,...,a1n;a21,a22,...; ...,amn]` cria uma matriz, m por n, usando os elementos `a11, a12, ..., amn` e a armazena numa variável de nome `A`. Por exemplo, `>> A=[1,2,3;4,5,6]` cria a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$;

`>> I=eye(n)` cria a matriz identidade n por n e a armazena numa variável `I`;

`>> O=zeros(n)` ou `>> O=zeros(m,n)` cria a matriz nula n por n ou m por n, respectivamente, e a armazena numa variável `O`;

`>> A+B` é a soma de `A` e `B`,

`>> A*B` é o produto de `A` por `B`,

`>> A.'` é a transposta de `A`,

`>> A-B` é a diferença `A` menos `B`,

`>> num*A` é o produto do escalar `num` por `A`,

`>> A^k` é a potência `A` elevado a k.

`>> A(:,j)` é a coluna j da matriz `A`, `>> A(i,:)` é a linha i da matriz `A`.

`>> diag([d1,...,dn])` cria uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são iguais aos elementos da matriz `[d1,...,dn]`, ou seja, são `d1,...,dn`.

`>> A=sym(A)` converte a matriz `A` numa matriz em que os elementos são armazenados no formato simbólico. A função `numeric` faz o processo inverso.

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`. Por exemplo, `>> solve(x^2-4)` determina as soluções da equação $x^2 - 4 = 0$;

Comando do pacote GAAL:

`>> A=randi(n)` ou `>> A=randi(m,n)` cria uma matriz `n` por `n` ou `m` por `n`, respectivamente, com elementos inteiros aleatórios entre -5 e 5.

1.1.9. Use o MATLAB® para calcular alguns membros da seqüência $A, A^2, \ldots, A^k, \ldots$, para

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

A seqüência parece estar convergindo para alguma matriz? Se estiver, para qual?

1.1.10. Calcule as potências das matrizes dadas a seguir e encontre experimentalmente (por tentativa!) o menor inteiro $k > 1$ tal que (use o comando `>> A=sym(A)` depois de armazenar a matriz na variável `A`):

(a) $A^k = I_3$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(b) $A^k = I_4$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(c) $A^k = \bar{0}$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.1.11. Vamos fazer um experimento no MATLAB® para tentar ter uma idéia do quão comum é encontrar matrizes cujo produto comuta. No prompt do MATLAB® digite a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=randi(3);B=randi(3);if(A*B==B*A),c=c+1;end,end,c
```

(não esqueça das vírgulas e pontos e vírgulas!). O que esta linha está mandando o MATLAB® fazer é o seguinte:

- Criar um contador `c` e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir às variáveis `A` e `B`, 1000 matrizes 3×3 com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5.
- Se `AB=BA`, ou seja, `A` e `B` comutarem, então o contador `c` é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável `c` é escrito.

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável `c`?

1.1.12. Faça um experimento semelhante ao anterior, mas para o caso em que cada uma das matrizes é **diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero. Use a seta para cima $\uparrow$ para obter novamente a linha digitada e edite a linha no prompt do MATLAB® de forma a obter algo semelhante à linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=diag(randi(1,3));B=diag(randi(1,3));if( ....
```

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável `c`?

1.1.13. Faça um experimento semelhante ao anterior, mas para o caso em que uma das matrizes é diagonal. Use a seta para cima $\uparrow$ para obter novamente a linha digitada e edite a linha no prompt do MATLAB® de forma a obter a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=diag(randi(1,3));B=randi(3);if(A*B==B*A),c=c+1;A,B,end,end,c
```

Aqui são impressas as matrizes `A` e `B` quando elas comutarem. Qual a conclusão que você tira deste experimento? Qual a probabilidade de um tal par de matrizes comutarem?

1.1.14. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**.

Exercícios Teóricos

1.1.15. Sejam $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrizes $n \times 1$.

(a) Mostre que se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz $m \times n$, então AE_j é igual à coluna j da matriz A.

(b) Mostre que se

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix},$$

é uma matriz $n \times m$ então $E_i^t B$ é igual à linha i da matriz B.

1.1.16. Seja

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

uma **matriz diagonal** $n \times n$, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que o produto AD é obtido da matriz A multiplicando-se cada coluna j por λ_j, ou seja, se $A = [\, A_1 \ A_2 \ \ldots \ A_n \,]$, em que $A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ é a coluna j de A, então

$$AD = [\, \lambda_1 A_1 \ \lambda_2 A_2 \ \ldots \ \lambda_n A_n \,].$$

(b) Mostre que o produto DA é obtido da matriz A multiplicando-se cada linha i por λ_i, ou seja, se $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$, em que $A_i = [\, a_{i1} \ \ldots \ a_{in} \,]$ é a linha i de A, então

$$DA = \begin{bmatrix} \lambda_1 A_1 \\ \lambda_2 A_2 \\ \vdots \\ \lambda_n A_n \end{bmatrix}.$$

1.1.17. Sejam A e B matrizes $m \times p$ e $p \times n$, respectivamente.

(a) Mostre que a j-ésima coluna do produto AB é igual ao produto AB_j, em que $B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}$ é a j-ésima coluna de B, ou seja, se $B = [\, B_1 \ \ldots \ B_n \,]$, então

$$AB = A[\, B_1 \ \ldots \ B_n \,] = [\, AB_1 \ \ldots \ AB_n \,];$$

(b) Mostre que a i-ésima linha do produto AB é igual ao produto $A_i B$, em que $A_i = [\, a_{i1} \ \ldots \ a_{ip} \,]$ é a

i-ésima linha de A, ou seja, se $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$, então

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ \vdots \\ A_m B \end{bmatrix}.$$

1.1.18. Seja A uma matriz $m \times n$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ uma matriz $n \times 1$. Prove que $AX = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j$, em que A_j é a j-ésima coluna de A. (Sugestão: Desenvolva o lado direito e chegue ao lado esquerdo.)

1.1.19. (a) Mostre que se A é uma matriz $m \times n$ tal que $AX = \bar{0}$, para toda matriz X, $n \times 1$, então $A = \bar{0}$. (Sugestão: use o Exercício 15 na página 21.)

(b) Sejam B e C matrizes $m \times n$, tais $BX = CX$, para todo X, $n \times 1$. Mostre que $B = C$. (Sugestão: use o item anterior.)

1.1.20. Mostre que a matriz identidade I_n é a única matriz tal que $A\, I_n = I_n A = A$ para qualquer matriz A, $n \times n$. (Sugestão: Seja J_n uma matriz tal que $A\, J_n = J_n\, A = A$. Mostre que $J_n = I_n$.)

1.1.21. Se $AB = BA$ e p é um inteiro positivo, mostre que $(AB)^p = A^p B^p$.

1.1.22. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$.

(a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? E se $AB = BA$? Justifique.

(b) $(AB)C = C(AB)$? E se $AC = CA$ e $BC = CB$? Justifique.

(Sugestão: Veja o Exemplo 1.8 na página 12.)

1.1.23. (a) Se A e B são duas matrizes tais que $AB = \bar{0}$, então $A = \bar{0}$ ou $B = \bar{0}$? Justifique.

(b) Se $AB = \bar{0}$, então $BA = \bar{0}$? Justifique.

(c) Se A é uma matriz tal que $A^2 = \bar{0}$, então $A = \bar{0}$? Justifique.

1.1.24. Dizemos que uma matriz A, $n \times n$, é **simétrica** se $A^t = A$ e é **anti-simétrica** se $A^t = -A$.

(a) Mostre que se A é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$, para $i, j = 1, \ldots n$ e que se A é anti-simétrica, então $a_{ij} = -a_{ji}$, para $i, j = 1, \ldots n$. Portanto, os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são iguais a zero.

(b) Mostre que se A e B são simétricas, então $A + B$ e αA são simétricas, para todo escalar α.

(c) Mostre que se A e B são simétricas, então AB é simétrica se, e somente se, $AB = BA$.

(d) Mostre que se A e B são anti-simétricas, então $A + B$ e αA são anti-simétricas, para todo escalar α.

(e) Mostre que para toda matriz A, $n \times n$, $A + A^t$ é simétrica e $A - A^t$ é anti-simétrica.

(f) Mostre que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica. (Sugestão: Observe o resultado da soma de $A + A^t$ com $A - A^t$.)

1.1.25. Para matrizes quadradas $A = (a_{ij})_{n \times n}$ definimos o **traço** de A como sendo a soma dos elementos da diagonal (principal) de A, ou seja, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(a) Mostre que $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

(b) Mostre que $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$.

(c) Mostre que $\operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr}(A)$.

(d) Mostre que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. (Sugestão: Prove inicialmente para matrizes 2×2.)

1.1.26. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que se $AA^t = \bar{0}$, então $A = \bar{0}$. (Sugestão: use o traço.) E se a matriz A for $m \times n$, com $m \neq n$?

1.1.27. Já vimos que o produto de matrizes não é comutativo. Entretanto, certos conjuntos de matrizes são comutativos. Mostre que:

(a) Se D_1 e D_2 são matrizes diagonais $n \times n$, então $D_1 D_2 = D_2 D_1$.

(b) Se A é uma matriz $n \times n$ e

$$B = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k,$$

em que $a_0, \ldots, a_k$ são escalares, então $AB = BA$.

Apêndice I: Notação de Somatório

São válidas algumas propriedades para a notação de somatório:

(a) O índice do somatório é uma variável muda que pode ser substituída por qualquer letra:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{j=1}^{n} f_j.$$

(b) O somatório de uma soma pode ser escrito como uma soma de dois somatórios:

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i + g_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

Pois,
$\sum_{i=1}^{n} (f_i + g_i) = (f_1 + g_1) + \ldots + (f_n + g_n) = (f_1 + \ldots + f_n) + (g_1 + \ldots + g_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{i=1}^{n} g_i$. Aqui foram aplicadas as propriedades associativa e comutativa da soma de números.

(c) Se no termo geral do somatório aparece um produto, em que um fator não depende do índice do somatório, então este fator pode "sair" do somatório:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\, g_k = g_k \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

Pois,
$\sum_{i=1}^{n} f_i\, g_k = f_1 g_k + \ldots + f_n g_k = g_k(f_1 + \ldots + f_n) = g_k \sum_{i=1}^{n} f_i$. Aqui foram aplicadas as propriedades distributiva e comutativa do produto em relação a soma de números.

(d) Num somatório duplo, a ordem dos somatórios pode ser trocada:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f_{ij}.$$

Pois,
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (f_{i1} + \ldots + f_{im}) = (f_{11} + \ldots + f_{1m}) + \ldots + (f_{n1} + \ldots + f_{nm}) =$
$(f_{11} + \ldots + f_{n1}) + \ldots + (f_{1m} + \ldots + f_{nm}) = \sum_{j=1}^{m} (f_{1j} + \ldots + f_{nj}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f_{ij}$. Aqui foram aplicadas as propriedades comutativa e associativa da soma de números.

1.2 Sistemas de Equações Lineares

Muitos problemas em várias áreas da Ciência recaem na solução de sistemas lineares. Vamos ver como a álgebra matricial pode simplificar o estudo dos sistemas lineares.

Uma **equação linear** em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b\,,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais;

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Usando o produto de matrizes que definimos na seção anterior, o sistema linear acima pode ser escrito como uma equação matricial

$$\boxed{A\,X = B,}$$

em que

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right], \quad X = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] \quad \text{e} \quad B = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right].$$

Uma **solução** de um sistema linear é uma matriz $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ tal que as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado **conjunto solução** ou **solução geral** do sistema. A matriz A é chamada **matriz do sistema linear.**

Exemplo 1.10. O sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 0 \end{array} \right.$$

pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução (geral) do sistema acima é $x = -1/3$ e $y = 2/3$ (verifique!) ou

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. O outro sistema é obtido depois de aplicar sucessivamente uma série de operações, que não alteram a solução do sistema, sobre as equações. As operações que são usadas são:

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Estas operações são chamadas de **operações elementares**. Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear somente os coeficientes do sistema são alterados, assim podemos aplicar as operações sobre a matriz de coeficientes do sistema, que chamamos de **matriz aumentada**, ou seja, a matriz

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Definição 1.5. Uma **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz é uma das seguintes operações:

(a) Trocar a posição de duas linhas da matriz;

(b) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;

(c) Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

O próximo teorema garante que ao aplicarmos operações elementares às equações de um sistema o conjunto solução não é alterado.

Teorema 1.2. *Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$, são tais que a matriz aumentada $[C \mid D]$ é obtida de $[A \mid B]$ aplicando-se uma operação elementar, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.*

Demonstração. A demonstração deste teorema segue-se de duas observações:

(a) Se X é solução de um sistema, então X também é solução do sistema obtido aplicando-se uma operação elementar sobre suas equações (verifique!).

(b) Se o sistema $CX = D$, é obtido de $AX = B$ aplicando-se uma operação elementar às suas equações (ou equivalentemente às linhas da sua matriz aumentada), então o sistema $AX = B$ também pode ser obtido de $CX = D$ aplicando-se uma operação elementar às suas equações, pois cada operação elementar possui uma operação elementar inversa do mesmo tipo, que desfaz o que a anterior fez (verifique!).

Pela observação (b), $AX = B$ e $CX = D$ podem ser obtidos um do outro aplicando-se uma operação elementar sobre as suas equações. E pela observação (a), os dois possuem as mesmas soluções. ■

Dois sistemas que possuem o mesmo conjunto solução são chamados **sistemas equivalentes**. Portanto, segue-se do Teorema 1.2 que aplicando-se operações elementares às equações de um sistema linear obtemos sistemas equivalentes.

1.2.1 Método de Gauss-Jordan

O método que vamos usar para resolver sistemas lineares consiste na aplicação de operações elementares às linhas da matriz aumentada do sistema até que obtenhamos uma matriz numa forma em que o sistema associado a esta matriz seja de fácil resolução.

Vamos procurar obter uma matriz numa forma em que todas as linhas não nulas possuam como primeiro elemento não nulo (chamado **pivô**) o número 1 . Além disso, se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos terão que ser iguais a zero. Vamos ver no exemplo seguinte como conseguimos isso. Neste exemplo veremos como a partir do faturamento e do gasto com insumos podemos determinar quanto foi produzido de cada produto manufaturado em uma indústria.

Exemplo 1.11. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 2,00, R$ 3,00 e R$ 5,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2500,00. Vamos determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos.

Como vimos no Exemplo 1.6 na página 6, usando matrizes o esquema de produção pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \\ \text{preço/kg} \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array} = A \qquad X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array}$$

$$AX = \left[\begin{array}{c} x+y+z \\ 2x+y+4z \\ 2x+3y+5z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

Assim, precisamos resolver o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1000 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 2000 \\ 2x & + & 3y & + & 5z & = & 2500 \end{array}\right.$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:

Vamos procurar para pivô da 1ª linha um elemento não nulo da primeira coluna não nula (se for o caso, podemos usar a troca de linhas para "trazê-lo" para a primeira linha). Como o primeiro elemento da primeira coluna é igual à 1 ele será o primeiro pivô. Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha, -2 vezes a 1ª linha e adicionamos à 3ª linha, também, -2 vezes a 1ª linha.

$$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ -2\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Vamos escolher o elemento de posição 2,2. Como temos que "fazer" o pivô igual à um, vamos multiplicar a 2ª linha por -1.

$$\boxed{-1\times 2^{\underline{a}}\text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}}\text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 2ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, somamos à 1ª linha, -1 vezes a 2ª e somamos à 3ª linha, também, -1 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{l} -1\times 2^{\underline{a}}\text{ linha} + 1^{\underline{a}}\text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}}\text{ linha} \\ -1\times 2^{\underline{a}}\text{ linha} + 3^{\underline{a}}\text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}}\text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array}\right]$$

3ª eliminação:

Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª e a 2ª linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Temos de escolher o elemento de posição 3,3 e como temos de "fazer" o pivô igual à 1, vamos multiplicar a 3ª linha por $1/5$.

$$\boxed{\tfrac{1}{5}\times 3^{\underline{a}}\text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}}\text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 3ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, somamos à 1ª linha, -3 vezes a 3ª e somamos à 2ª linha, 2 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{r} -3\times 3^{\underline{a}}\text{ linha} + 1^{\underline{a}}\text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}}\text{ linha} \\ 2\times 3^{\underline{a}}\text{ linha} + 2^{\underline{a}}\text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}}\text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 700 \\ & & y & & & = & 200 \\ & & & & z & = & 100 \end{array}\right.$$

que possui solução geral dada por

$$X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 700 \\ 200 \\ 100 \end{array}\right].$$

Portanto, foram vendidos 700 kg do produto X, 200 kg do produto Y e 100 kg do produto Z.

A última matriz que obtivemos no exemplo anterior está na forma que chamamos de **escalonada reduzida**.

Definição 1.6. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ está na forma **escalonada reduzida** quando satisfaz as seguintes condições:

(a) Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) ocorrem abaixo das linhas não nulas;

(b) O **pivô** (1º elemento não nulo de uma linha) de cada linha não nula é igual à 1;

(c) O pivô de cada linha não nula ocorre à direita do pivô da linha anterior.

(d) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Se uma matriz satisfaz as propriedades (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d), dizemos que ela está na forma **escalonada**.

Exemplo 1.12. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são escalonadas reduzidas, enquanto

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são escalonadas, mas **não** são escalonadas reduzidas.

Este método de resolução de sistemas, que consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até que a matriz do sistema esteja na forma escalonada reduzida, é conhecido como **método de Gauss-Jordan**.

Exemplo 1.13. Considere o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 13z & = & 9 \\ & & y & + & 5z & = & 2 \\ & & -2y & - & 10z & = & -8 \end{array}\right.$$

A sua matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:

Como o pivô da 1ª linha é igual à 1 e os outros elementos da 1ª coluna são iguais a zero, não há nada o que fazer na 1ª eliminação.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

Olhamos para submatriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento não nulo da 1ª coluna não nula da submatriz. Escolhemos o elemento de posição 2,2. Como ele é igual à 1, precisamos, agora, "zerar" os outros elementos da coluna do pivô. Para isto somamos à 1ª linha, -3 vezes a 2ª e somamos à 3ª linha, 2 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{l} -3\times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 1^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ \ \ 2\times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x & & & - & 2z & = & 3 \\ & & y & + & 5z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & -4 \end{array}\right.$$

que **não** possui solução.

Em geral, um sistema linear não tem solução se, e somente se, a última linha não nula da forma escalonada reduzida da sua matriz aumentada for da forma $[\,0 \ \ldots \ 0 \,|\, b'_m\,]$, com $b'_m \neq 0$.

Exemplo 1.14. Considere o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & & & & 3z & - & 9w & = & 6 \\ 5x & + & 15y & - & 10z & + & 40w & = & -45 \\ x & + & 3y & - & z & + & 5w & = & -7 \end{array}\right.$$

A sua matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{rrrr:r} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

1ª eliminação:

Como temos que "fazer" o pivô igual à um, escolhemos para pivô o elemento de posição 3,1. Precisamos "colocá-lo" na primeira linha, para isto, trocamos a 3ª linha com a 1ª .

$$\boxed{1^{\underline{a}} \text{ linha} \longleftrightarrow 4^{\underline{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha, −5 vezes a 1ª.

$$\boxed{-5\times 1^{\underline{a}}\text{ linha} + 2^{\underline{a}}\text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}}\text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Escolhemos o elemento de posição 2,3. Como temos que fazer o pivô igual à 1, multiplicamos a 2ª linha por $-1/5$.

$$\boxed{-(1/5)\times 2^{\underline{a}}\text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}}\text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

Agora, precisamos "zerar" os outros elementos da 2ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 1ª linha a 2ª e à 3ª linha, −3 vezes a 2ª.

$$\boxed{\begin{array}{c} 2^{\underline{a}}\text{ linha} + 1^{\underline{a}}\text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}}\text{ linha} \\ -3\times 2^{\underline{a}}\text{ linha} + 3^{\underline{a}}\text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}}\text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz é escalonada reduzida. Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema seguinte

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & & & + & 2w & = & -5 \\ & & & & z & - & 3w & = & 2. \end{array}\right.$$

A matriz deste sistema possui duas colunas sem pivôs. As variáveis que não estão associadas a pivôs podem ser consideradas **variáveis livres**, isto é, podem assumir valores arbitrários. Neste exemplo as variáveis y e w não estão associadas a pivôs e podem ser consideradas variáveis livres. Sejam $w = \alpha$ e $y = \beta$. As variáveis associadas aos pivôs terão os seus valores dependentes das variáveis livres, $z = 2 + 3\alpha$, $x = -5 - 2\alpha - 3\beta$. Assim, a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 2\alpha - 3\beta \\ \beta \\ 2 + 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{para todos os valores de } \alpha \text{ e } \beta \text{ reais.}$$

Em geral, se o sistema linear tiver solução e a forma escalonada reduzida da matriz aumentada possuir colunas sem pivôs, as variáveis que **não** estão associadas a pivôs podem ser consideradas **variáveis livres**, isto é, podem assumir valores arbitrários. As variáveis associadas aos pivôs terão os seus valores dependentes das variáveis livres.

Lembramos que o sistema linear não tem solução se a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema for da forma $[\,0 \ldots 0 \,|\, b'_m\,]$, com $b'_m \neq 0$, como no Exemplo 1.13 na página 38.

Observação. Para se encontrar a solução de um sistema linear não é necessário transformar a matriz aumentada do sistema na sua forma escalonada reduzida, mas se a matriz está nesta forma, o sistema associado é o mais simples possível. Um outro método de resolver sistemas lineares consiste em, através da aplicação de operações elementares à matriz aumentada do sistema, se chegar a uma matriz que é somente **escalonada** (isto é, uma matriz que satisfaz as condições (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d) da Definição 1.6). Este método é conhecido como **método de Gauss**.

O próximo resultado mostra que um sistema linear que tenha mais de uma solução não pode ter um número finito de soluções.

Proposição 1.3. *Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$. Se o sistema linear $A\,X = B$ possui duas soluções distintas $X_0 \neq X_1$, então ele tem infinitas soluções.*

Demonstração. Seja

$$X_\lambda = (1-\lambda)X_0 + \lambda X_1, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar que X_λ é solução do sistema $A\,X = B$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Para isto vamos mostrar que $A\,X_\lambda = B$.
Aplicando as propriedades (i), (j) das operações matriciais (Teorema 1.1 na página 8) obtemos

$$A\,X_\lambda = A[(1-\lambda)X_0 + \lambda X_1] = A(1-\lambda)X_0 + A\lambda X_1 = (1-\lambda)A\,X_0 + \lambda A\,X_1$$

Como X_0 e X_1 são soluções de $A\,X = B$, então $A\,X_0 = B$ e $A\,X_1 = B$, portanto

$$A\,X_\lambda = (1-\lambda)B + \lambda B = [(1-\lambda)+\lambda]B = B,$$

pela propriedade (f) do Teorema 1.1.
Assim, o sistema $A\,X = B$ tem infinitas soluções, pois para todo valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, X_λ é solução e $X_\lambda - X_{\lambda'} = (\lambda - \lambda')(X_1 - X_0)$, ou seja, $X_\lambda \neq X_{\lambda'}$, para $\lambda \neq \lambda'$. ■

Observe que na demonstração, para $\lambda = 0$, então $X_\lambda = X_0$, para $\lambda = 1$, então $X_\lambda = X_1$, para $\lambda = 1/2$, então $X_\lambda = \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{2}X_1$, para $\lambda = 3$, então $X_\lambda = -2X_0 + 3X_1$ e para $\lambda = -2$, então $X_\lambda = 3X_0 - 2X_1$.

No Exemplo 3.4 na página 153 temos uma interpretação geométrica desta demonstração.

Para resolver sistemas lineares vimos aplicando operações elementares à matriz aumentada do sistema linear. Isto pode ser feito com quaisquer matrizes.

1.2.2 Matrizes Equivalentes por Linhas

Definição 1.7. Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é **equivalente por linhas** a uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$, se B pode ser obtida de A aplicando-se uma sequencia de operações elementares sobre as suas linhas.

Exemplo 1.15. Observando os Exemplos 1.11, 1.14 e 1.13, vemos que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 \\ 5 & 15 & -10 & 40 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

são equivalentes por linhas às matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Matrizes estas que são escalonadas reduzidas.

Cuidado: elas são equivalentes por linhas, **não** são iguais!

A relação "ser equivalente por linhas" satisfaz as seguintes propriedades, cuja verificação deixamos como exercício para o leitor:

- Toda matriz é equivalente por linhas a ela mesma (reflexividade);
- Se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A (simetria);
- Se A é equivalente por linhas a B e B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C (transitividade).

Toda matriz é equivalente por linhas a uma matriz na forma escalonada reduzida e a demonstração, que omitiremos, pode ser feita da mesma maneira que fizemos no caso particular das matrizes aumentadas dos Exemplos 1.11, 1.14 e 1.13. No Teorema 1.10 na página 65 mostramos que essa matriz escalonada reduzida é a única matriz na forma escalonada reduzida equivalente a A.

Teorema 1.4. *Toda matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida $R = (r_{ij})_{m\times n}$.*

O próximo resultado será usado para provar alguns resultados no capítulo de inversão de matrizes.

Proposição 1.5. *Seja R uma matriz $n \times n$, na forma escalonada reduzida. Se $R \neq I_n$, então R tem uma linha nula.*

Demonstração. Observe que o pivô de uma linha i está sempre numa coluna j com $j \geq i$. Portanto, ou a última linha de R é nula ou o pivô da linha n está na posição n, n. Mas, neste caso todas as linhas anteriores são não nulas e os pivôs de cada linha i está na coluna i, ou seja, $R = I_n$. ■

1.2.3 Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear da forma

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.7}$$

é chamado **sistema homogêneo**. O sistema (1.7) pode ser escrito como $A\,X = \bar{0}$. Todo sistema homogêneo admite pelo menos a solução $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ chamada de **solução trivial**. Portanto, todo sistema homogêneo tem solução. Além disso ou tem somente a solução trivial ou tem infinitas soluções

Observação. Para resolver um sistema linear homogêneo $A\,X = \bar{0}$, basta escalonarmos a matriz A do sistema, já que sob a ação de uma operação elementar a coluna de zeros não é alterada. Mas, é preciso ficar atento quando se escreve o sistema linear associado à matriz resultante das operações elementares, para se levar em consideração esta coluna de zeros que não vimos escrevendo.

Teorema 1.6. *Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, é tal que $m < n$, então o sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução diferente da solução trivial, ou seja, todo sistema homogêneo com menos equações do que incógnitas tem infinitas soluções.*

Demonstração. Como o sistema tem menos equações do que incógnitas ($m < n$), o número de linhas não nulas r da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema também é tal que $r < n$. Assim, temos r pivôs e $n - r$ variáveis (incógnitas) livres, que podem assumir todos os valores reais. Logo, o sistema admite solução não trivial e portanto infinitas soluções. ■

O conjunto solução de um sistema linear homogêneo satisfaz duas propriedades interessantes.

Proposição 1.7. *Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$.*

(a) *Se X e Y são soluções do sistema homogêneo, $AX = \bar{0}$, então $X + Y$ também o é.*

(b) *Se X é solução do sistema homogêneo, $AX = \bar{0}$, então αX também o é.*

Demonstração. (a) Se X e Y são soluções do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$, então $AX = \bar{0}$ e $AY = \bar{0}$ e portanto $X + Y$ também é solução pois, $A(X+Y) = AX + AY = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$;

(b) Se X é solução do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$, então αX também o é, pois $A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha\bar{0} = \bar{0}$.

■

Estas propriedades não são válidas para sistemas lineares em geral. Por exemplo, considere o sistema linear $A\,X = B$, em que $A = [1]$ e $B = [1]$. A solução deste sistema é $X = [1]$. Mas, $X + X = 2\,X = 2$, não é solução do sistema.

Exemplo 1.16. Vamos retomar a cadeia de Markov do Exemplo 1.9 na página 14. Vamos supor que uma população é dividida em três estados (por exemplo: ricos, classe média e pobres) e que em cada unidade de tempo a probabilidade de mudança de um estado para outro seja constante no tempo, só dependa dos estados.
Seja t_{ij} a probabilidade de mudança do estado j para o estado i em uma unidade de tempo (geração). A matriz de transição é dada por

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Vamos considerar a matriz de transição

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Vamos descobrir qual distribuição inicial da população entre os três estados permanece inalterada, geração após geração. Ou seja, vamos determinar P tal que

$$TP = P \quad \text{ou} \quad TP = I_3 P \quad \text{ou} \quad (T - I_3)P = \bar{0}.$$

Assim, precisamos resolver o sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\frac{1}{2}x & + & \frac{1}{4}y & & & = & 0 \\ \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ & & \frac{1}{4}y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

1ª eliminação:

$\boxed{-2 \times 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha}}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

$\boxed{-\frac{1}{2} \times 1^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha}}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

2ª eliminação:

$\boxed{-4 \times 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha}}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

$\frac{1}{2}\times 2^{\underline{a}}$ linha $+$ $1^{\underline{a}}$ linha $\longrightarrow$ $1^{\underline{a}}$ linha
$-\frac{1}{4}\times 2^{\underline{a}}$ linha $+$ $3^{\underline{a}}$ linha $\longrightarrow$ $3^{\underline{a}}$ linha

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto, o sistema dado é equivalente ao sistema seguinte

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & & - & z & = 0 \\ & y & - & 2z & = 0 \end{array}\right.$$

Seja $z = \alpha$. Então $y = 2\alpha$ e $x = \alpha$. Assim, a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tomando a solução tal que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ obtemos que se a população inicial for distribuída de forma que $p_1 = 1/4$ da população esteja no estado 1, $p_2 = 1/2$ da população esteja no estado 2 e $p_3 = 1/4$, esteja no estado 3, então esta distribuição permanecerá constante geração após geração.

1.2.4 Matrizes Elementares (opcional)

Definição 1.8. Uma **matriz elementar** $n \times n$ é uma matriz obtida da matriz identidade I_n aplicando-se uma, e somente uma, operação elementar.

Vamos denotar por E_{ij} a matriz elementar obtida trocando-se a linha i com a linha j da matriz I_n, $E_i(\alpha)$ a matriz elementar obtida multiplicando-se a linha i da matriz

I_n pelo escalar $\alpha \neq 0$ e $E_{i,j}(\alpha)$ a matriz elementar obtida da matriz I_n, somando-se à linha j, α vezes a linha i.

$$E_{i,j} = \begin{array}{c@{}l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & 0 & \ldots & 1 & & & \cdot \\ \cdot & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \cdot \\ \cdot & & & 1 & \ldots & 0 & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, E_i(\alpha) = \begin{array}{c@{}l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & & \alpha & & & \cdot \\ \cdot & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\text{e} \quad E_{i,j}(\alpha) = \begin{array}{c@{}l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & \vdots & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & \alpha & \ldots & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Exemplo 1.17. As matrizes seguintes são as matrizes elementares 2×2:

$$E_{1,2} = E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \neq 0,$$

$$E_{1,2}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{2,1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ matrizes $m \times 1$.

As matrizes elementares podem ser escritas em termos das matrizes E_i como

$$E_{i,j} = \left[\begin{array}{c} E_1^t \\ \vdots \\ E_j^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}, \quad E_i(\alpha) = \left[\begin{array}{c} E_1^t \\ \vdots \\ \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{e} \quad E_{i,j}(\alpha) = \left[\begin{array}{c} E_1^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_j^t + \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Aplicar uma operação elementar em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por uma matriz elementar, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 1.8. *Sejam E uma matriz elementar $m \times m$ e A uma matriz qualquer $m \times n$. Então, EA é igual à matriz obtida aplicando-se na matriz A a mesma operação elementar que originou E.*

Demonstração. Como a i-ésima linha de um produto de matrizes BA é igual à B_iA, em que B_i é a i-ésima linha da matriz B (Exercício 1.1.17 (b) na página 23) e $E_i^t A = A_i$, em que A_i é a linha i da matriz A (Exercício 15 (b) na página 21), então:

$$E_{i,j}A = \begin{array}{r} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_j^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^tA \\ \vdots \\ E_j^tA \\ \vdots \\ E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_i(\alpha)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^tA \\ \vdots \\ \alpha E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$E_{i,j}(\alpha)A = \begin{array}{r} \\ \\ i\rightarrow \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_j^t + \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^tA \\ \vdots \\ E_i^tA \\ \vdots \\ E_j^tA + \alpha E_i^tA \\ \vdots \\ E_m^tA \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j + \alpha A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

■

Assim, aplicar uma sequencia de operações elementares em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por um produto de matrizes elementares.

Exemplo 1.18. Quando usamos o método de Gauss-Jordan para resolver o sistema do Exemplo 1.11 na página 33, aplicamos uma sequencia de operações elementares na matriz aumentada do sistema. Isto corresponde a multiplicar a matriz aumentada

$$[\,A\,|\,B\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array}\right]$$

à esquerda pelas matrizes elementares

$$E_{1,2}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{1,3}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,1}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,3}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3(\tfrac{1}{5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad E_{3,1}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{3,2}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$E_{3,2}(2)\, E_{3,1}(-3)\, E_3(\tfrac{1}{5})\, E_{2,3}(-1)\, E_{2,1}(-1)\, E_2(-1)\, E_{1,3}(-2)\, E_{1,2}(-2)\, [\,A\,|\,B\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right].$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 517)

1.2.1. Quais das seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2.2. Em cada item suponha que a matriz aumentada de um sistema foi transformada usando operações elementares na matriz escalonada reduzida dada. Resolva o sistema correspondente.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.2.3. Resolva, usando o método de Gauss-Jordan, os seguintes sistemas:

(a) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{array} \right.$;

(b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 8x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \end{array} \right.$;

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ 6x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}\right.$.

1.2.4. Os sistemas lineares seguintes possuem a mesma matriz A. Resolva-os usando o método de Gauss-Jordan. Observe que os dois sistemas podem ser resolvidos ao mesmo tempo escalonando a matriz aumentada $[\, A \,|\, B_1 \,|\, B_2 \,]$.

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right.$.

1.2.5. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

(a) Encontre a solução geral do sistema $(A + 4I_3)X = \bar{0}$;

(b) Encontre a solução geral do sistema $(A - 2I_3)X = \bar{0}$.

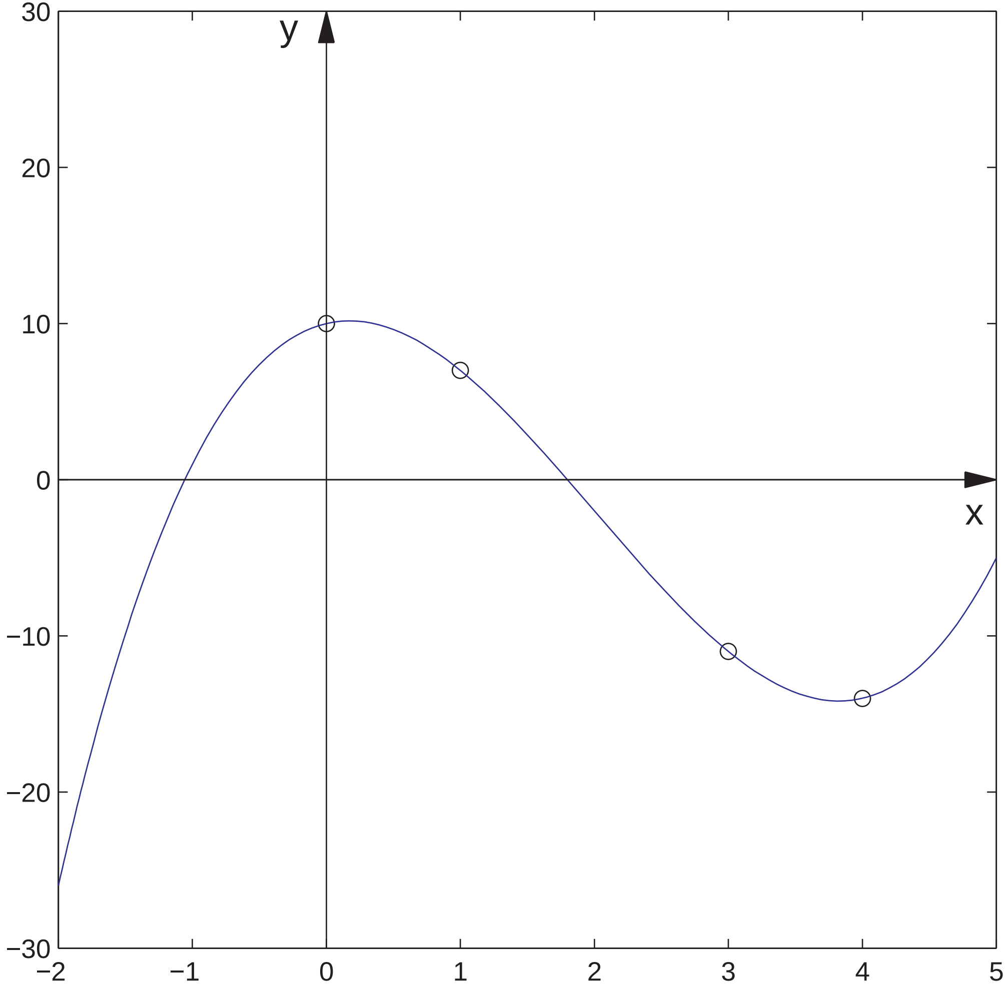
1.2.6. Para cada sistema linear dado, encontre todos os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem solução única e tem infinitas soluções:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & (a^2-14)z & = & a+2 \end{array}\right.$;

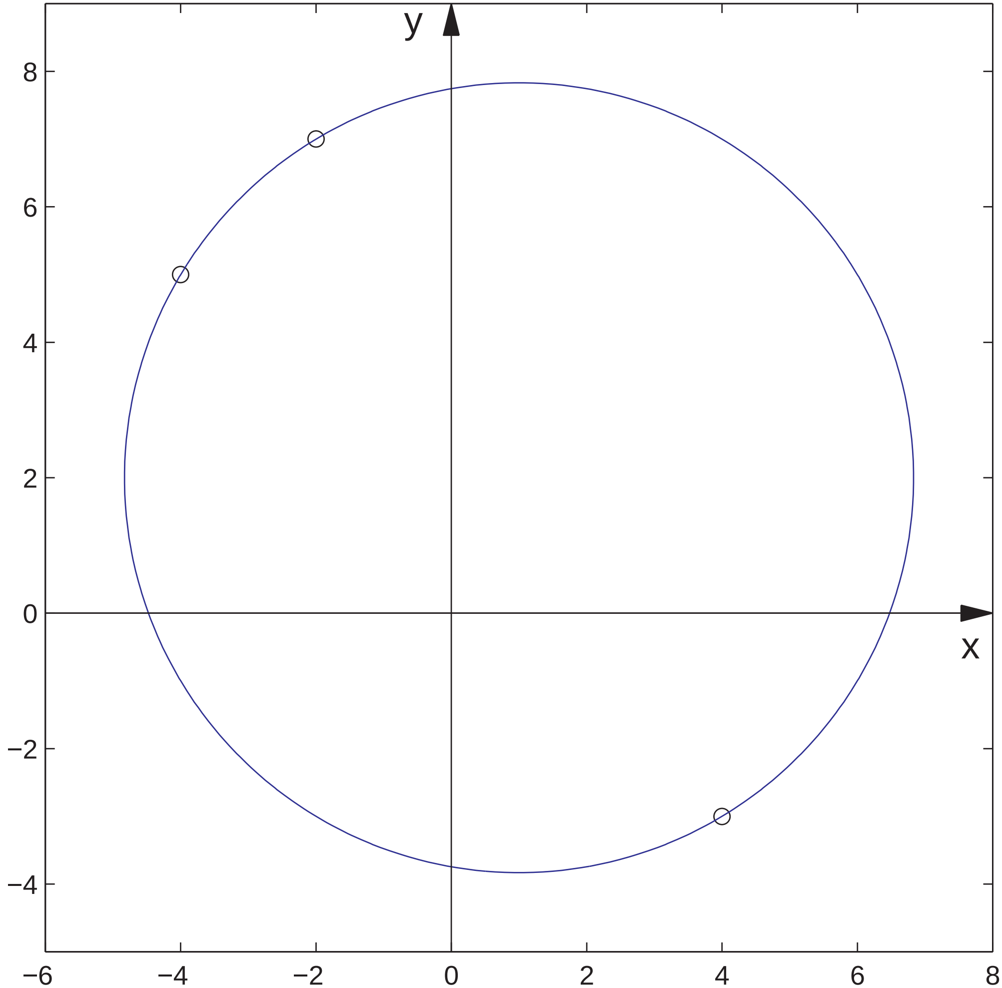
(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & (a^2-1)z & = & a+1 \end{array}\right.$.

1.2.7. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 2 gramas do insumo A e 1 grama do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 3 gramas de insumo B e, para cada kg de Z, 3 gramas de A e 5 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R\$ 3,00, R\$ 2,00 e R\$ 4,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1,9 kg de A e 2,4 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2900,00. Determine quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos. (Sugestão: veja o Exemplo 1.11 na página 33.)

1.2.8. Determine os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujo gráfico passa pelos pontos $P_1 = (0, 10), P_2 = (1, 7), P_3 = (3, -11)$ e $P_4 = (4, -14)$.


30
20
10
0
−10
−20
−30
−2
−1
0
1
2
3
4
5
y
x

1.2.9. Determine coeficientes a, b e c da equação do círculo, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, que passa pelos pontos $P_1 = (-2, 7), P_2 = (-4, 5)$ e $P_3 = (4, -3)$.


y
x
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

1.2.10. Encontre condições sobre os b_i's para que cada um dos sistemas seja **consistente** (isto é, tenha solução):

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & b_1 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & = & b_2 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & b_1 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & b_2 \\ -4x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$.

1.2.11. (Relativo à sub-seção 1.2.4) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Encontre matrizes elementares E, F, G e H tais que $R = EFGHA$ é uma matriz escalonada reduzida. (Sugestão: veja o Exemplo 1.18 na página 53.)

1.2.12. Resolva, usando o método de Gauss-Jordan, os seguintes sistemas:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & - & 9x_4 & + & 4x_5 & + & 3x_6 & = & 9 \end{array}\right.$;

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & - & 3x_6 & = & -1 \\ & & & & 5x_3 & + & 10x_4 & & & + & 15x_6 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & & & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 18x_6 & = & 6 \end{array}\right.$;

1.2.13. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & a \\ 2 & 2a-2 & -a-2 & 3a-1 \\ 3 & a+2 & -3 & 2a+1 \end{bmatrix}$. Determine o conjunto solução do sistema $AX = B$, em que $B = [\,4\ 3\ 1\ 6\,]^t$, para todos os valores de a.

1.2.14. Resolva os sistemas lineares cujas matrizes aumentadas são:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$;

Exercícios usando o MATLAB®

Comandos do MATLAB®:

`>> A=[A1,...,An]` cria uma matriz `A` formada pelas matrizes, definidas anteriormente, `A1, ..., An` colocadas uma ao lado da outra;

`>> expr=subs(expr,x,num)` substitui na expressão `expr` a variável `x` por `num`.

`>> p=poly2sym([an,...,a0],x)` armazena na variável `p` o polinômio $a_n x^n + \ldots + a_0$.

`>> clf` limpa a figura ativa.

Comandos do pacote GAAL:

`>> B=opel(alpha,i,A)` ou `>> oe(alpha,i,A)`faz a operação elementar
`alpha×linha i ==> linha i` da matriz `A` e armazena a matriz resultante em `B`.

`>> B=opel(alpha,i,j,A)` ou `>> oe(alpha,i,j,A)` faz a operação elementar
`alpha×linha i + linha j ==> linha j` da matriz `A` e armazena em `B`.

`>> B=opel(A,i,j)` ou `>> oe(A,i,j)` faz a troca da linha i com a linha j da matriz `A` e armazena a matriz resultante em `B`.

`>> B=escalona(A)` calcula passo a passo a forma escalonada reduzida da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

`>> matvand(P,k)` obtém a matriz de Vandermonde de ordem `k`, se `P=[x1;...;xn]` e a matriz de Vandermonde generalizada no caso em que `P=[x1,y1;...;xn,yn]`.

`>> po([x1,y1;x2,y2;...xk,yk])` desenha os pontos `(x1,y1),...,(xk,yk)`.

`>> plotf1(f,[a,b])` desenha o gráfico da função dada pela expressão simbólica `f` no intervalo `[a,b]`.

`>> plotci(f,[a,b],[c,d])` desenha o gráfico da curva dada implicitamente pela expressão `f(x,y)=0` na região do plano `[a,b]x[c,d]`.

`>> p=poly2sym2([a,b,c,d,e,f],x,y)` armazena na variável `p` o polinômio em duas variáveis $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.

`>> eixos` desenha os eixos coordenados.

1.2.15. (a) Use o comando `P=randi(4,2)`, para gerar 4 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5. Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz `P`.

(b) Use o MATLAB® para *tentar* encontrar os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico passa pelos pontos dados pelas linhas da matriz `P`. A matriz `A=matvand(P(:,1),3)` pode ser útil na solução deste problema, assim como a matriz `B=P(:,2)`. Se não conseguiu, repita o passo anterior. Por que pode não ser possível?

(c) Desenhe os pontos e o gráfico do polinômio com os comandos
`clf, po(P), syms x, p=poly2sym(R(:,5),x), plotf1(p,[-5,5])`, em que `R` é forma escalonada reduzida da matriz `[A,B]`.

(d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

1.2.16. (a) Use o comando `P=randi(5,2)`, para gerar 5 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre -5 e 5. Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz `P`.

(b) Use o MATLAB® para *tentar* encontrar os coeficientes a, b, c, d, e e f da cônica, curva de equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, cujo gráfico passa pelos pontos cujas coordenadas são dadas pelas linhas da matriz `P`. A matriz `A=matvand(P,2)` pode ser útil na solução deste problema. Se não conseguiu, repita o passo anterior. Por que pode não ser possível?

(c) Desenhe os pontos e a cônica com os comandos
`clf, po(P), syms x y, p=poly2sym2([-R(:,6);1],x,y), plotci(p,[-5,5],[-5,5])`, em que `R` é a forma escalonada reduzida da matriz `A`.

(d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

1.2.17. Use o MATLAB® e resolva os **Exercícios Numéricos a partir do Exercício 1.2.3.**

Exercícios Teóricos

1.2.18. Mostre que toda operação elementar possui inversa, do mesmo tipo, ou seja, para cada operação elementar existe uma outra operação elementar do mesmo tipo que desfaz o que a operação anterior fez.

1.2.19. Prove que:

(a) Toda matriz é equivalente por linhas a ela mesma (reflexividade);

(b) Se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A (simetria);

(c) Se A é equivalente por linhas a B e B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C (transitividade).

1.2.20. (a) Sejam X_1 e X_2 soluções do sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$. Mostre que $\alpha X_1 + \beta X_2$ é solução, para quaisquer escalares α e β. (Sugestão: veja o Exemplo 1.7.)

(b) Sejam X_1 e X_2 soluções do sistema $A\,X = B$. Mostre que se $\alpha X_1 + \beta X_2$ é solução, para quaisquer escalares α e β, então $B = \bar{0}$. (Sugestão: faça $\alpha = \beta = 0$.)

1.2.21. Sejam A uma matriz $m \times n$ e $B \neq \bar{0}$ uma matriz $m \times 1$.

(a) Mostre que se X_1 é uma solução do sistema $AX = B$ e Y_1 é uma solução do sistema homogêneo associado $AX = \bar{0}$, então $X_1 + Y_1$ é solução de $AX = B$.

(b) Seja X_0 solução particular do sistema $AX = B$. Mostre que toda solução X do sistema $AX = B$, pode ser escrita como $X = X_0 + Y$, em que Y é uma solução do sistema homogêneo associado, $AX = \bar{0}$. Assim, a solução geral do sistema $AX = B$ é a soma de uma solução particular de $AX = B$ com a solução geral do sistema homogêneo associado $AX = \bar{0}$. (Sugestão: Escreva $X = X_0 + (X - X_0)$ e mostre que $X - X_0$ é solução do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$.)

Apêndice II: Unicidade da Forma Escalonada Reduzida

Proposição 1.9. *Sejam A e B matrizes $m \times n$ equivalentes por linhas. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ as colunas $1, \ldots, n$, respectivamente, da matriz A e $B_1, \ldots, B_n$ as colunas $1, \ldots, n$, respectivamente, da matriz B. Se existem escalares $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}$ tais que*

$$A_k = \alpha_{j_1} A_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} A_{j_k},$$

então

$$B_k = \alpha_{j_1} B_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} B_{j_k},$$

Demonstração. Se B é equivalente por linhas a A, então B pode ser obtida de A aplicando-se uma sequencia de operações elementares. Aplicar uma operação elementar a uma matriz corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por uma matriz invertível (Teorema 1.8 na página 51). Seja M o produto das matrizes invertíveis correspondentes às operações elementares aplicadas na matriz A para se obter a matriz B. Então M é invertível e $B = MA$.

Sejam $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}$ escalares tais que

$$A_k = \alpha_{j_1} A_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} A_{j_k},$$

então multiplicando-se à esquerda pela matriz M obtemos

$$MA_k = \alpha_{j_1} MA_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} MA_{j_k}.$$

Como $MA_j = B_j$, para $j = 1, \ldots, n$ (Exercício 1.1.17 (a) na página 23), então

$$B_k = \alpha_{j_1} B_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_k} B_{j_k}.$$

■

Teorema 1.10. *Se $R = (r_{ij})_{m\times n}$ e $S = (s_{ij})_{m\times n}$ são matrizes escalonadas reduzidas equivalentes por linhas a uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, então $R = S$.*

Demonstração. Sejam S e R matrizes escalonadas reduzidas equivalentes a A. Sejam $R_1, \ldots, R_n$ as colunas de R e $S_1, \ldots, S_n$ as colunas de S. Seja r o número de linhas não nulas de R. Sejam $j_1, \ldots, j_r$ as colunas onde ocorrem os pivôs das linhas $1, \ldots, r$, respectivamente, da matriz R. Pelo Exercício 19 na página 63, R e S são equivalentes por linha, ou seja, existe uma sequencia de operações elementares que podemos aplicar em R para chegar a S e uma outra sequencia de operações elementares que podemos aplicar a S e chegar a R.
Assim, como as colunas $1, \ldots, j_1 - 1$ de R são nulas o mesmo vale para as colunas $1, \ldots, j_1 - 1$ de S. Logo o pivô da 1ª linha de S ocorre numa coluna maior ou igual à j_1. Trocando-se R por S e usando este argumento chegamos a conclusão que $R_{j_1} = S_{j_1}$ e assim $R_1 = S_1, \ldots, R_{j_1} = S_{j_1}$.
Vamos supor que $R_1 = S_1, \ldots, R_{j_k} = S_{j_k}$ e vamos mostrar que

$$R_{j_k+1} = S_{j_k+1}, \ldots, R_{j_{k+1}} = S_{j_{k+1}}, \quad \text{se } k < r \text{ ou}$$

$$R_{j_r+1} = S_{j_r+1}, \ldots, R_n = S_n, \quad \text{se } k = r.$$

Observe que para $j = j_k + 1, \ldots, j_{k+1} - 1$, se $k < r$, ou para $j = j_r + 1, \ldots, n$, se $k = r$, temos que

$$R_j = (r_{1j}, \ldots, r_{kj}, 0, \ldots, 0) = r_{1j} R_{j_1} + \ldots + r_{kj} R_{j_k},$$

o que implica pela Proposição 1.9 que

$$S_j = r_{1j} S_{j_1} + \ldots + r_{kj} S_{j_k}.$$

Mas por hipótese $R_{j_1} = S_{j_1}, \ldots, R_{j_k} = S_{j_k}$, então,

$$S_j = r_{1j} R_{j_1} + \ldots + r_{kj} R_{j_k} = R_j,$$

para $j = j_k + 1, \ldots, j_{k+1} - 1$, se $k < r$ ou para $j = j_r + 1, \ldots, n$, se $k = r$.
Logo, se $k < r$, o pivô da $(k+1)$-ésima linha de S ocorre numa coluna maior ou igual à j_{k+1}. Trocando-se R por S e usando o argumento anterior chegamos a conclusão que $R_{j_{k+1}} = S_{j_{k+1}}$ e assim $R_1 = S_1, \ldots, R_{j_r} = S_{j_r}$. E se $k = r$, então $R_1 = S_1, \ldots, R_n = S_n$.
Portanto, $R = S$. ■

Teste do Capítulo

1. Para o sistema linear dado, encontre todos os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem solução única e tem infinitas soluções:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & + & (a^2-5)z & = & a \end{array}\right.$$

2. Se possível, encontre os valores de x, y e z tais que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & x \\ 13 & -5 & y \\ 5 & -2 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Sejam

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Sabendo-se que $A = P^t D P$, calcule D^2, PP^t e A^2.

4. Responda **Verdadeiro** ou **Falso**, justificando:

   (a) Se $A^2 = -2A^4$, então $(I_n + A^2)(I_n - 2A^2) = I_n$;

   (b) Se $A = P^t D P$, onde D é uma matriz diagonal, então $A^t = A$;

   (c) Se D é uma matriz diagonal, então $DA = AD$, para toda matriz A, $n \times n$;

   (d) Se $B = AA^t$, então $B = B^t$.

   (e) Se B e A são tais que $A = A^t$ e $B = B^t$, então $C = AB$, é tal que $C^t = C$.

2

Inversão de Matrizes e Determinantes

2.1 Matriz Inversa

Todo número real a, não nulo, possui um inverso (multiplicativo), ou seja, existe um número b, tal que $a\,b = b\,a = 1$. Este número é único e o denotamos por a^{-1}. Apesar da álgebra matricial ser semelhante à álgebra dos números reais, nem todas as matrizes A *não nulas* possuem inversa, ou seja, nem sempre existe uma matriz B tal que $A\,B = B\,A = I_n$. De início, para que os produtos AB e BA estejam definidos e sejam iguais é preciso que as matrizes A e B sejam quadradas. Portanto, somente as matrizes quadradas podem ter inversa, o que já diferencia do caso dos números reais, pois todo número não nulo tem inverso. Mesmo entre as matrizes quadradas, muitas não possuem inversa, apesar do conjunto das que não tem inversa ser bem menor do que o conjunto das que tem (Exercício 2.2.9 na página 124).

Definição 2.1. Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é **invertível** ou **não singular**, se existe uma matriz $B = (b_{ij})_{n\times n}$ tal que

$$A\,B = B\,A = I_n\,, \tag{2.1}$$

em que I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada de **inversa** de A. Se A não tem inversa, dizemos que A é **não invertível** ou **singular**.

Exemplo 2.1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

A matriz B é a inversa da matriz A, pois $A\,B = B\,A = I_2$.

Teorema 2.1. *Se uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ possui inversa, então a inversa é única.*

Demonstração. Suponhamos que B e C sejam inversas de A. Então, $AB = BA = I_n = AC = CA$ e assim,

$$B = B\, I_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C\,.$$

■

Denotamos a inversa de A, quando ela existe, por A^{-1}. Devemos chamar atenção para o fato de que o índice superior -1, aqui, não significa uma potência, tão pouco uma divisão. Assim como no caso da transposta, em que A^t significa a transposta de A, aqui, A^{-1} significa a inversa de A.

2.1.1 Propriedades da Inversa

Teorema 2.2. (a) *Se A é invertível, então A^{-1} também o é e*

$$(A^{-1})^{-1} = A\,;$$

(b) *Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ são matrizes invertíveis, então AB é invertível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,;$$

(c) *Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é invertível, então A^t também é invertível e*

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t\,.$$

Demonstração. Se queremos mostrar que uma matriz é a inversa de uma outra, temos que mostrar que os produtos das duas matrizes são iguais à matriz identidade.

(a) Uma matriz B é a inversa de A^{-1} se

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n\,.$$

Mas, como A^{-1} é a inversa de A, então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n\,.$$

Como a inversa é única, então $B = A$ é a inversa de A^{-1}, ou seja, $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Temos que mostrar que a inversa de AB é $B^{-1}A^{-1}$, ou seja, mostrar que os produtos $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB)$ são iguais à matriz identidade. Mas, pelas propriedades (h) e (i) do Teorema 1.1 na página 8:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} &= I_n,\\ (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B &= I_n.\end{aligned}$$

(c) Queremos mostrar que a inversa de A^t é $(A^{-1})^t$. Pela propriedade (o) do Teorema 1.1 na página 8:

$$\begin{aligned}A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t &= I_n,\\ (A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = I_n^t &= I_n.\end{aligned}$$

■

O teorema seguinte, cuja demonstração será omitida no momento (Subseção 2.1.2), garante que basta verificarmos uma das duas igualdades em (2.1) para sabermos se uma matriz é a inversa de outra.

Teorema 2.3. *Sejam A e B matrizes $n \times n$.*

(a) *Se $BA = I_n$, então $AB = I_n$;*

(b) *Se $AB = I_n$, então $BA = I_n$;*

Assim, para verificar que uma matriz A é invertível, quando temos uma matriz B que é candidata a inversa de A, basta fazer um dos produtos AB ou BA e verificar se é igual à I_n. O próximo exemplo ilustra este fato.

Exemplo 2.2. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz tal que $A^3 = \bar{0}$ (A pode não ser a matriz nula!). Vamos mostrar que a inversa de $I_n - A$ é $I_n + A + A^2$. Para provar isto, devemos multiplicar a matriz $I_n - A$, pela matriz que possivelmente seja a inversa dela, aqui $I + A + A^2$, e verificar se o produto das duas é igual à matriz identidade I_n.

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n(I_n + A + A^2) - A(I_n + A + A^2) = I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I_n.$$

Aqui foram usadas as propriedades (i) e (j) do Teorema 1.1 na página 8.

2.1.2 Matrizes Elementares e Inversão (opcional)

As matrizes elementares têm um papel importante no estudo da inversão de matrizes e da solução de sistemas lineares.

Proposição 2.4. *Toda matriz elementar é invertível e sua inversa é também uma matriz elementar. Usando a notação introduzida na página 49, temos:*

(a) $E_{i,j}^{-1} = E_{j,i} = E_{i,j}$;

(b) $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(1/\alpha)$, *para* $\alpha \neq 0$;

(c) $E_{i,j}(\alpha)^{-1} = E_{i,j}(-\alpha)$.

Demonstração. Seja E uma matriz elementar. Esta matriz é obtida de I_n aplicando-se uma operação elementar. Seja F a matriz elementar correspondente a operação que transforma E de volta em I_n. Agora, pelo Teorema 1.8 na página 51, temos que $F\,E = E\,F = I_n$. Portanto, F é a inversa de E. ■

Teorema 2.5. *Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe uma matriz B, $n \times n$, tal que $BA = I_n$.*

(b) *A matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n.*

(c) *A matriz A é invertível.*

Demonstração. **(a)⇒(b)** Se $BA = I_n$, então o sistema $A\,X = \bar{0}$ tem somente a solução trivial, pois $X = I_n X = BAX = B\,\bar{0} = \bar{0}$. Isto implica que a matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n, pois caso contrário a forma escalonada reduzida de A teria uma linha nula (Proposição 1.5 na página 44).

(b)⇒(c) A matriz A ser equivalente por linhas à I_n significa, pelo Teorema 1.8 na página 51, que existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$, tais que

$$
\begin{aligned}
E_k \ldots E_1 A &= I_n && (2.2)\\
(E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}) E_k \ldots E_1 A &= E_1^{-1} \ldots E_k^{-1} \\
A &= E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}. && (2.3)
\end{aligned}
$$

Aqui, usamos o fato de que as matrizes elementares são invertíveis (Proposição 2.4). Portanto, A é invertível como o produto de matrizes invertíveis.

(c)⇒(a) Claramente.

■

Se A é invertível, então multiplicando-se ambos os membros de (2.2) à direita por A^{-1} obtemos

$$E_k \ldots E_1 I_n = A^{-1}.$$

Assim, a mesma sequencia de operações elementares que transforma a matriz A na matriz identidade I_n transforma também I_n em A^{-1}.

A demonstração do Teorema 2.3 na página 72, agora, é uma simples consequência do Teorema anterior.

Demonstração do Teorema 2.3. (a) Vamos mostrar que se $BA = I_n$, então A é invertível e $B = A^{-1}$. Se $BA = I_n$, então pelo Teorema 2.5, A é invertível e $B = BI_n = BAA^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1}$. Logo, $AB = BA = I_n$.

(b) Se $AB = I_n$, então pelo item anterior B é invertível e $B^{-1} = A$. Portanto, $BA = AB = I_n$. ■

Segue da demonstração, do Teorema 2.5 (equação (2.3)) o resultado seguinte.

Teorema 2.6. *Uma matriz A é invertível se, e somente se, ela é um produto de matrizes elementares.*

Exemplo 2.3. Vamos escrever a matriz A do Exemplo 2.5 na página 80 como o produto de matrizes elementares. Quando encontramos a inversa da matriz A, aplicamos uma sequencia de operações elementares em $[\,A\,|\,I_3\,]$ até que encontramos a matriz $[\,I_3\,|\,A^{-1}\,]$. Como as operações são por linha, esta mesma sequencia de operações elementares transforma A em I_n. Isto corresponde a multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ **à esquerda** pelas matrizes elementares

$$E_{1,2}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{1,3}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,1}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,3}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3(\tfrac{1}{5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad E_{3,1}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{3,2}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$E_{3,2}(2)\ E_{3,1}(-3)\ E_3(\tfrac{1}{5})\ E_{2,3}(-1)\ E_{2,1}(-1)\ E_2(-1)\ E_{1,3}(-2)\ E_{1,2}(-2)\ A = I_3.$$

Multiplicando à esquerda pelas inversas das matrizes elementares correspondentes obtemos

$$A = E_{1,2}(2)\ E_{1,3}(2)\ E_2(-1)\ E_{2,1}(1)\ E_{2,3}(1)\ E_3(5)\ E_{3,1}(3)\ E_{3,2}(-2).$$

2.1.3 Método para Inversão de Matrizes

O exemplo seguinte mostra, para matrizes 2×2, não somente uma forma de descobrir se uma matriz A tem inversa mas também, como encontrar a inversa, no caso em que ela exista. Ou seja, escalonamos a matriz $[A \mid I_2]$ e encontramos a sua forma escalonada reduzida $[R \mid S]$. Se $R = I_2$, então a matriz A é invertível e a inversa $A^{-1} = S$. Caso contrário, a matriz A não é invertível.

Exemplo 2.4. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Devemos procurar uma matriz $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tal que $AB = I_2$, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & bz & & & & & = & 1 \\ cx & + & dz & & & & & = & 0 \\ & & & & ay & + & bw & = & 0 \\ & & & & cy & + & dw & = & 1 \end{array} \right.$$

Este sistema pode ser desacoplado em dois sistemas independentes que possuem a mesma matriz, que é a matriz A. Podemos resolvê-los simultaneamente. Para isto, basta escalonarmos a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc:c:c} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right] = [\, A \,|\, I_2 \,].$$

Os dois sistemas têm solução única se, e somente se, a forma escalonada reduzida da matriz $[\, A \,|\, I_2 \,]$ for da forma $[\, I_2 \,|\, S \,] = \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 0 & s & t \\ 0 & 1 & u & v \end{array} \right]$ (verifique, observando o que acontece se a forma escalonada reduzida da matriz A não for igual à I_2). Neste caso, $x = s, z = u$ e $y = t, w = v$, ou seja, a matriz A possuirá inversa, $A^{-1} = B = S = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$.

Para os leitores da Subseção 2.1.2 o próximo teorema é uma simples consequência do Teorema 2.5 na página 74. Entretanto a demonstração que daremos a seguir fornece um método para encontrar a inversa de uma matriz, se ela existir.

Teorema 2.7. *Uma matriz A, $n \times n$, é invertível se, e somente se, A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3 na página 72, para verificarmos se uma matriz A, $n \times n$, é invertível, basta verificarmos se existe uma matriz B, tal que

$$A\,B = I_n\,. \tag{2.4}$$

Vamos denotar as colunas de B por $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ou seja, $B = [\, X_1 \ \ldots \ X_n \,]$, em que

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix},\ \ldots,\ X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

e as colunas da matriz identidade I_n, por $E_1, E_2, \ldots, E_n$, ou seja, $I_n = [\, E_1 \ \ldots \ E_n \,]$, em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots,\ E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a equação (2.4) pode ser escrita como

$$A\,[\, X_1 \ \ldots \ X_n \,] = [\, AX_1 \ \ldots \ AX_n \,] = [\, E_1 \ \ldots \ E_n \,],$$

pois a j-ésima coluna do produto AB é igual à A vezes a j-ésima coluna da matriz B (Exercício 17 na página 23). Analisando coluna a coluna a equação anterior vemos que encontrar B é equivalente a resolver n sistemas lineares

$$A\,X_j = E_j \quad \text{para } j = 1\ldots, n.$$

Cada um dos sistemas pode ser resolvido usando o método de Gauss-Jordan. Para isso, formaríamos as matrizes aumentadas $[A \mid E_1]$, $[A \mid E_2], \ldots, [A \mid E_n]$. Entretanto, como as matrizes dos sistemas são todas iguais à A, podemos resolver todos os sistemas simultaneamente formando a matriz $n \times 2n$

$$[\,A \mid E_1\,E_2\ldots E_n\,] = [\,A \mid I_n\,].$$

Transformando $[\,A \mid I_n\,]$ na sua forma escalonada reduzida, que vamos denotar por $[\,R \mid S\,]$, vamos chegar a duas situações possíveis: ou a matriz R é a matriz identidade, ou não é.

- Se $R = I_n$, então a forma escalonada reduzida da matriz $[\,A \mid I_n\,]$ é da forma $[\,I_n \mid S\,]$. Se escrevemos a matriz S em termos das suas colunas $S = [\,S_1\,S_2\ldots S_n\,]$, então as soluções dos sistemas $A\,X_j = E_j$ são $X_j = S_j$ e assim $B = S$ é tal que $A\,B = I_n$ e pelo Teorema 2.3 na página 72 A é invertível.
- Se $R \neq I_n$, então a matriz A não é equivalente por linhas à matriz identidade I_n. Então, pela Proposição 1.5 na página 44 a matriz R tem uma linha nula. O que implica que cada um dos sistemas $A\,X_j = E_j$ ou não tem solução única ou não tem solução. Isto implica que a matriz A não tem inversa, pois as colunas da (única) inversa seriam X_j, para $j = 1, \ldots n$. ■

Observação. Da demonstração do Teorema 2.7 obtemos não somente uma forma de descobrir se uma matriz A tem inversa mas também, como encontrar a inversa, no caso em que ela exista. Ou seja, escalonamos a matriz $[A \mid I_n]$ e encontramos a sua forma escalonada reduzida $[R \mid S]$. Se $R = I_n$, então a matriz A é invertível e a inversa $A^{-1} = S$. Caso contrário, a matriz A não é invertível. Vejamos os exemplos seguintes.

Exemplo 2.5. Vamos encontrar, se existir, a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

1ª eliminação:

$$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 1^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -2\times 1^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

$$\boxed{-1\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -1\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -1\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3ª eliminação:

$$\boxed{\tfrac{1}{5}\times 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{r} -3\times 3^{\underline{a}} \text{ linha} + 1^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\underline{a}} \text{ linha} \\ 2\times 3^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Assim, a matriz $[A \mid I_3]$ é equivalente por linhas à matriz acima, que é da forma $[I_3 \mid S]$, portanto a matriz A é invertível e a sua inversa é a matriz S, ou seja,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.6. Vamos determinar, se existir, a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para isso devemos escalonar a matriz aumentada

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$1^{\underline{a}}$ eliminação:

$$\boxed{-1\times 1^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha}} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2ª eliminação:

$\boxed{-1\times 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}}$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\boxed{\begin{array}{l} -2\times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 1^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ -1\times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}}$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, a matriz $[A \mid I_3]$ é equivalente por linhas à matriz acima, que é da forma $[R \mid S]$, com $R \neq I_3$. Assim, a matriz A não é equivalente por linhas à matriz identidade e portanto **não** é invertível.

Se um sistema linear $A\,X = B$ tem o **número de equações igual ao número de incógnitas**, então o conhecimento da inversa da matriz do sistema A^{-1}, reduz o problema de resolver o sistema a simplesmente fazer um produto de matrizes, como está enunciado no próximo teorema.

Teorema 2.8. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(a) *O sistema associado $AX = B$ tem solução única se, e somente se, A é invertível. Neste caso a solução é $X = A^{-1}B$;*

(b) *O sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, A é singular (não invertível).*

Demonstração. (a) Se a matriz A é invertível, então multiplicando $A\,X = B$ por A^{-1} à esquerda em ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\,X) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_n X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Aqui foram usadas as propriedades (h) e (i) do Teorema 1.1 na página 8. Portanto, $X = A^{-1}B$ é a única solução do sistema $A\,X = B$. Por outro lado, se o sistema $A\,X = B$ possui solução única, então a forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema $[A \mid B]$ é da forma $[R \mid S]$, em que $R = I_n$. Pois a matriz A é quadrada e caso R fosse diferente da identidade possuiria uma linha de zeros (Proposição 1.5 na página 44) o que levaria a que o sistema $A\,X = B$ ou não tivesse solução ou tivesse infinitas soluções. Logo, a matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade o que pelo Teorema 2.7 na página 78 implica que A é invertível.

(b) Todo sistema homogêneo possui pelo menos a solução trivial. Pelo item anterior, esta será a única solução se, e somente se, A é invertível. ■

Vamos ver no próximo exemplo que se conhecemos a inversa de uma matriz, então a produção de uma indústria em vários períodos pode ser obtida apenas multiplicando-se a inversa por matrizes colunas que contenham a arrecadação e as quantidades dos insumos utilizados em cada período.

Exemplo 2.7. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 2,00, R$ 3,00 e R$ 5,00, respectivamente.

Como vimos no Exemplo 1.6 na página 6, usando matrizes o esquema de produção pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} \\ \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \\ \text{preço/kg} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \end{array} = A \qquad X = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array}$$

$$AX = \left[\begin{array}{c} x+y+z \\ 2x+y+4z \\ 2x+3y+5z \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

No Exemplo 2.5 na página 80 determinamos a inversa da matriz

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

que é

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] = \frac{1}{5}\left[\begin{array}{rrr} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Sabendo-se a inversa da matriz A podemos saber a produção da indústria sempre que soubermos quanto foi gasto do insumo A, do insumo B e a arrecadação.

(a) Se em um período com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2 kg de B, essa indústria arrecadou R\$ 2500,00, então para determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos simplesmente multiplicamos A^{-1} pela matriz

$$B = \left[\begin{array}{c} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Portanto, foram produzidos 700 kg do produto X, 200 kg de Y e 100 kg de Z.

(b) Se em outro período com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e $2,1$ kg de B, essa indústria arrecadou R\$ $2900,00$, então para determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos simplesmente multiplicamos A^{-1} pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2100 \\ 2900 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1000 \\ 2100 \\ 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Portanto, foram produzidos 500 kg do produto X, 300 kg de Y e 200 kg de Z.

Vamos mostrar a recíproca do item (b) do Teorema 2.2 na página 70. Este resultado será útil na demonstração de que o determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes (Subseção 2.2.2 na página 112).

Proposição 2.9. *Se A e B são matrizes $n \times n$, com AB invertível, então A e B são invertíveis.*

Demonstração. Considere o sistema $(AB)X = \bar{0}$. Se B **não** fosse invertível, então existiria $X \neq \bar{0}$, tal que $B\,X = \bar{0}$ (Teorema 2.8 na página 82). Multiplicando-se por A, teríamos $AB\,X = \bar{0}$, o que, novamente pelo Teorema 2.8 na página 82, contradiz o fato de AB ser invertível. Portanto, B é invertível. Agora, se B e AB são invertíveis, então A também é invertível, pois $A = (AB)B^{-1}$, que é o produto de duas matrizes invertíveis. ■

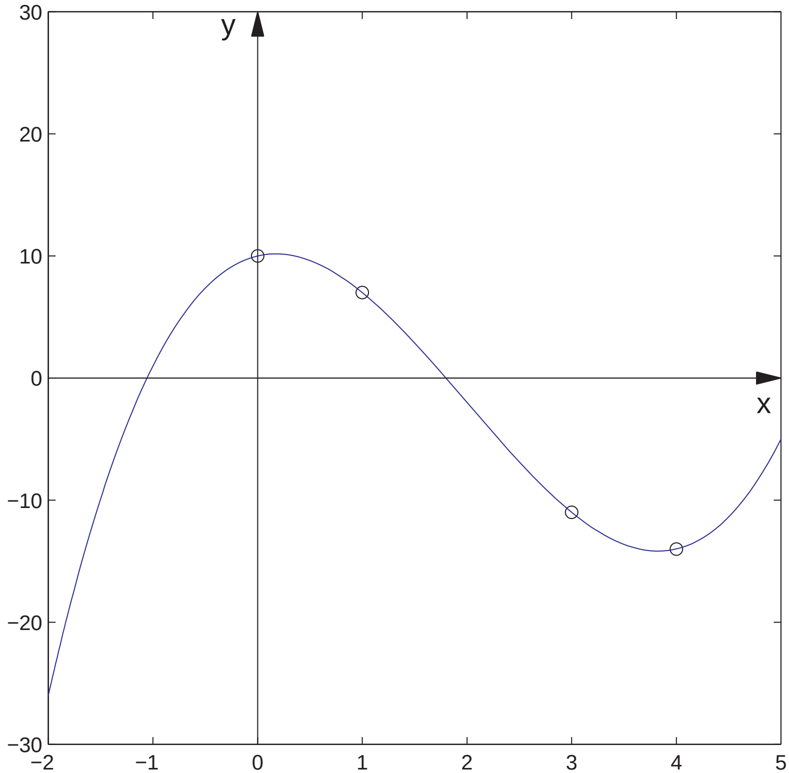
2.1.4 Aplicação: Interpolação Polinomial

Sejam $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_n = (x_n, y_n)$, com $x_1, \ldots, x_n$ números distintos. Considere o problema de encontrar um polinômio de grau $n-1$

$$p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

que *interpola* os dados, no sentido de que $p(x_i) = y_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

Por exemplo se os pontos são $P_1 = (0, 10), P_2 = (1, 7), P_3 = (3, -11), P_4 = (4, -14)$ então o problema consiste em encontrar um polinômio de grau 3 que interpola os pontos dados (veja o Exercício 1.2.8 na página 56).



Vamos mostrar que existe, um e somente um, polinômio de grau no máximo igual à $n-1$, que interpola n pontos, com abscissas distintas. Substituindo os pontos no polinômio $p(x)$, obtemos um sistema linear $AX = B$, em que

$$X = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é chamada **matriz de Vandermonde**.

Vamos mostrar que $AX = B$ tem somente uma solução. Pelo Teorema 2.8 na página 82, um sistema de n equações e n incógnitas $AX = B$ tem solução única se, e somente se, o sistema homogêneo associado, $AX = \bar{0}$, tem somente a solução trivial. $X = [\ a_{n-1} \ \cdots \ a_0 \ ]$ é solução do sistema homogêneo se, e somente se, o polinômio de grau $n-1$, $p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, se anula em n pontos distintos. O que implica que o polinômio $p(x)$ é o polinômio com todos os seus coeficientes iguais a zero. Portanto, o sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$ tem somente a solução trivial. Isto prova que existe, um e somente um, polinômio de grau no máximo igual à $n-1$, que interpola n pontos, com abscissas distintas.

Assim, a solução do sistema linear é $X = A^{-1}B$. Como a matriz A depende apenas das abscissas dos pontos, tendo calculado a matriz A^{-1} podemos determinar rapidamente os polinômios que interpolam vários conjuntos de pontos, desde que os pontos de todos os conjuntos tenham as mesmas abscissas dos pontos do conjunto inicial.

2.1.5 Aplicação: Criptografia

Vamos transformar uma mensagem em uma matriz da seguinte forma. Vamos quebrar a mensagem em pedaços de tamanho 3 e cada pedaço será convertido em uma matriz coluna usando a Tabela 2.1 de conversão entre caracteres e números.

Considere a seguinte mensagem criptografada

`1ydobbr,?` (2.5)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	à	á	â
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
ã	ç	é	ê	í	ó	ô	õ	ú	ü	A	B	C	D	E
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
U	V	W	X	Y	Z	À	Á	Â	Ã	Ç	É	Ê	Í	Ó
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
Ô	Õ	Ú	Ü	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:
75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
;	<	=	>	?	@	!	"	#	$	%	&	'	(	)
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
*	+	,	-	.	/	[	\	]	_	{	|	}		
105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117		

Tabela 2.1 – Tabela de conversão de caracteres em números

Quebrando a mensagem criptografada em pedaços de tamanho 3 e convertendo cada pedaço para uma coluna de números usando a Tabela 2.1 obtemos a matriz

$$Y = \begin{bmatrix} 80 & 15 & 18 \\ 25 & 2 & 107 \\ 4 & 2 & 94 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que esta mensagem foi criptografada fazendo o produto da mensagem inicial pela matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$X = M^{-1}Y$$

será a mensagem inicial convertida para números, ou seja,

$$X = M^{-1}Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 & 15 & 18 \\ 25 & 2 & 107 \\ 4 & 2 & 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 & 15 & 5 \\ 21 & 0 & 13 \\ 4 & 2 & 94 \end{bmatrix}$$

Convertendo para texto usando novamente a Tabela 2.1 obtemos que a mensagem que foi criptografada é

`Tudo bem?` (2.6)

Exercícios Numéricos (respostas na página 539)

2.1.1. Seja A uma matriz 3×3. Suponha que $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é solução do sistema homogêneo $A\,X = \bar{0}$. A matriz A é singular ou não? Justifique.

2.1.2. Se possível, encontre as inversas das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$;

2.1.3. Encontre todos os valores de a para os quais a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$ tem inversa.

2.1.4. Se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

encontre $(A\,B)^{-1}$.

2.1.5. Resolva o sistema $A\,X = B$, se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2.1.6. (Relativo à Subseção 2.1.2) Encontre matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$ tais que $A = E_1 \ldots E_k$, para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercícios usando o MATLAB®

Comandos do MATLAB®:

`>> M=[A,B]` atribui à matriz `M` a matriz obtida colocando lado a lado as matrizes `A` e `B`.

`>> A=[A1,...,An]` cria uma matriz `A` formada pelas matrizes, definidas anteriormente, `A1, ..., An` colocadas uma ao lado da outra;

`>> M=A(:,k:l)` atribui à matriz `M` a submatriz da matriz `A` obtida da coluna `l` à coluna `k` da matriz `A`.

Comando do pacote GAAL:

`>> B=escalona(A)` calcula passo a passo a forma escalonada reduzida da matriz `A` e armazena a matriz resultante na variável `B`.

2.1.7. O pacote `GAAL` contém alguns arquivos com mensagens criptografadas e uma chave para decifrá-las. Use os comandos a seguir para ler dos arquivos e atribuir às variáveis correspondentes, uma mensagem criptografada e a uma chave para decifrá-la.

```
>> menc=lerarq('c:/matlab/toolbox/gaal/menc1.txt')
>> key=lerarq('c:/matlab/toolbox/gaal/key.txt')
```

Com estes comandos foram lidos os arquivos `menc1.txt` e `key.txt` e atribuídos os resultados às variáveis `menc` e `key` respectivamente. Para converter a mensagem criptografada e a chave para matrizes numéricas use os comandos do pacote `gaal`:

```
>> y=char2num(menc), M=char2num(key)
```

Sabendo-se que a mensagem criptografada (convertida para números), `y`, foi originalmente obtida multiplicando-se a matriz `M` pela mensagem original (convertida para números), `x`, determine `x`. Descubra a mensagem usando o comando do pacote `gaal`, `num2char(x)`, que converte a matriz para texto. Decifre as mensagens que estão nos arquivos `menc2.txt` e `menc3.txt`. Como deve ser a matriz `M` para que ela possa ser uma matriz chave na criptografia?

Exercícios Teóricos

2.1.8. (a) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se, e somente se, $ad - bc \neq 0$ e neste caso a inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(Sugestão: encontre a forma escalonada reduzida da matriz $[\,A \mid I_2\,]$, para $a \neq 0$ e para $a = 0$.)

(b) Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & g \\ cx & + & dy & = & h \end{array} \right.$$

tem como solução

$$x = \frac{gd - bh}{ad - bc}, \quad y = \frac{ah - gc}{ad - bc}$$

Sugestão para os próximos 4 exercícios: Para verificar que uma matriz B é a inversa de uma matriz A, basta fazer um dos produtos AB ou BA e verificar que é igual à I_n.

2.1.9. Se A é uma matriz $n \times n$ e $A^k = \bar{0}$, para k um inteiro positivo, mostre que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

2.1.10. Seja A uma **matriz diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero ($a_{ij} = 0$, para $i \neq j$). Se $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$, mostre que A é invertível e a sua inversa é também uma matriz diagonal com elementos na diagonal dados por $1/a_{11}, 1/a_{22}, \ldots, 1/a_{nn}$.

2.1.11. Sejam A e B matrizes quadradas. Mostre que se $A+B$ e A forem invertíveis, então

$$(A+B)^{-1} = A^{-1}(I_n + BA^{-1})^{-1}.$$

2.1.12. Seja J_n a matriz $n \times n$, cujas entradas são iguais a 1. Mostre que se $n > 1$, então

$$(I_n - J_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} J_n.$$

(Sugestão: observe que $J_n^2 = nJ_n$.)

2.1.13. Mostre que se B é uma matriz invertível, então $AB^{-1} = B^{-1}A$ se, e somente se, $AB = BA$. (Sugestão: multiplique a equação $AB = BA$ por B^{-1}.)

2.1.14. Mostre que se A é uma matriz invertível, então $A+B$ e $I_n + BA^{-1}$ são ambas invertíveis ou ambas não invertíveis. (Sugestão: multiplique $A+B$ por A^{-1}.)

2.1.15. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que se B não é invertível, então AB também não o é.

2.1.16. Mostre que se A e B são matrizes $n \times n$, invertíveis, então A e B são equivalentes por linhas.

2.1.17. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times m$, com $n < m$. Mostre que AB não é invertível. (Sugestão: Mostre que o sistema $(AB)X = \bar{0}$ tem solução não trivial.)

2.2 Determinantes

Vamos inicialmente definir o determinante de matrizes 1×1. Para cada matriz $A = [a]$ definimos o **determinante** de A, indicado por $\det(A)$, por $\det(A) = a$. Vamos, agora, definir o determinante de matrizes 2×2 e a partir daí definir para matrizes de ordem maior. A cada matriz A, 2×2, associamos um número real, denominado **determinante** de A, por:

$$\det(A) = \det \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Para definir o determinante de matrizes quadradas maiores, precisamos definir o que são os menores de uma matriz. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, o **menor** do elemento a_{ij}, denotado por $\tilde{A}_{ij}$, é a submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de A obtida eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A, que tem o seguinte aspecto:

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & \ldots & & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & a_{ij} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & & \ldots & a_{nn} \end{array} \right] & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Exemplo 2.8. Para uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$,

$$\tilde{A}_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos definir os cofatores de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{3\times 3}$. O **cofator** do elemento a_{ij}, denotado por $\tilde{a}_{ij}$, é definido por

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

ou seja, o cofator $\tilde{a}_{ij}$, do elemento a_{ij} é igual à mais ou menos o determinante do menor $\tilde{A}_{ij}$, sendo o mais e o menos determinados pela seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.9. Para uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$,

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \det(\tilde{A}_{23}) = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}$$

Vamos, agora, definir o determinante de uma matriz 3×3. Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então, o determinante de A é igual à soma dos produtos dos elementos da 1ª linha pelos seus cofatores.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} \\
&= a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).
\end{aligned}$$

Da mesma forma que a partir do determinante de matrizes 2×2, definimos o determinante de matrizes 3×3, podemos definir o determinante de matrizes quadradas de ordem maior. Supondo que sabemos como calcular o determinante de matrizes $(n-1) \times (n-1)$ vamos definir o determinante de matrizes $n \times n$.
Vamos definir, agora, os cofatores de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$. O **cofator** do elemento a_{ij}, denotado por $\tilde{a}_{ij}$, é definido por

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij}),$$

ou seja, o cofator $\tilde{a}_{ij}$, do elemento a_{ij} é igual à mais ou menos o determinante do menor $\tilde{A}_{ij}$, sendo o mais e o menos determinados pela seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Definição 2.2. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$. O **determinante** de A, denotado por $\det(A)$, é definido por

$$\det(A) = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + \ldots + a_{1n}\tilde{a}_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\tilde{a}_{1j}, \tag{2.7}$$

em que $\tilde{a}_{1j} = (-1)^{1+j}\det(\tilde{A}_{1j})$ é o cofator do elemento a_{1j}. A expressão (2.8) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de** A em termos da 1ª linha.

Exemplo 2.10. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -3 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo-se o determinante de A em cofatores, obtemos

$$\det(A) = 0\tilde{a}_{11} + 0\tilde{a}_{12} + 0\tilde{a}_{13} + (-3)(-1)^{1+4}\det(B), \quad \text{em que} \quad B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

Mas o $\det(B)$ também pode ser calculado usando cofatores,

$$\begin{aligned} \det(B) &= 1\tilde{b}_{11} + 2\tilde{b}_{12} + 3\tilde{b}_{13} \\ &= 1(-1)^{1+1}\det(\tilde{B}_{11}) + 2(-1)^{1+2}\det(\tilde{B}_{12}) + 3(-1)^{1+3}\det(\tilde{B}_{13}) \\ &= \det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -8 - 2\,(-2) + 3\,(-7) \\ &= -25 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\det(A) = 3\det(B) = -75.$$

Exemplo 2.11. Usando a definição de determinante, vamos mostrar que o determinante de uma matriz **triangular inferior** (isto é, os elementos situados acima da diagonal principal são iguais a zero) é o produto dos elementos da diagonal principal. Vamos mostrar inicialmente para matrizes 3×3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se o determinante de A em cofatores, obtemos

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Vamos supor termos provado que para qualquer matriz $(n-1) \times (n-1)$ triangular inferior, o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal. Então vamos provar que isto também vale para matrizes $n \times n$. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_{n1} & & \ldots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se o determinante de A em cofatores, obtemos

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_{n2} & & \ldots & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},$$

pois o determinante acima é de uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ triangular inferior. Em particular, para a matriz identidade, I_n,

$$\det(I_n) = 1.$$

2.2.1 Propriedades do Determinante

Vamos provar uma propriedade importante do determinante. Para isso vamos escrever a matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ em termos das suas linhas

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ A_k \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

em que A_i é a linha i da matriz A, ou seja, $A_i = [\, a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in} \,]$. Se a linha A_k é escrita na forma $A_k = \alpha X + \beta Y$, em que $X = [\, x_1 \ldots x_n \,]$, $Y = [\, y_1 \ldots y_n \,]$ e α e β são escalares, dizemos que a linha A_k é **combinação linear** de X e Y. Se a linha A_k é combinação linear de X e Y, então o determinante pode ser decomposto como no resultado seguinte.

Teorema 2.10. *Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ escrita em termos das suas linhas, denotadas por A_i, ou seja, $A_i = [\, a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in}\,]$. Se para algum k, a linha $A_k = \alpha X + \beta Y$, em que $X = [\, x_1 \ldots x_n\,]$, $Y = [\, y_1 \ldots y_n\,]$ e α e β são escalares, então:*

$$\det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Aqui, $A_k = \alpha X + \beta Y = [\, \alpha x_1 + \beta y_1 \;\ldots\; \alpha x_n + \beta y_n\,]$.

Demonstração. Vamos provar aqui somente para $k = 1$. Para $k > 1$ é demonstrado no Apêndice III na página 127. Se $A_1 = \alpha X + \beta Y$, em que $X = [\, x_1 \ldots x_n\,]$, $Y = [\, y_1 \ldots y_n\,]$ e α e β são escalares, então:

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} \alpha X + \beta Y \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (\alpha x_j + \beta y_j) \det(\tilde{A}_{1j}) \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j \det(\tilde{A}_{1j}) + \beta \sum_{j=1}^{n} y_j \det(\tilde{A}_{1j}) \\
&= \alpha \det\begin{bmatrix} X \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det\begin{bmatrix} Y \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.12. O cálculo do determinante da matriz a seguir pode ser feito da seguinte forma:

$$\det\begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ 2\cos t - 3\operatorname{sen} t & 2\operatorname{sen} t + 3\cos t \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} = 3$$

Pela definição de determinante, o determinante deve ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo a 1ª linha. O próximo resultado, que não vamos provar neste momento (Apêndice III na página 127), afirma que o determinante pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo *qualquer linha* ou *qualquer coluna*.

Teorema 2.11. *Seja A uma matriz $n \times n$. O determinante de A pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo **qualquer linha** ou **qualquer coluna**.*

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \ldots + a_{in}\tilde{a}_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij}, \quad \textit{para } i = 1, \ldots, n, && (2.8) \\ &= a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \ldots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij}, \quad \textit{para } j = 1, \ldots, n, && (2.9) \end{aligned}$$

*em que $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij})$ é o cofator do elemento a_{ij}. A expressão (2.8) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de A em termos da i-ésima linha** e (2.9) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de A em termos da j-ésima coluna**.*

Temos a seguinte consequência deste resultado.

Corolário 2.12. *Seja A uma matriz $n \times n$. Se A possui duas linhas iguais, então* $\det(A) = 0$.

Demonstração. O resultado é claramente verdadeiro para matrizes 2×2. Supondo que o resultado seja verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$, vamos provar que ele é verdadeiro para matrizes $n \times n$. Suponhamos que as linhas k e l sejam iguais, para $k \neq l$. Desenvolvendo o determinante de A em termos de uma linha i, com $i \neq k, l$, obtemos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

Mas, cada $\tilde{A}_{ij}$ é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ com duas linhas iguais. Como estamos supondo que o resultado seja verdadeiro para estas matrizes, então $\det(\tilde{A}_{ij}) = 0$. Isto implica que $\det(A) = 0$. ■

No próximo resultado mostramos como varia o determinante de uma matriz quando aplicamos operações elementares sobre suas linhas.

Teorema 2.13. *Sejam A e B matrizes $n \times n$.*

(a) *Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α, então*

$$\det(B) = \alpha \det(A)\,;$$

(b) *Se B resulta de A pela troca da posição de duas linhas $k \neq l$, então*

$$\det(B) = -\det(A)\,;$$

(c) *Se B é obtida de A substituindo a linha l por ela somada a um múltiplo escalar de uma linha k, $k \neq l$, então*

$$\det(B) = \det(A)\,.$$

Demonstração. (a) Segue diretamente do Teorema 2.10 na página 100.

(b) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Agora, pelo Teorema 2.10 na página 100 e o Corolário 2.12, temos que

$$
\begin{aligned}
0 \quad &= \quad \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \\
&= \quad 0 + \det(A) + \det(B) + 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\det(A) = -\det(B)$.

(c) Novamente, pelo Teorema 2.10 na página 100, temos que

$$
\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l + \alpha A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.
$$

■

Exemplo 2.13. Vamos calcular o determinante da matriz

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}
$$

usando operações elementares para transformá-la numa matriz triangular superior e aplicando o Teorema 2.13.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= -\det\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} & \boxed{1^{\text{a}}\text{ linha} \longleftrightarrow 2^{\text{a}}\text{ linha}} \\
&= -3\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} & \boxed{1/3\times 1^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}}\text{ linha}} \\
&= -3\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} & \boxed{-2\times 1^{\text{a}}\text{ linha}+3^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}}\text{ linha}} \\
&= -3\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix} & \boxed{-10\times 2^{\text{a}}\text{ linha}+3^{\text{a}}\text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}}\text{ linha}} \\
&= (-3)(-55) = 165
\end{aligned}
$$

Quando multiplicamos uma linha de uma matriz por um escalar α o determinante da nova matriz é igual à α multiplicado pelo determinante da matriz antiga. Mas o que estamos calculando aqui é o determinante da matriz antiga, por isso ele é igual à $1/\alpha$ multiplicado pelo determinante da matriz nova.

Para se calcular o determinante de uma matriz $n \times n$ pela expansão em cofatores, precisamos fazer n produtos e calcular n determinantes de matrizes $(n-1)\times(n-1)$, que por sua vez vai precisar de $n-1$ produtos e assim por diante. Portanto, ao todo são necessários da ordem de $n!$ produtos. Para se calcular o determinante de uma matriz 20×20, é necessário se realizar $20! \approx 10^{18}$ produtos. Os computadores pessoais realizam da ordem de 10^8 produtos por segundo. Portanto, um computador pessoal precisaria de cerca de 10^{10} segundos ou 10^3 anos para calcular o determinante de uma matriz 20×20 usando a expansão em cofatores. Entretanto usando o método apresentado no exemplo anterior para o cálculo do determinante, é necessário apenas da ordem de n^3 produtos. Ou seja, para calcular o determinante de uma matriz 20×20 usando o método apresentado no exemplo anterior um computador pessoal gasta muito menos de um segundo.

A seguir estabelecemos duas propriedades do determinante que serão demonstradas somente na Subseção 2.2.2 na página 112.

Teorema 2.14. *Sejam A e B matrizes $n \times n$.*

(a) Os determinantes de A e de sua transposta A^t são iguais,

$$\det(A) = \det(A^t)\,;$$

(b) O determinante do produto de A por B é igual ao produto dos seus determinantes,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Observação. Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta (Teorema 2.14 (b)), segue-se que todas as propriedades que se referem a linhas são válidas com relação às colunas.

Exemplo 2.14. Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Vamos mostrar que se A é invertível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Como $A\,A^{-1} = I_n$, aplicando-se o determinante a ambos os membros desta igualdade e usando o Teorema 2.14, obtemos

$$\det(A)\;\det(A^{-1}) = \det(I_n).$$

Mas, $\det(I_n) = 1$ (Exemplo 2.11 na página 99, a matriz identidade também é triangular inferior!). Logo, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Exemplo 2.15. Se uma matriz quadrada é tal que $A^2 = A^{-1}$, então vamos mostrar que $\det(A) = 1$. Aplicando-se o determinante a ambos os membros da igualdade acima, e usando novamente o Teorema 2.14 e o resultado do exemplo anterior, obtemos

$$(\det(A))^2 = \frac{1}{\det(A)}.$$

Logo, $(\det(A))^3 = 1$. Portanto, $\det(A) = 1$.

O resultado seguinte caracteriza em termos do determinante as matrizes invertíveis e os sistemas lineares homogêneos que possuem solução não trivial.

Teorema 2.15. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(a) *A matriz A é invertível se, e somente se,* $\det(A) \neq 0$.

(b) *O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial se, e somente se,* $\det(A) = 0$.

Demonstração. (a) Seja R a forma escalonada reduzida da matriz A.

A demonstração deste item segue-se de três observações:

- Pelo Teorema 2.13 na página 104, $\det(A) \neq 0$ se, e somente se, $\det(R) \neq 0$.
- Pela Proposição 1.5 da página 44, ou $R = I_n$ ou a matriz R tem uma linha nula. Assim, $\det(A) \neq 0$ se, e somente se, $R = I_n$.
- Pelo Teorema 2.7 na página 78, $R = I_n$ se, e somente se, A é invertível.

(b) Pelo Teorema 2.8 na página 82, o sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, a matriz A não é invertível. E pelo item anterior, a matriz A é não invertível se, e somente se, $\det(A) = 0$.

■

Exemplo 2.16. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinar os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que existe $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \bar{0}$ que satisfaz $AX = \lambda X$.

(b) Para cada um dos valores de λ encontrados no item anterior determinar todos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \bar{0}$ tais que $AX = \lambda X$.

Solução:

(a) Como a matriz identidade I_3 é o elemento neutro do produto, então

$$AX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad AX = \lambda I_3 X.$$

Subtraindo-se $\lambda I_3 X$ obtemos

$$AX - \lambda I_3 X = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_3)X = \bar{0}.$$

Agora, este sistema homogêneo tem solução não trivial ($X \neq \bar{0}$) se, e somente se,

$$\det(A - \lambda I_3) = 0.$$

Mas

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$$

se, e somente se, $\lambda = 2$ ou $\lambda = 3$. Assim, somente para $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ existem vetores $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \bar{0}$ tais que $AX = \lambda X$.

(b) Para $\lambda = 2$:

$$(A - 2I_3)X = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2y & + & 2z & = & 0 \\ y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

que tem solução o conjunto dos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda = 3$:

$$(A - 3I_3)X = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & -y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

que tem solução o conjunto dos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, para todos os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.17. A matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se, e somente se, $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Neste caso a inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

como pode ser verificado multiplicando-se a candidata a inversa pela matriz A.

Observe que este exemplo fornece uma regra para se encontrar a inversa de uma matriz 2×2: troca-se a posição dos elementos da diagonal principal, troca-se o sinal dos outros elementos e divide-se todos os elementos pelo determinante de A.

Exemplo 2.18. Considere o sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = g \\ cx + dy = h \end{cases}$$

A matriz deste sistema é

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Se $\det(A) \neq 0$, então a solução do sistema é

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} dg - bh \\ -cg + ah \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} g & b \\ h & d \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} a & g \\ c & h \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} g & b \\ h & d \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \quad y = \frac{\det\begin{bmatrix} a & g \\ c & h \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

esta é a chamada **Regra de Cramer** para sistemas de 2 equações e 2 incógnitas.A Regra de Cramer para sistemas de n equações e n incógnitas será apresentada na Subseção 2.2.3.

2.2.2 Matrizes Elementares e o Determinante (opcional)

Relembramos que uma matriz elementar é uma matriz que se obtém aplicando-se uma operação elementar na matriz identidade. Assim, aplicando-se o Teorema 2.13 na página 104 obtemos o resultado seguinte.

Proposição 2.16. (a) *Se $E_{i,j}$ é a matriz elementar obtida trocando-se as linhas i e j da matriz identidade, então*

$$\det(E_{i,j}) = -1.$$

(b) *Se $E_i(\alpha)$ é a matriz elementar obtida da matriz identidade, multiplicando-se a linha i por α, então*

$$\det(E_i(\alpha)) = \alpha.$$

(c) *Se $E_{i,j}(\alpha)$ é a matriz elementar obtida da matriz identidade, somando-se à linha j, α vezes a linha i, então*

$$\det(E_{i,j}(\alpha)) = 1.$$

Lembramos também que uma matriz é invertível se, e somente se, ela é o produto de matrizes elementares (Teorema 2.6 na página 75). Além disso, o resultado da aplicação de uma operação elementar em uma matriz é o mesmo que multiplicar a matriz à esquerda pela matriz elementar correspondente.
Usando matrizes elementares podemos provar o Teorema 2.14 na página 107.

Demonstração do Teorema 2.14.

(a) Queremos provar que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Vamos dividir a demonstração deste item em três casos:

Caso 1: Se $A = E$ é uma matriz elementar. Este caso segue-se diretamente da proposição anterior e do Teorema 2.13 na página 104.

Caso 2: Se A é invertível, então pelo Teorema 2.6 na página 75 ela é o produto de matrizes elementares, $A = E_1 \ldots E_k$. Aplicando-se o caso anterior sucessivas vezes, obtemos

$$\det(AB) = \det(E_1)\ldots\det(E_k)\det(B) = \det(E_1 \ldots E_k)\det(B) = \det(A)\det(B).$$

Caso 3: Se A é singular, pela Proposição 2.9 na página 86, AB também é singular. Logo,

$$\det(AB) = 0 = 0\det(B) = \det(A)\det(B).$$

(b) Queremos provar que $\det(A) = \det(A^t)$. Vamos dividir a demonstração deste item em dois casos.

Caso 1: Se A é uma matriz invertível, pelo Teorema 2.6 na página 75 ela é o produto de matrizes elementares, $A = E_1 \ldots E_k$. É fácil ver que se E é uma matriz elementar, então $\det(E) = \det(E^t)$ (verifique!). Assim,

$$\det(A^t) = \det(E_k^t)\ldots\det(E_1^t) = \det(E_k)\ldots\det(E_1) = \det(E_1 \ldots E_k) = \det(A).$$

Caso 2: Se A não é invertível, então A^t também não o é, pois caso contrário, pelo Teorema 2.2 na página 70, também $A = (A^t)^t$ seria invertível. Assim, neste caso, $\det(A^t) = 0 = \det(A)$. ■

2.2.3 Matriz Adjunta e Inversão (opcional)

Vamos definir a adjunta de uma matriz quadrada e em seguida enunciar e provar um teorema sobre a adjunta que permite provar vários resultados sobre matrizes, entre eles um que fornece uma fórmula para a inversa de uma matriz e também a regra de Cramer. Tanto a adjunta quanto os resultados que vem a seguir são de importância teórica.

Definição 2.3. Seja A uma matriz $n \times n$. Definimos a matriz **adjunta (clássica)** de A, denotada por $\mathrm{adj}(A)$, como a transposta da matriz formada pelos cofatores de A, ou seja,

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \ldots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \ldots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \ldots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix},$$

em que, $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})$ é o cofator do elemento a_{ij}, para $i, j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 2.19. Seja

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular a adjunta de B.

$$\begin{array}{ll}
\tilde{b}_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -6, & \tilde{b}_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 0, \\
\tilde{b}_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, & \tilde{b}_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4, \\
\tilde{b}_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2, & \tilde{b}_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \\
\tilde{b}_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -5, & \tilde{b}_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -2, \\
\tilde{b}_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3, &
\end{array}$$

Assim, a adjunta de B é

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Na definição do determinante são multiplicados os elementos de uma linha pelos cofatores da mesma linha. O teorema seguinte diz o que acontece se somamos os produtos dos elementos de uma linha com os cofatores de outra linha ou se somamos os produtos dos elementos de uma coluna com os cofatores de outra coluna.

Lema 2.17. *Se A é uma matriz $n \times n$, então*

$$a_{k1}\tilde{a}_{i1} + a_{k2}\tilde{a}_{i2} + \ldots + a_{kn}\tilde{a}_{in} = 0 \quad \textit{se } k \neq i; \tag{2.10}$$

$$a_{1k}\tilde{a}_{1j} + a_{2k}\tilde{a}_{2j} + \ldots + a_{nk}\tilde{a}_{nj} = 0 \quad \textit{se } k \neq j; \tag{2.11}$$

em que, $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})$ é o cofator do elemento a_{ij}, para $i, j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Para demonstrar a equação (2.10), definimos a matriz A^* como sendo a matriz obtida de A substituindo a i-ésima linha de A por sua k-ésima linha, ou seja,

$$A = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \text{e} \quad A^* = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

Assim, A^* possui duas linhas iguais e pelo Corolário 2.12 na página 103, $\det(A^*) = 0$. Mas, o determinante de A^* desenvolvido segundo a sua i-ésima linha é exatamente a equação (2.10).

A demonstração de (2.11) é feita de forma análoga, mas usando o item (d) do Teorema 2.13, ou seja, que $\det(A) = \det(A^t)$. ■

Teorema 2.18. *Se A é uma matriz $n \times n$, então*

$$A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A = \det(A)I_n$$

Demonstração. O produto da matriz A pela matriz adjunta de A é dada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \ldots & \tilde{a}_{j1} & \ldots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{j2} & \ldots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \ldots & \tilde{a}_{jp} & \ldots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

O elemento de posição i, j de A adj(A) é

$$(A \text{ adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{jk} = a_{i1}\tilde{a}_{j1} + a_{i2}\tilde{a}_{j2} + \ldots a_{in}\tilde{a}_{jn} \,.$$

Pelo Lema 2.17, equação (2.10) e do Teorema 2.11 na página 102 segue-se que

$$(A \text{ adj}(A))_{ij} = \begin{cases} \det(A) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Assim,

$$A \text{ adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det(A) & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) I_n \,.$$

Analogamente, usando Lema 2.17, equação (2.11), se prova que adj(A) $A = \det(A) I_n$. ■

Exemplo 2.20. Vamos mostrar que se uma matriz A é singular, então adj(A) também é singular. Vamos separar em dois casos.

(a) Se $A = \bar{0}$, então adj(A) também é a matriz nula, que é singular.

(b) Se $A \neq \bar{0}$, então pelo Teorema 2.18 na página 117, adj$(A)\,A = \bar{0}$. Mas, então, se adj(A) fosse invertível, então A seria igual à matriz nula (por que?), que estamos assumindo não ser este o caso. Portanto, adj(A) tem que ser singular.

Corolário 2.19. *Seja A uma matriz $n \times n$. Se* $\det(A) \neq 0$, *então*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)\,;$$

Demonstração. Se $\det(A) \neq 0$, então definindo $B = \dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$, pelo Teorema 2.18 temos que

$$A\,B = A(\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)) = \frac{1}{\det(A)}(A\ \mathrm{adj}(A)) = \frac{1}{\det(A)}\det(A)I_n = I_n\,.$$

Aqui, usamos a propriedade (j) do Teorema 1.1 na página 8. Portanto, A é invertível e B é a inversa de A. ■

Exemplo 2.21. No Exemplo 2.17 na página 111 mostramos como obter rapidamente a inversa de ma matriz 2×2. Usando o Corolário 2.19 podemos também obter a inversa de uma matriz 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \text{se } \det(A) \neq 0$$

Ou seja, a inversa de uma matriz 2×2 é facilmente obtida trocando-se a posição dos elementos da diagonal principal, trocando-se o sinal dos outros elementos e dividindo-se todos os elementos pelo determinante de A.

Exemplo 2.22. Vamos calcular a inversa da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A sua adjunta foi calculada no Exemplo 2.19 na página 116. Assim,

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\mathrm{adj}(B) = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Corolário 2.20 (Regra de Cramer). *Se o sistema linear $AX = B$ é tal que a matriz A é $n \times n$ e invertível, então a solução do sistema é dada por*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

em que A_j é a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua j-ésima coluna por B, para $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Como A é invertível, pelo Corolário 2.19

$$X = A^{-1} B = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) B.$$

A entrada x_j é dada por

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} (\tilde{a}_{1j} b_1 + \ldots + \tilde{a}_{nj} b_n) = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

em que A_j é a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua j-ésima coluna por B, para $j = 1, \ldots, n$ e $\det(A_j)$ foi calculado fazendo o desenvolvimento em cofatores em relação a j-ésima coluna de A_j. ■

Se a matriz A não é invertível, então a regra de Cramer não pode ser aplicada. Pode ocorrer que $\det(A) = \det(A_j) = 0$, para $j = 1, \ldots, n$ e o sistema não tenha solução (verifique!). A regra de Cramer tem um valor teórico, por fornecer uma fórmula para a solução de um sistema linear, quando a matriz do sistema é quadrada e invertível.

Exercícios Numéricos (respostas na página 540)

2.2.1. Se $\det(A) = -3$, encontre
(a) $\det(A^2)$; (b) $\det(A^3)$; (c) $\det(A^{-1})$; (d) $\det(A^t)$;

2.2.2. Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $\det(A) = -2$ e $\det(B) = 3$, calcule $\det(A^t B^{-1})$.

2.2.3. Seja $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 3$. Calcule o determinante das matrizes a seguir:

(a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{32} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

2.2.4. Calcule o determinante das matrizes a seguir:

(a) $\begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \cos\beta t & \operatorname{sen}\beta t \\ \alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t & \alpha\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos\beta t \end{bmatrix}$

2.2.5. Calcule o determinante de cada uma das matrizes seguintes usando operações elementares para transformá-las em matrizes triangulares superiores.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

2.2.6. Determine todos os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I_n) = 0$, em que

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

2.2.7. Determine os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que existe $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \bar{0}$ que satisfaz $AX = \lambda X$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2.8. Para as matrizes do exercício anterior, e os valores de λ encontrados, encontre a solução geral do sistema $AX = \lambda X$, ou equivalentemente, do sistema homogêneo $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}$.

Exercícios usando o MATLAB®

Comandos do MATLAB®:

`>> det(A)` calcula o determinante da matriz `A`.

Comando do pacote GAAL:

`>> detopelp(A)` calcula o determinante de `A` aplicando operações elementares até que a matriz esteja na forma triangular superior.

2.2.9. Vamos fazer um experimento no MATLAB® para tentar ter uma idéia do quão comum é encontrar matrizes invertíveis. No prompt do MATLAB® digite a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=randi(2);if(det(A)~=0),c=c+1;end,end,c
```

(não esqueça das vírgulas e pontos e vírgulas!). O que esta linha está mandando o MATLAB® fazer é o seguinte:

- Criar um contador `c` e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir à variável `A`, 1000 matrizes 2×2 com entradas inteiras aleatórias entre -5 e 5.
- Se $\det(\mathtt{A}) \neq 0$, então o contador `c` é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável `c` é escrito.

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável `c`?

2.2.10. Resolva, com o MATLAB®, os **Exercícios Numéricos a partir do** **Exercício 4.**

Exercícios Teóricos

2.2.11. Mostre que se $\det(AB) = 0$, então ou A é singular ou B é singular.

2.2.12. O determinante de AB é igual ao determinante de BA? Justifique.

2.2.13. Mostre que se A é uma matriz não singular tal que $A^2 = A$, então $\det(A) = 1$.

2.2.14. Mostre que se $A^k = \bar{0}$, para algum k inteiro positivo, então A é singular.

2.2.15. Mostre que se $A^t = A^{-1}$, então $\det(A) = \pm 1$;

2.2.16. Mostre que se α é um escalar e A é uma matriz $n \times n$, então $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

2.2.17. Mostre que A, $n \times n$, é invertível se, e somente se, $A^t A$ é invertível.

2.2.18. Sejam A e P matrizes $n \times n$, sendo P invertível. Mostre que $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

2.2.19. Mostre que se uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é **triangular superior**, (isto é, os elementos situados abaixo da diagonal são iguais a zero) então $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

2.2.20. (a) Mostre que se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\det(A) = 0$ se, e somente se, uma linha é múltiplo escalar da outra. E se A for uma matriz $n \times n$?

(b) Mostre que se uma linha A_i de uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, é tal que $A_i = \alpha A_k + \beta A_l$, para α e β escalares e $i \neq k, l$, então $\det(A) = 0$.

(c) Mostre que se uma linha A_i de uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, é tal que $A_i = \sum\limits_{k\neq i} \alpha_k A_k$, para $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ escalares, então $\det(A) = 0$.

2.2.21. Mostre que o **determinante de Vandermonde** é dado por

$$V_n = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

A expressão à direita significa o produto de todos os termos $x_i - x_j$ tais que $i > j$ e $i, j = 1, \ldots, n$. (Sugestão: Mostre primeiro que $V_3 = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$. Suponha que o resultado é verdadeiro para matrizes de Vandermonde de ordem $n - 1$, mostre que o resultado é verdadeiro para matrizes de Vandermonde de ordem n. Faça as seguintes operações nas colunas da matriz, $-x_1 C_{i-1} + C_i \to C_i$, para $i = n, \ldots, 2$. Obtenha $V_n = (x_n - x_1)\ldots(x_2 - x_1)V_{n-1}$.)

2.2.22. Sejam A, B e D matrizes $p \times p$, $p \times (n-p)$ e $(n-p) \times (n-p)$, respectivamente. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ \bar{0} & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D).$$

(Sugestão: O resultado é claramente verdadeiro para $n = 2$. Suponha que o resultado seja verdadeiro para matrizes de ordem $n-1$. Desenvolva o determinante da matriz em termos da 1ª coluna, escreva o resultado em termos de determinantes de ordem $n-1$ e mostre que o resultado é verdadeiro para matrizes de ordem n.)

2.2.23. Dê um exemplo de sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas, $AX = B$, em que $\det(A) = \det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3) = 0$ e o sistema não tenha solução, em que A_j é a matriz que se obtem de A substituindo-se a sua j-ésima coluna por B, para $j = 1, \ldots, n$.

Apêndice III: Demonstração do Teorema 2.11 na página 102

Demonstração do Teorema 2.10 na página 100 para $k > 1$.

Deixamos como exercício para o leitor a verificação de que para matrizes 2×2 o resultado é verdadeiro. Supondo que o resultado seja verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$, vamos provar para matrizes $n \times n$. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Suponha que $k = 2, \ldots, n$. As matrizes $\tilde{A}_{1j}$, $\tilde{B}_{1j}$ e $\tilde{C}_{1j}$ só diferem na $(k-1)$-ésima linha (lembre-se que a primeira linha é retirada!). Além disso, a $(k-1)$-ésima linha de $\tilde{A}_{1j}$ é igual à α vezes a linha correspondente de $\tilde{B}_{1j}$ mais β vezes a linha correspondente de $\tilde{C}_{1j}$ (esta é a relação que vale para a k-ésima linha de A). Como estamos supondo o resultado verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$, então $\det(\tilde{A}_{1j}) = \alpha \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \det(\tilde{C}_{1j})$. Assim,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\tilde{A}_{1j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left[\alpha \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \det(\tilde{C}_{1j}) \right] \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} c_{1j} \det(\tilde{C}_{1j}) \\
&= \alpha \det(B) + \beta \det(C),
\end{aligned}$$

pois $a_{1j} = b_{1j} = c_{1j}$, para $j = 1, \ldots, n$. ■

Lema 2.21. *Sejam $E_1 = [\,1\,0\,\ldots\,0\,], E_2 = [\,0\,1\,0\,\ldots\,0\,], \ldots, E_n = [\,0\,\ldots\,0\,1\,]$. Se A é uma matriz $n \times n$, cuja i-ésima linha é igual à E_k, para algum k ($1 \leq k \leq n$), então*

$$\det(A) = (-1)^{i+k}\det(\tilde{A}_{ik}).$$

Demonstração. É fácil ver que para matrizes 2×2 o lema é verdadeiro. Suponha que ele seja verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$ e vamos provar que ele é verdadeiro para matrizes $n \times n$. Podemos supor que $1 < i \leq n$.
Seja B_j a matriz $(n-2) \times (n-2)$ obtida de A eliminando-se as linhas 1 e i e as colunas j e k, para $1 \leq j \leq n$.
Para $j < k$, a matriz $\tilde{A}_{1j}$ é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ cuja $(i-1)$-ésima linha é igual à E_{k-1}. Para $j > k$, a matriz $\tilde{A}_{1j}$ é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ cuja $(i-1)$-ésima linha é igual à E_k. Como estamos supondo o lema verdadeiro para estas matrizes e como pelo Teorema 2.10 na página 100 se uma matriz tem uma linha nula o seu determinante é igual à zero, então $\det(\tilde{A}_{1k}) = 0$, segue-se que

$$\det(\tilde{A}_{1j}) = \begin{cases} (-1)^{(i-1)+(k-1)}\det(B_j) & \text{se } j < k, \\ 0 & \text{se } j = k, \\ (-1)^{(i-1)+k}\det(B_j) & \text{se } j > k. \end{cases} \tag{2.12}$$

Usando (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(\tilde{A}_{ij}) \\ &= \sum_{j<k}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}(-1)^{(i-1)+(k-1)}\det(B_j) + \sum_{j>k}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}(-1)^{(i-1)+k}\det(B_j) \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$(-1)^{i+k}\det(\tilde{A}_{ik}) = (-1)^{i+k}\left[\sum_{j<k}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(B_j) + \sum_{j>k}^{n}(-1)^{1+(j-1)}a_{1j}\det(B_j)\right]$$

É simples a verificação de que as duas expressões acima são iguais. ■

Demonstração do Teorema 2.11 na página 102.

Pelo Teorema 2.14 na página 107 basta provarmos o resultado para o desenvolvimento em termos das linhas de A. Sejam $E_1 = [1\,0\,\ldots\,0], E_2 = [0\,1\,0\,\ldots\,0], \ldots, E_n = [0\,\ldots\,0\,1]$. Observe que a linha i de A pode ser escrita como $A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_j$. Seja B_j a matriz obtida de A substituindo-se a linha i por E_j. Pelo Teorema 2.10 na página 100 e o Lema 2.21 segue-se que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\det(B_j) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(\tilde{A}_{ij}).$$

■

Teste do Capítulo

1. Calcule o determinante da matriz seguinte usando operações elementares para transformá-la em uma matriz triangular superior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Se possível, encontre a inversa da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Encontre todos os valores de λ para os quais a matriz $A - \lambda I_4$ tem inversa, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Responda **Verdadeiro** ou **Falso**, justificando:

(a) Se $A^2 = -2A^4$, então $(I + A^2)^{-1} = I - 2A^2$;

(b) Se $A^t = -A^2$ e A é não singular, então determinante de A é -1;

(c) Se $B = AA^tA^{-1}$, então $\det(A) = \det(B)$.

(d) $\det(A + B) = \det A + \det B$

3

Vetores no Plano e no Espaço

Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, além da magnitude, da direção e do sentido. Estas grandezas são chamadas **grandezas vetoriais** ou simplesmente **vetores**.

Geometricamente, vetores são representados por **segmentos (de retas) orientados** (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano ou no espaço. A ponta da seta do segmento orientado é chamada **ponto final ou extremidade** e o outro ponto extremo é chamado de **ponto inicial ou origem** do segmento orientado.

Segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento representam o mesmo vetor. A direção, o sentido e o comprimento do vetor são definidos como sendo a direção, o sentido e o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam.

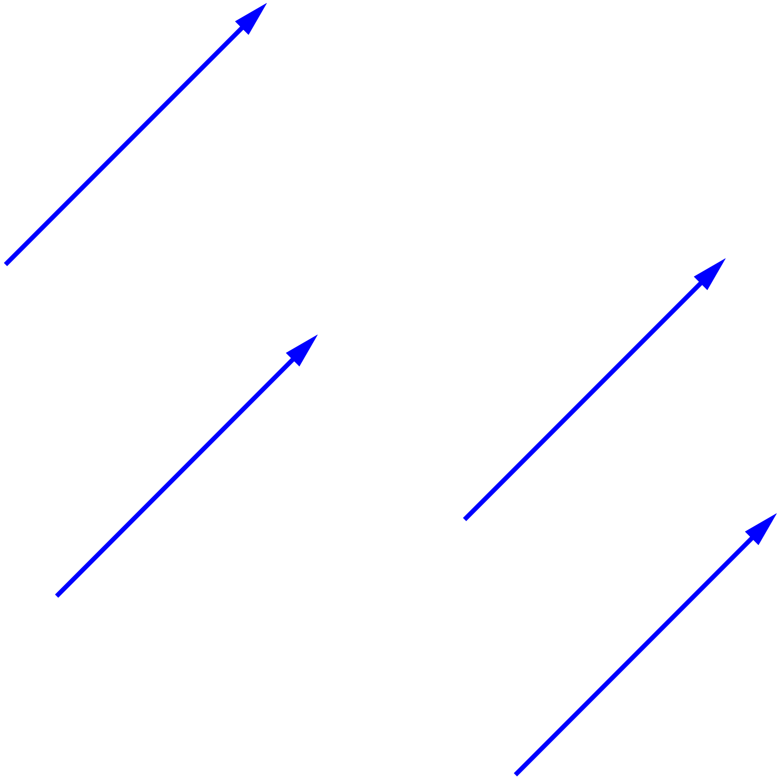


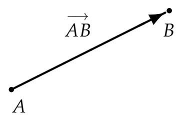
Figura 3.1 – Segmentos orientados representando o mesmo vetor

Este fato é análogo ao que ocorre com os números racionais e as frações. Duas frações representam o mesmo número racional se o numerador e o denominador de cada uma delas estiverem na mesma proporção. Por exemplo, as frações $1/2, 2/4$ e $3/6$ representam o mesmo número racional. A definição de igualdade de vetores também é análoga a igualdade de números racionais. Dois números racionais a/b e c/d são iguais, quando $ad = bc$. Dizemos que dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Na Figura 3.1 temos 4 segmentos orientados, com origens em pontos diferentes, que representam o mesmo vetor, ou seja, são considerados como vetores iguais, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Se o ponto inicial de um representante de um vetor V é A e o ponto final é B, então escrevemos

$$V = \overrightarrow{AB}$$



3.1 Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar

A soma, $V + W$, de dois vetores V e W é determinada da seguinte forma:

- tome um segmento orientado que representa V;
- tome um segmento orientado que representa W, com origem na extremidade de V;
- o vetor $V + W$ é representado pelo segmento orientado que vai da origem de V até a extremidade de W.

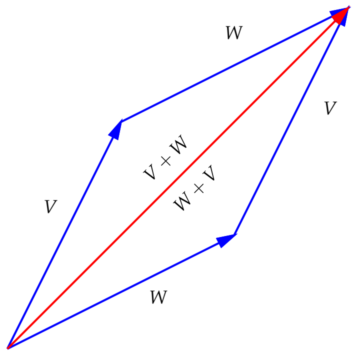


Figura 3.2 – $V + W = W + V$

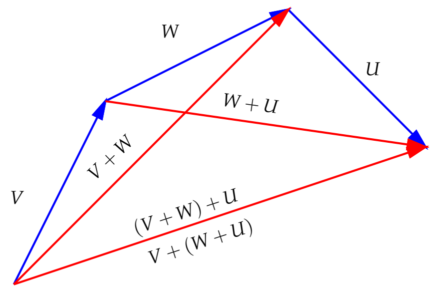


Figura 3.3 – $V + (W + U) = (V + W) + U$

Da Figura 3.2, deduzimos que a soma de vetores é comutativa, ou seja,

$$V + W = W + V, \tag{3.1}$$

para quaisquer vetores V e W. Observamos também que a soma $V + W$ está na diagonal do paralelogramo determinado por V e W, quando estão representados com a mesma origem.

Da Figura 3.3, deduzimos que a soma de vetores é associativa, ou seja,

$$V + (W + U) = (V + W) + U, \tag{3.2}$$

para quaisquer vetores V, W e U.

O vetor que tem a sua origem coincidindo com a sua extremidade é chamado **vetor nulo** e denotado por $\bar{0}$. Segue então, que

$$V + \bar{0} = \bar{0} + V = V, \tag{3.3}$$

para todo vetor V.

Para qualquer vetor V, o **simétrico** de V, denotado por $-V$, é o vetor que tem mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário ao de V. Segue então, que

$$V + (-V) = \bar{0}. \tag{3.4}$$

Definimos a **diferença** W **menos** V, por

$$W - V = W + (-V).$$

Segue desta definição, de (3.1), (3.2), (3.4) e de (3.3) que

$$W + (V - W) = (V - W) + W = V + (-W + W) = V + \bar{0} = V.$$

Assim, a diferença $V - W$ é um vetor que somado a W dá V, portanto ele vai da extremidade de W até a extremidade de V, desde que V e W estejam representados por segmentos orientados com a mesma origem.

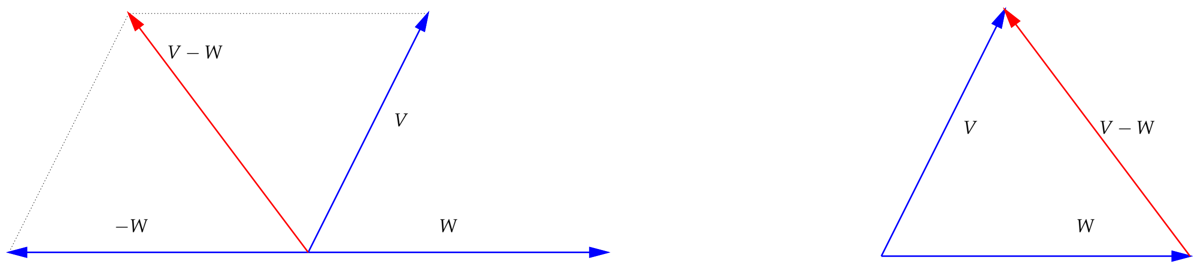


Figura 3.4 – A diferença $V - W$

A **multiplicação de um vetor** V **por um escalar** α, $\alpha\, V$, é determinada pelo vetor que possui as seguintes características:

(a) é o vetor nulo, se $\alpha = 0$ ou $V = \bar{0}$,

(b) caso contrário,

  i. tem comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de V,
  ii. a direção é a mesma de V (neste caso, dizemos que eles são **paralelos**),
  iii. tem o mesmo sentido de V, se $\alpha > 0$ e
  tem o sentido contrário ao de V, se $\alpha < 0$.

As propriedades da multiplicação por escalar serão apresentadas mais a frente. Se $W = \alpha\, V$, dizemos que W é **um múltiplo escalar** de V. É fácil ver que dois vetores não nulos são paralelos (ou **colineares**) se, e somente se, um é um múltiplo escalar do outro.

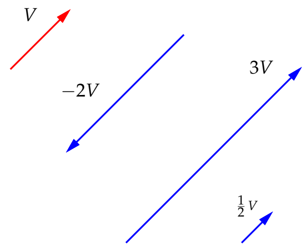


Figura 3.5 – Multiplicação de vetor por escalar

As operações com vetores podem ser definidas utilizando um **sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas**. Em primeiro lugar, vamos considerar os vetores no plano.

Seja V um vetor no plano. Definimos as **componentes de** V como sendo as coordenadas (v_1, v_2) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente

$$\boxed{V = (v_1, v_2).}$$

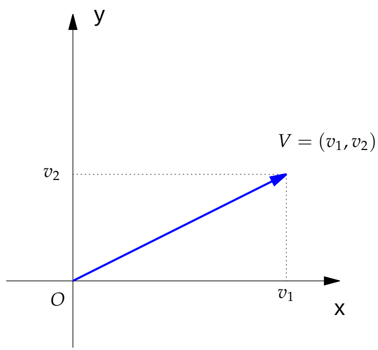


Figura 3.6 – As componentes do vetor V no plano

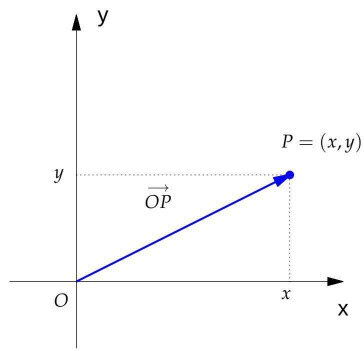


Figura 3.7 – As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$, que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\bar{0} = (0, 0)$. Em termos das componentes, podemos realizar facilmente as operações: soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar.

- Como ilustrado na Figura 3.8, a **soma** de dois vetores $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ é dada por
$$\boxed{V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2);}$$

- Como ilustrado na Figura 3.9, a **multiplicação** de um vetor $V = (v_1, v_2)$ por um escalar α é dada por
$$\boxed{\alpha\, V = (\alpha\, v_1, \alpha\, v_2).}$$

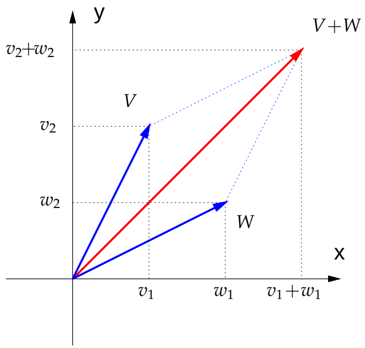


Figura 3.8 – A soma de dois vetores no plano

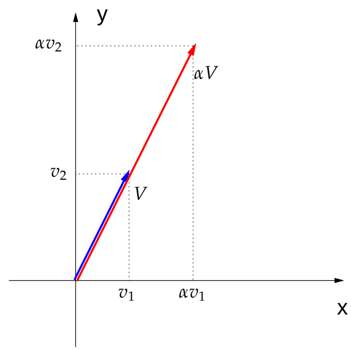


Figura 3.9 – A multiplicação de vetor por escalar no plano

Definimos as **componentes de um vetor no espaço** de forma análoga a que fizemos com vetores no plano. Vamos inicialmente introduzir um **sistema de coordenadas retangulares no espaço**. Para isto, escolhemos um ponto como origem O e como eixos coordenados, três retas orientadas (com sentido de percurso definido), passando pela origem, perpendiculares entre si, sendo uma delas vertical orientada para cima. Estes serão os eixos x, y e z. O eixo z é o eixo vertical. Os eixos x e y são horizontais e satisfazem a seguinte propriedade. Suponha que giramos o eixo x pelo menor ângulo até que coincida com o eixo y. Se os dedos da mão direita apontam na direção do semieixo x positivo de forma que o semieixo y positivo esteja do lado da palma da mão, então o polegar aponta no sentido do semieixo z positivo. Cada par de eixos determina um plano chamado de **plano coordenado**. Portanto, os três planos coordenados são: xy, yz e xz.

A cada ponto P no espaço associamos um terno de números (x, y, z), chamado de **coordenadas do ponto** P como segue.

- Trace uma reta paralela ao eixo z, passando por P;
- A interseção da reta paralela ao eixo z, passando por P, com o plano xy é o ponto P'. As coordenadas de P', (x, y), no sistema de coordenadas xy são as duas primeiras coordenadas de P.
- A terceira coordenada é igual ao comprimento do segmento PP', se P estiver acima do plano xy e ao comprimento do segmento PP' com o sinal negativo, se P estiver abaixo do plano xy.

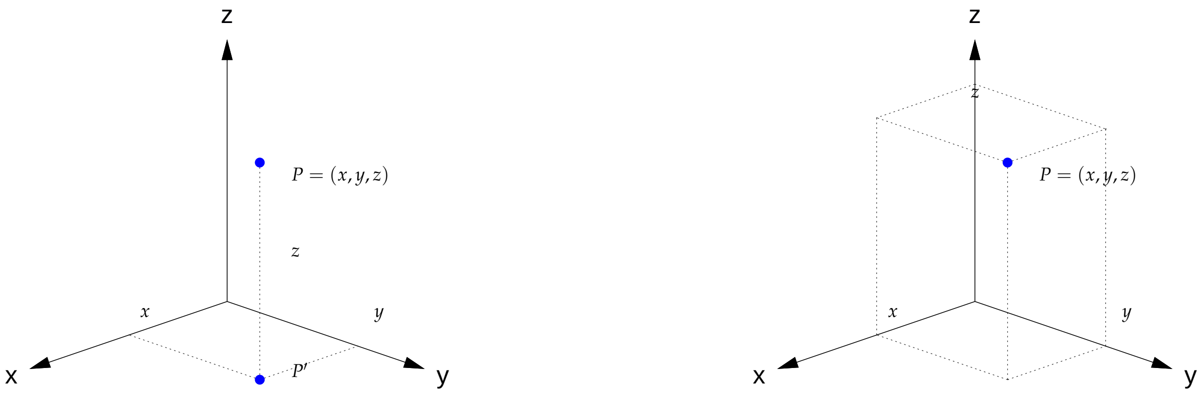


Figura 3.10 – As coordenadas de um ponto no espaço

As coordenadas de um ponto P são determinadas também da maneira dada a seguir.

- Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.
- A interseção do plano paralelo ao plano xy, passando por P, com o eixo z determina a coordenada z.
- A interseção do plano paralelo ao plano xz, passando por P, com o eixo y determina a coordenada y
- A interseção do plano paralelo ao plano yz, passando por P, com o eixo x determina a coordenada x.

Agora, estamos prontos para utilizarmos um sistema de coordenadas cartesianas também nas operações de vetores no espaço. Seja V um vetor no espaço. Como no caso de vetores do plano, definimos as **componentes de** V como sendo as coordenadas (v_1, v_2, v_3) do ponto final do representante de V que tem ponto inicial na origem. Também vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente

$$\boxed{V = (v_1, v_2, v_3).}$$

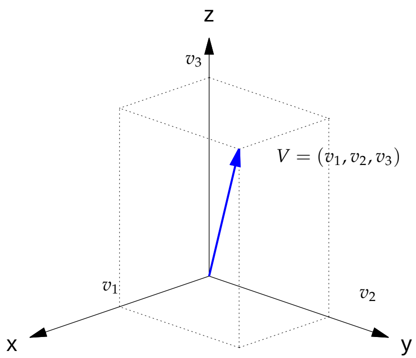


Figura 3.11 – As componentes de um vetor no espaço

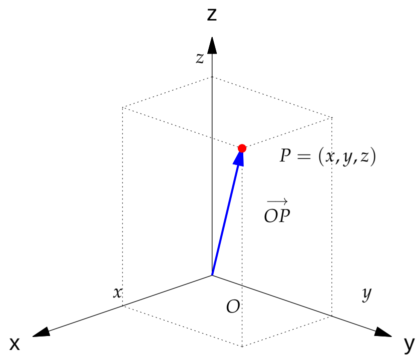


Figura 3.12 – As coordenadas de P são iguais as componentes de $\overrightarrow{OP}$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\bar{0} = (0, 0, 0)$. Assim como fizemos para vetores no plano, para vetores no espaço a soma de vetores e a multiplicação de vetor por escalar podem ser realizadas em termos das componentes.

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, então a adição de V com W é dada por

$$\boxed{V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3);}$$

- Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então a multiplicação de V por α é dada por

$$\boxed{\alpha\, V = (\alpha\, v_1, \alpha\, v_2, \alpha\, v_3).}$$

Exemplo 3.1. Se $V = (1, -2, 3)$, $W = (2, 4, -1)$, então

$$V + W = (1 + 2, -2 + 4, 3 + (-1)) = (3, 2, 2), \quad 3V = (3 \cdot 1, 3\,(-2), 3 \cdot 3) = (3, -6, 9).$$

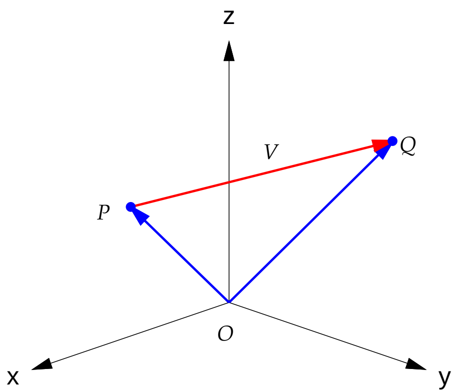


Figura 3.13 – $V = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

Quando um vetor V está representado por um segmento orientado com ponto inicial fora da origem (Figura 3.13), digamos em $P = (x_1, y_1, z_1)$, e ponto final em $Q = (x_2, y_2, z_2)$, então as componentes do vetor V são dadas por

$$\boxed{V = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).}$$

Portanto, as componentes de V são obtidas subtraindo-se as coordenadas do ponto Q (extremidade) das do ponto P (origem). O mesmo se aplica a vetores no plano.

Exemplo 3.2. As componentes do vetor V que tem um representante com ponto inicial $P = (5/2, 1, 2)$ e ponto final $Q = (0, 5/2, 5/2)$ são dadas por

$$V = \overrightarrow{PQ} = (0 - 5/2, 5/2 - 1, 5/2 - 2) = (-5/2, 3/2, 1/2).$$

Observação. O vetor é "livre", ele não tem posição fixa, ao contrário do ponto e do segmento orientado. Por exemplo, o vetor $V = (-5/2, 3/2, 1/2)$, no exemplo acima, estava representado por um segmento orientado com a origem no ponto $P = (5/2, 1, 2)$. Mas, poderia ser representado por um segmento orientado cujo ponto inicial poderia estar em qualquer outro ponto.

Um vetor no espaço $V = (v_1, v_2, v_3)$ pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha** ou como uma **matriz coluna**:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}.$$

Estas notações podem ser justificadas pelo fato de que as operações matriciais

$$V+W=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha V=\alpha\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$V+W=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1+w_1 & v_2+w_2 & v_3+w_3 \end{bmatrix},$$

$$\alpha V=\alpha\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha v_1 & \alpha v_2 & \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais

$$V+W=(v_1,v_2,v_3)+(w_1,w_2,w_3)=(v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3),$$

$$\alpha V=\alpha(v_1,v_2,v_3)=(\alpha v_1,\alpha v_2,\alpha v_3).$$

O mesmo vale, naturalmente, para vetores no plano.

No teorema seguinte enunciamos as propriedades mais importantes da soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

Teorema 3.1. *Sejam U, V e W vetores e α e β escalares. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $U+V=V+U$;

(b) $(U+V)+W=U+(V+W)$;

(c) $U+\bar{0}=U$;

(d) $U+(-U)=\bar{0}$;

(e) $\alpha(\beta U)=(\alpha\beta)U$;

(f) $\alpha(U+V)=\alpha U+\alpha V$;

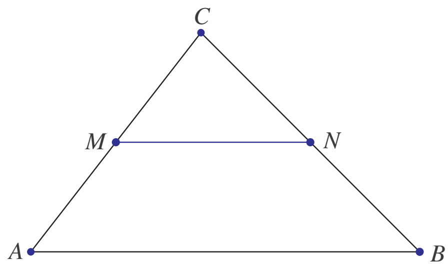
(g) $(\alpha+\beta)U=\alpha U+\beta U$;

(h) $1U=U$.

Demonstração. Segue diretamente das propriedades da álgebra matricial (Teorema 1.1 na página 8). ■

Exemplo 3.3. Seja um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Vamos provar que MN é paralelo a AB e tem comprimento igual à metade do comprimento de AB.
Devemos provar que

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$



Agora, a partir da figura acima temos que

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}\,.$$

Como M é ponto médio de AC e N é ponto médio de BC, então

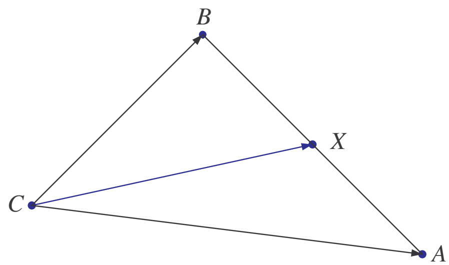
$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\,.$$

Logo,

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$

Exemplo 3.4. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX}= \lambda\ \overrightarrow{AB}$, vamos escrever $\overrightarrow{CX}$ como **combinação linear** de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, isto é, como uma soma de múltiplos escalares de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.
Como $\overrightarrow{AX}= \lambda\ \overrightarrow{AB}$, então os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos e portanto o ponto X só pode estar na reta definida por A e B. Vamos desenhá-lo entre A e B, mas isto não representará nenhuma restrição, como veremos a seguir.
O vetor que vai de C para X, pode ser escrito como uma soma de um vetor que vai de C para A com um vetor que vai de A para X,

$$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX} .$$



Agora, por hipótese $\overrightarrow{AX}= \lambda\ \overrightarrow{AB}$, o que implica que $\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA} +\lambda\ \overrightarrow{AB}$.
Mas, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, portanto $\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA} +\lambda(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$. Logo,

$$\overrightarrow{CX}= (1-\lambda)\ \overrightarrow{CA} +\lambda\ \overrightarrow{CB} .$$

Observe que:

- Se $\lambda = 0$, então $\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA}$.

- Se $\lambda = 1$, então $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB}$.
- Se $\lambda = 1/2$, então $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
- Se $\lambda = 1/3$, então $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.
- Se $0 \leq \lambda \leq 1$, então X pertence ao segmento AB, enquanto que se $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, então X pertence a um dos prolongamentos do segmento AB.

Exemplo 3.5. Vamos mostrar, usando vetores, que o ponto médio de um segmento que une os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

O ponto M é o ponto médio de AB se, e somente se, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Então, aplicando o exemplo anterior (com o ponto C sendo a origem O), $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. Como as coordenadas de um ponto são iguais as componentes do vetor que vai da origem até aquele ponto, segue-se que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2, z_2)$ e

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 548)

3.1.1. Determine o ponto C tal que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ sendo $A = (0, -2)$ e $B = (1, 0)$.

3.1.2. Uma reta no plano tem equação $y = 2x + 1$. Determine um vetor paralelo a esta reta.

3.1.3. Determine uma equação para a reta no plano que é paralela ao vetor $V = (2, 3)$ e passa pelo ponto $P_0 = (1, 2)$.

3.1.4. Determine o vetor X, tal que $3X - 2V = 15(X - U)$.

3.1.5. Determine os vetores X e Y tais que $\left\{\begin{array}{rcrcl} 6X & - & 2Y & = & U \\ 3X & + & Y & = & U + V \end{array}\right.$

3.1.6. Determine as coordenadas da extremidade do segmento orientado que representa o vetor $V = (3, 0, -3)$, sabendo-se que sua origem está no ponto $P = (2, 3, -5)$.

3.1.7. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M = (1, 2, -1)$? (Sugestão: o ponto P' é tal que o vetor $\overrightarrow{MP'} = -\overrightarrow{MP}$)

3.1.8. Verifique se os pontos dados a seguir são **colineares**, isto é, pertencem a uma mesma reta:

(a) $A = (5, 1, -3)$, $B = (0, 3, 4)$ e $C = (0, 3, -5)$;

(b) $A = (-1, 1, 3)$, $B = (4, 2, -3)$ e $C = (14, 4, -15)$;

3.1.9. Dados os pontos $A = (1, -2, -3)$, $B = (-5, 2, -1)$ e $C = (4, 0, -1)$. Determine o ponto D tal que A, B, C e D sejam vértices consecutivos de um paralelogramo.

3.1.10. Verifique se o vetor U é combinação linear (soma de múltiplos escalares) de V e W:

(a) $V = (9, -12, -6)$, $W = (-1, 7, 1)$ e $U = (-4, -6, 2)$;

(b) $V = (5, 4, -3)$, $W = (2, 1, 1)$ e $U = (-3, -4, 1)$;

3.1.11. Verifique se é um paralelogramo o quadrilátero de vértices (não necessariamente consecutivos)

(a) $A = (4, -1, 1)$, $B = (9, -4, 2)$, $C = (4, 3, 4)$ e $D = (4, -21, -14)$

(b) $A = (4, -1, 1)$, $B = (9, -4, 2)$, $C = (4, 3, 4)$ e $D = (9, 0, 5)$

3.1.12. Quais dos seguintes vetores são paralelos $U = (6, -4, -2)$, $V = (-9, 6, 3)$, $W = (15, -10, 5)$.

Exercícios usando o MATLAB®

`>> V=[v1,v2,v3]` cria um vetor `V`, usando as componentes numéricas `v1, v2, v3`. Por exemplo `>> V=[1,2,3]` cria o vetor $V = (1, 2, 3)$;

`>> V+W` é a soma de `V` e `W`; `>> V-W` é a diferença `V` menos `W`; `>> num*V` é o produto do vetor `V` pelo escalar `num`;

`>> subs(expr,x,num)` substitui `x` por `num` na expressão `expr`;

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`;

Comandos gráficos do pacote GAAL:

`>> desvet(P,V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto `P` e `>> desvet(V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto $O = (0, 0, 0)$.

`>> po([P1;P2;...;Pn])` desenha os pontos `P1, P2, ..., Pn`.
`>> lineseg(P1,P2,'cor')` desenha o segmento de reta `P1P2`. `>> tex(P,'texto')` coloca o `texto` no ponto `P`.

`>> axiss` reescala os eixos com a mesma escala. `>> eixos` desenha os eixos coordenados.

`>> box` desenha uma caixa em volta da figura. `>> rota` faz uma rotação em torno do eixo z. `>> zoom3(fator)` amplifica a região pelo `fator`.

3.1.13. Coloque em duas variáveis V e W dois vetores do plano ou do espaço a seu critério

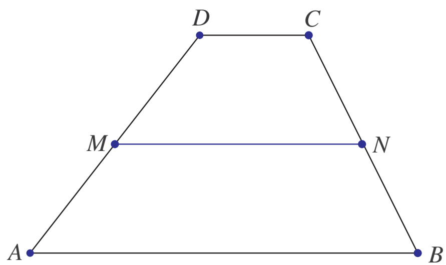
(a) Use a função `ilsvw(V,W)` para visualizar a soma dos dois vetores.

(b) Coloque em uma variável `a` um número e use a função `ilav(a,V)` para visualizar a multiplicação do vetor `V` pelo escalar `a`.

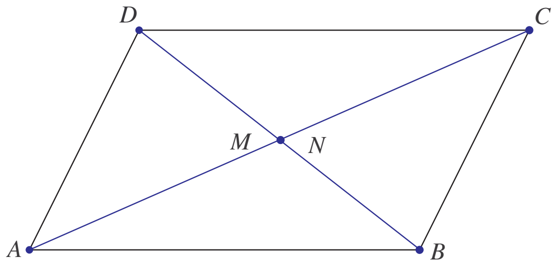
3.1.14. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos** a partir do Exercício 1.3.

Exercícios Teóricos

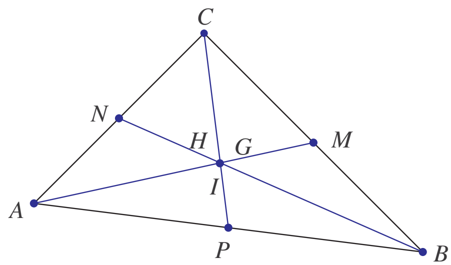
3.1.15. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das bases. (Sugestão: mostre que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ e depois conclua que $\overrightarrow{MN}$ é um múltiplo escalar de $\overrightarrow{AB}$. Revise o Exemplo 3.3 na página 152)



3.1.16. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio. (Sugestão: Sejam M e N os pontos médios das duas diagonais do paralelogramo. Mostre que o vetor $\overrightarrow{MN} = \bar{0}$, então conclua que $M = N$.)


D
C
M
N
A
B

3.1.17. Considere o triângulo ABC e sejam M o ponto médio de BC, N o ponto médio de AC e P o ponto médio de AB. Mostre que as medianas (os segmentos AM, BN e CP) se cortam num mesmo ponto que divide as medianas na proporção $2/3$ e $1/3$. (Sugestão: Sejam G, H e I os pontos definidos por $\overrightarrow{AG}= \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BH}= \frac{2}{3}\ \overrightarrow{BN}$ e $\overrightarrow{CI}= \frac{2}{3}\ \overrightarrow{CP}$. Mostre que $\overrightarrow{GH}= \bar{0}$, $\overrightarrow{GI}= \bar{0}$, conclua que $G = H = I$.)



3.1.18. Sejam A, B e C pontos quaisquer com $A \neq B$. Prove que:

(a) Um ponto X pertence a reta determinada por A e B ($\overrightarrow{AX}= \lambda\ \overrightarrow{AB}$) se, e somente se,

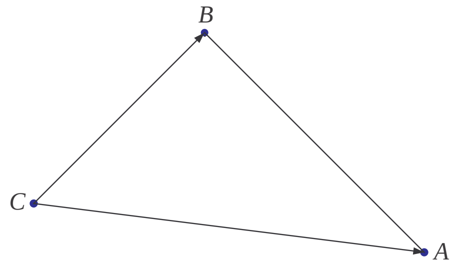
$$\overrightarrow{CX}= \alpha\ \overrightarrow{CA} + \beta\ \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha + \beta = 1.$$

(b) Um ponto X pertence ao interior do segmento AB ($\overrightarrow{AX}= \lambda\ \overrightarrow{AB}$, com $0 < \lambda < 1$) se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX}= \alpha\ \overrightarrow{CA} + \beta\ \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha > 0,\ \beta > 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta = 1.$$

(c) Um ponto X é um ponto interior ao triângulo ABC ($\overrightarrow{A'X}= \lambda\ \overrightarrow{A'B'}$, com $0 < \lambda < 1$, em que A' é um ponto interior ao segmento AC e B' é interior ao segmento CB) se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX}= \alpha\ \overrightarrow{CA} + \beta\ \overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \alpha > 0,\ \beta > 0 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta < 1.$$



3.1.19. Mostre que se $\alpha V = \bar{0}$, então $\alpha = 0$ ou $V = \bar{0}$.

3.1.20. Se $\alpha U = \alpha V$, então $U = V$? E se $\alpha \neq 0$?

3.1.21. Se $\alpha V = \beta V$, então $\alpha = \beta$? E se $V \neq \bar{0}$?

3.2 Produtos de Vetores

3.2.1 Norma e Produto Escalar

Já vimos que o **comprimento** de um vetor V é definido como sendo o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam. O comprimento do vetor V também é chamado de **norma de** V e é denotado(a) por $||V||$. Segue do Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor pode ser calculada usando as suas componentes, por

$$\boxed{||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},}$$

no caso em que $V = (v_1, v_2)$ é um vetor no plano, e por

$$\boxed{||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},}$$

no caso em que $V = (v_1, v_2, v_3)$ é um vetor no espaço (verifique usando as Figuras 3.14 e 3.15).

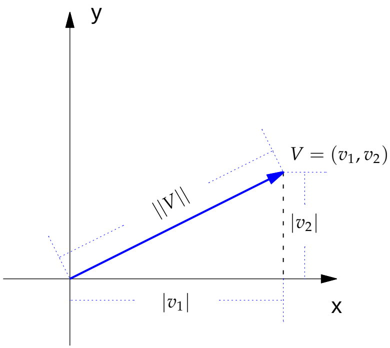


Figura 3.14 – A norma de um vetor V no plano

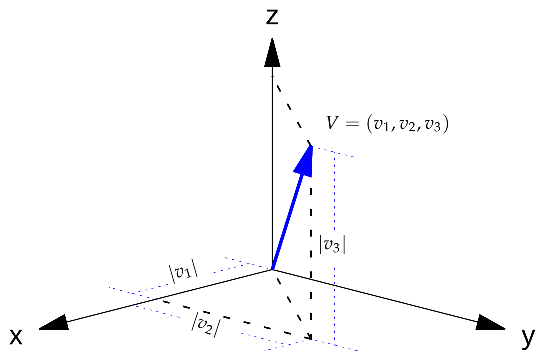


Figura 3.15 – A norma de um vetor V no espaço

Um vetor de norma igual à 1 é chamado **vetor unitário**.

A **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1, z_1)$ **e** $Q = (x_2, y_2, z_2)$ é igual à norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$ (Figura 3.13 na página 149). Como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, então a distância de P a Q é dada por

$$\boxed{\text{dist}(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.}$$

Analogamente, a **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1)$ **e** $Q = (x_2, y_2)$ no plano é igual à norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$, que é dada por

$$\boxed{\text{dist}(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}.}$$

Exemplo 3.6. A norma do vetor $V = (1, -2, 3)$ é

$$||V|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

A distância entre os pontos $P = (2, -3, 1)$ e $Q = (-1, 4, 5)$ é

$$\text{dist}(P,Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = ||(-1-2, 4-(-3), 5-1)|| = ||(-3, 7, 4)|| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{74}.$$

Se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e α é um escalar, então da definição da multiplicação de vetor por escalar e da norma de um vetor segue-se que

$$||\alpha V|| = ||(\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)|| = \sqrt{(\alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 + (\alpha v_3)^2} = \sqrt{\alpha^2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)},$$

ou seja,

$$\boxed{||\alpha V|| = |\alpha|\, ||V||.} \tag{3.5}$$

Dado um vetor V **não nulo**, o vetor

$$\boxed{U = \left(\frac{1}{||V||}\right) V.}$$

é um **vetor unitário na direção de** V, pois por (3.5), temos que

$$||U|| = \left|\frac{1}{||V||}\right| ||V|| = 1.$$

Exemplo 3.7. Um vetor unitário na direção do vetor $V = (1, -2, 3)$ é o vetor

$$U = \left(\frac{1}{||V||}\right) V = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)(1, -2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

O ângulo entre dois vetores não nulos, V e W, é definido pelo ângulo θ determinado por V e W que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando eles estão representados com a mesma origem (Figura 3.16).
Quando o ângulo θ entre dois vetores V e W é reto ($\theta = 90^{\mathrm{o}}$), ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores V e W são **ortogonais** ou **perpendiculares entre si**.

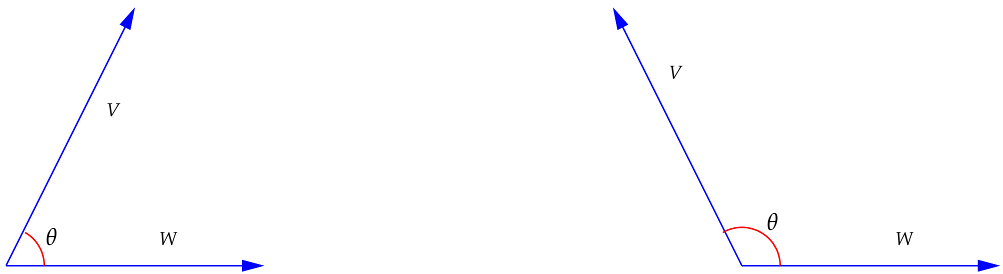


Figura 3.16 – Ângulo entre dois vetores, agudo (à esquerda) e obtuso (à direita)

Vamos definir, agora, um produto entre dois vetores, cujo resultado é um escalar. Por isso ele é chamado **produto escalar**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: o trabalho realizado por uma força é o produto escalar do vetor força pelo vetor deslocamento, quando a força aplicada é constante.

Definição 3.1. O **produto escalar** ou **interno** de dois vetores V e W é definido por

$$V \cdot W = \begin{cases} 0, & \text{se } V \text{ ou } W \text{ é o vetor nulo,} \\ ||V||\,||W|| \cos\theta, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que θ é o ângulo entre eles.

Quando os vetores são dados em termos das suas componentes não sabemos diretamente o ângulo entre eles. Por isso, precisamos de uma forma de calcular o produto escalar que não necessite do ângulo entre os vetores.

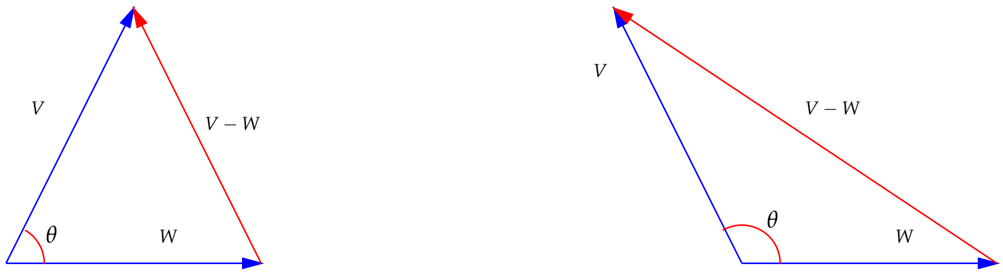


Figura 3.17 – Triângulo formado por representantes de V, W e $V - W$. À esquerda o ângulo entre V e W é agudo e à direita é obtuso.

Se V e W são dois vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então pela lei dos cossenos,

$$||V - W||^2 = ||V||^2 + ||W||^2 - 2||V||\,||W|| \cos\theta.$$

Assim,

$$V \cdot W = ||V||\,||W|| \cos\theta = \frac{1}{2}\left(||V||^2 + ||W||^2 - ||V - W||^2\right). \tag{3.6}$$

Já temos então uma fórmula para calcular o produto escalar que não depende diretamente do ângulo entre eles. Substituindo-se as coordenadas dos vetores em (3.6) obtemos uma expressão mais simples para o cálculo do produto interno.

Por exemplo, se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores no espaço, então substituindo-se $||V||^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, $||W||^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$ e $||V - W||^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2$ em (3.6) os termos v_i^2 e w_i^2 são cancelados e obtemos

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Teorema 3.2. *O produto escalar ou interno, $V \cdot W$, entre dois vetores é dado por*

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

se $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ são vetores no plano e por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3,$$

se $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores no espaço.

Exemplo 3.8. Sejam $V = (0, 1, 0)$ e $W = (2, 2, 3)$. O produto escalar de V por W é dado por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2\,.$$

Podemos usar o Teorema 3.2 para determinar o ângulo entre dois vetores não nulos, V e W. O cosseno do ângulo entre V e W é, então, dado por

$$\boxed{\cos\theta = \frac{V \cdot W}{||V||\,||W||}\,.}$$

Se V e W são vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então

(a) θ é agudo ($0 \leq \theta < 90^o$) se, e somente se, $V \cdot W > 0$,

(b) θ é reto ($\theta = 90^o$) se, e somente se, $V \cdot W = 0$ e

(c) θ é obtuso ($90^o < \theta \leq 180^o$) se, e somente se, $V \cdot W < 0$.

Exemplo 3.9. Vamos determinar o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas. Sejam $V_1 = (1, 0, 0), V_2 = (0, 1, 0)$ e $V_3 = (0, 0, 1)$ (Figura 3.18). Uma diagonal do cubo é representada pelo vetor D dado por

$$D = V_1 + V_2 + V_3 = (1, 1, 1)\,.$$

Então o ângulo entre D e V_1 satisfaz

$$\cos\theta = \frac{D \cdot V_1}{||D||||V_1||} = \frac{1.1 + 0.1 + 0.1}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2})(\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou seja,

$$\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54^o\,.$$

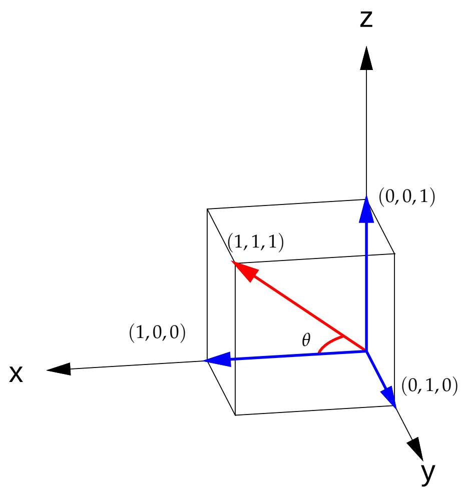


Figura 3.18 – Ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas

Teorema 3.3. *Sejam U, V e W vetores e α um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) *(comutatividade)* $U \cdot V = V \cdot U$;

(b) *(distributividade)* $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$;

(c) *(associatividade)* $\alpha(U \cdot V) = (\alpha U) \cdot V = U \cdot (\alpha V)$;

(d) $V \cdot V = ||V||^2 \geq 0$, *para todo V e $V \cdot V = 0$ se, e somente se,* $V = \bar{0}$.

Demonstração. Sejam $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$.

(a) $U \cdot V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = V \cdot U$;

(b) $U \cdot (V + W) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) = (u_1v_1 + u_1w_1) + (u_2v_2 + u_2w_2) + (u_3v_3 + u_3w_3) = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) + (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) = U \cdot V + U \cdot W$;

(c) $\alpha(U \cdot V) = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 = (\alpha U) \cdot V$;

(d) $V \cdot V = ||V||^2$ é uma soma de quadrados, por isso é sempre maior ou igual à zero e é zero se, e somente se, todas as parcelas são iguais a zero. ■

3.2.2 Projeção Ortogonal

Dados dois vetores V e W a **projeção ortogonal de V sobre W** denotada por

$$\mathrm{proj}_W V$$

é o vetor que é paralelo a W tal que $V - \mathrm{proj}_W V$ seja ortogonal a W (Figura 3.19).

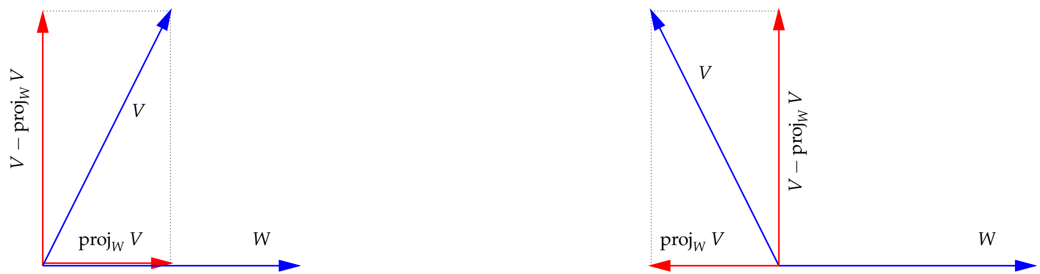


Figura 3.19 – Projeção ortogonal do vetor V sobre o vetor W

Proposição 3.4. *Seja W um vetor não nulo. Então, a projeção ortogonal de um vetor V em W é dada por*

$$\operatorname{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2}\right) W\,.$$

Demonstração. Sejam $V_1 = \operatorname{proj}_W V$ e $V_2 = V - \operatorname{proj}_W V$. Como V_1 é paralelo a W, então

$$V_1 = \alpha W. \tag{3.7}$$

Assim,

$$V_2 = V - \alpha W\,.$$

Multiplicando-se escalarmente V_2 por W e usando o Teorema 3.3 (d) obtemos

$$V_2 \cdot W = (V - \alpha W) \cdot W = V \cdot W - \alpha ||W||^2. \tag{3.8}$$

Mas, V_2 é ortogonal a W, então $V_2 \cdot W = 0$. Portanto, de (3.8) obtemos

$$\alpha = \frac{V \cdot W}{||W||^2}\,.$$

Substituindo este valor de α na equação (3.7) segue-se o resultado. ■

Exemplo 3.10. Sejam $V = (2, -1, 3)$ e $W = (4, -1, 2)$. Vamos encontrar dois vetores V_1 e V_2 tais que $V = V_1 + V_2$, V_1 é paralelo a W e V_2 é perpendicular a W (Figura 3.19). Temos que

$$V \cdot W = 2 \cdot 4 + (-1)(-1) + 3 \cdot 2 = 15$$
$$||W||^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21\,.$$

$$V_1 = \text{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W)}{||W||^2}\right) W = \left(\frac{15}{21}\right)(4,-1,2) = (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7})$$

$$V_2 = V - V_1 = (2,-1,3) - (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}) = (-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}).$$

3.2.3 Produto Vetorial

Vamos, agora, definir um produto entre dois vetores, cujo resultado é um vetor. Por isso, ele é chamado **produto vetorial**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: a força exercida sobre uma partícula com carga unitária mergulhada num campo magnético uniforme é o produto vetorial do vetor velocidade da partícula pelo vetor campo magnético.

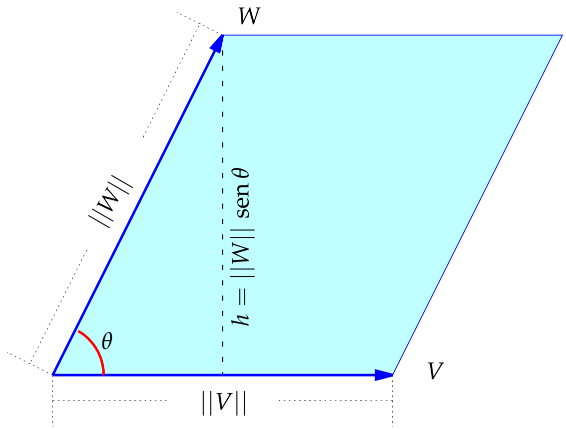


Figura 3.20 – Área de um paralelogramo determinado por dois vetores

Definição 3.2. Sejam V e W dois vetores no espaço. Definimos o **produto vetorial**, $V \times W$, como sendo o vetor com as seguintes características:

(a) Tem comprimento dado numericamente por

$$||V \times W|| = ||V||\,||W|| \operatorname{sen}\theta,$$

ou seja, a *norma* de $V \times W$ é numericamente igual à área do paralelogramo determinado por V e W.

(b) Tem direção perpendicular a V e a W.

(c) Tem o sentido dado pela regra da mão direita (Figura 3.21): Se o ângulo entre V e W é θ, giramos o vetor V de um ângulo θ até que coincida com W e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de $V \times W$.

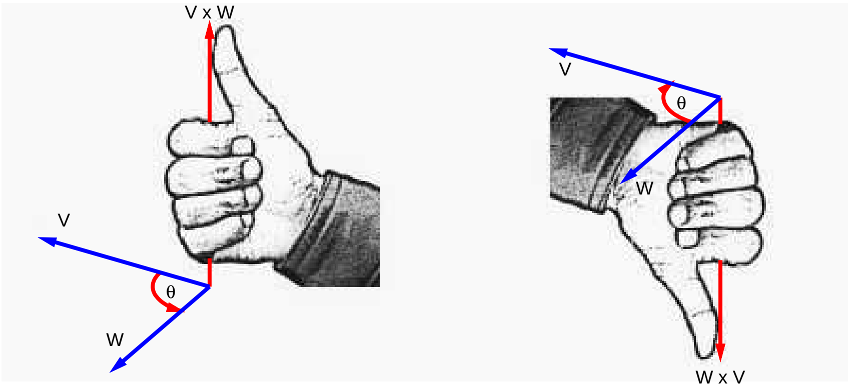


Figura 3.21 – Regra da mão direita

Da forma como definimos o produto vetorial é difícil o seu cálculo, mas as propriedades que apresentaremos a seguir possibilitarão obter uma fórmula para o produto vetorial em termos das componentes dos vetores.

Teorema 3.5. *Sejam U, V e W vetores no espaço e α um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $V \times W = -(W \times V)$ *(anti-comutatividade).*

(b) $V \times W = \bar{0}$ *se, e somente se,* $V = \alpha W$ *ou* $W = \alpha V$*.*

(c) $(V \times W) \cdot V = (V \times W) \cdot W = 0.$

(d) $\alpha(V \times W) = (\alpha V) \times W = V \times (\alpha W).$

(e) $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$ *e* $(V + W) \times U = V \times U + W \times U$ *(Distributividade em relação a soma de vetores).*

Demonstração. (a) Pela definição do produto vetorial $V \times W$ e $W \times V$ têm o mesmo comprimento e a mesma direção. Além disso trocando-se V por W troca-se o sentido de $V \times W$ (Figura 3.21).

(b) $||V \times W|| = 0$ se, e somente se, um deles é o vetor nulo ou $\operatorname{sen}\theta = 0$, em que θ é o ângulo entre V e W, ou seja, V e W são paralelos. Assim, $V \times W = \bar{0}$ se, e somente se, $V = \alpha W$ ou $W = \alpha V$.

(c) Segue-se imediatamente da definição do produto vetorial.

(d) Segue-se facilmente da definição do produto vetorial, por isso deixamos como exercício para o leitor.

(e) Este item será demonstrado no Apêndice IV na página 201.

■

Os **vetores canônicos**

$$\boxed{\vec{i} = (1,0,0), \qquad \vec{j} = (0,1,0) \quad \text{e} \quad \vec{k} = (0,0,1)}$$

são vetores unitários (de norma igual à um) paralelos aos eixos coordenados. Todo vetor

$$V = (v_1, v_2, v_3)$$

pode ser escrito como uma soma de múltiplos escalares de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ (combinação linear), pois

$$\begin{aligned} V = (v_1, v_2, v_3) &= (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = \\ &= v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = \\ &= v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

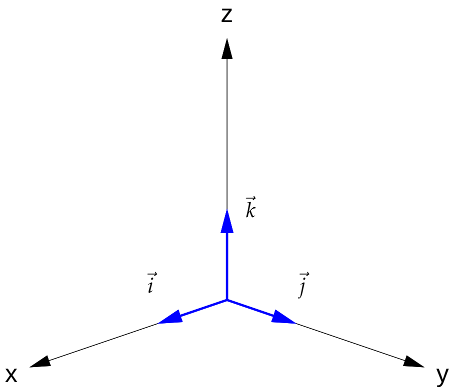


Figura 3.22 – Vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

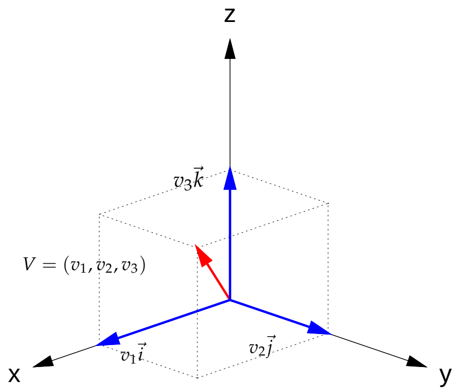


Figura 3.23 – $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

Da definição de produto vetorial podemos obter facilmente as seguintes relações:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{i}=\bar{0}, & \vec{j}\times\vec{j}=\bar{0}, & \vec{k}\times\vec{k}=\bar{0}, \\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, & \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, \\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}. \end{array}$$

Agora, estamos prontos para obter uma fórmula que dê o produto vetorial de dois vetores em termos das suas componentes.

Teorema 3.6. *Sejam $V=(v_1,v_2,v_3)$ e $W=(w_1,w_2,w_3)$ vetores no espaço. Então o produto vetorial $V\times W$ é dado por*

$$V\times W=\left(\det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3\end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3\end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2\end{bmatrix}\right). \tag{3.10}$$

Demonstração. De (3.9) segue-se que podemos escrever

$$V=v_1\,\vec{i}+v_2\,\vec{j}+v_3\,\vec{k} \quad \text{e} \quad W=w_1\,\vec{i}+w_2\,\vec{j}+w_3\,\vec{k}.$$

Assim, pela distributividade do produto vetorial em relação a soma, temos que

$$\begin{aligned} V\times W &= (v_1\,\vec{i}+v_2\,\vec{j}+v_3\,\vec{k})\times(w_1\,\vec{i}+w_2\,\vec{j}+w_3\,\vec{k}) \\ &= v_1w_1(\vec{i}\times\vec{i})+v_1w_2(\vec{i}\times\vec{j})+v_1w_3(\vec{i}\times\vec{k})+ \\ &\quad +v_2w_1(\vec{j}\times\vec{i})+v_2w_2(\vec{j}\times\vec{j})+v_2w_3(\vec{j}\times\vec{k})+ \\ &\quad +v_3w_1(\vec{k}\times\vec{i})+v_3w_2(\vec{k}\times\vec{j})+v_3w_3(\vec{k}\times\vec{k}) \\ &= (v_2w_3-v_3w_2)\vec{i}+(v_3w_1-v_1w_3)\vec{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\vec{k} \\ &= \det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3\end{bmatrix}\vec{i}-\det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3\end{bmatrix}\vec{j}+\det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2\end{bmatrix}\vec{k} \\ &= \left(\det\begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3\end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3\end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2\end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

■

Para obter as componentes do produto vetorial $V \times W$ procedemos como segue:

- Escreva a matriz:
$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix};$$

- Para calcular a primeira componente de $V \times W$, elimine a primeira coluna da matriz acima e calcule o determinante da sub-matriz resultante. A segunda componente é obtida, eliminando-se a segunda coluna e calculando-se o determinante da sub-matriz resultante com o *sinal trocado*. A terceira é obtida como a primeira, mas eliminando-se a terceira coluna.

Exemplo 3.11. Sejam $V = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e $W = 3\vec{i} + \vec{k}$. Vamos determinar o produto vetorial $V \times W$. Como
$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
então
$$V \times W = \left(\det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = (2, -7, -6)\,.$$

Usando os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ o produto vetorial $V \times W$, pode ser escrito em termos do "determinante"

$$V \times W = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} \vec{i} - \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} \vec{j} + \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \vec{k}\,.$$

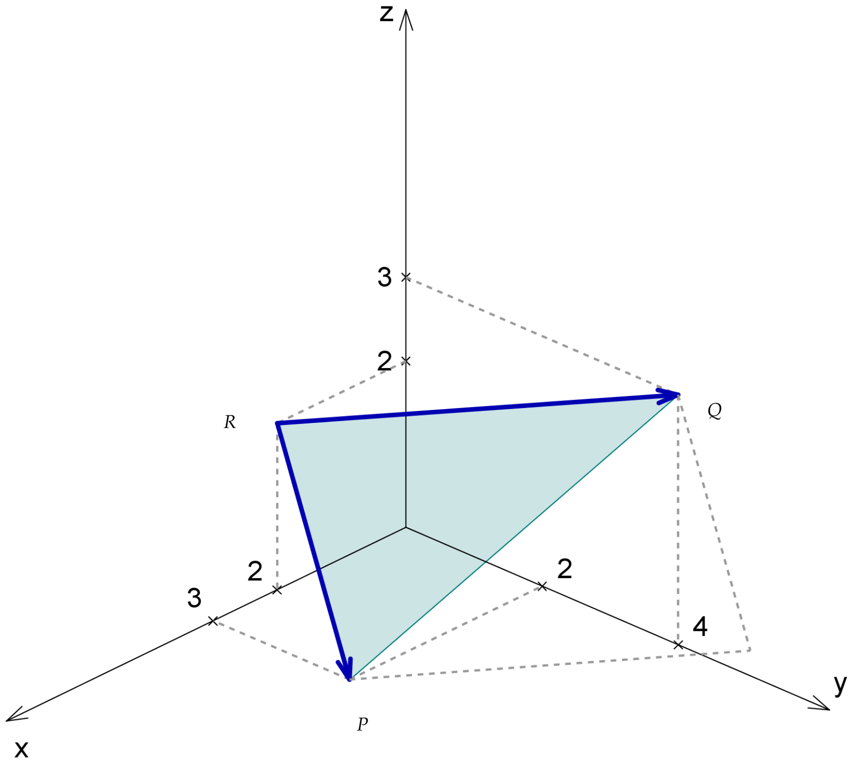


Figura 3.24 – Área do triângulo PQR

Exemplo 3.12. Vamos calcular a área do triângulo PQR em que (Figura 3.24)

$$P = (3, 2, 0), \quad Q = (0, 4, 3) \quad \text{e} \quad R = (1, 0, 2).$$

Sejam

$$V = \overrightarrow{RP} = (3 - 1, 2 - 0, 0 - 2) = (2, 2, -2)$$
$$W = \overrightarrow{RQ} = (0 - 1, 4 - 0, 3 - 2) = (-1, 4, 1)\,.$$

Então,

$$V \times W = (10, 0, 10) = 10(1, 0, 1).$$

A área do triângulo PQR é a metade da área do paralelogramo com lados determinados por V e W. Assim,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}||V \times W|| = 5\sqrt{2}.$$

3.2.4 Produto Misto

O produto $(V \times W) \cdot U$ é chamado **produto misto** de U, V e W. O resultado abaixo mostra como calcular o produto misto usando as componentes dos vetores.

Teorema 3.7. *Sejam $U = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e $W = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. Então,*

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Segue do Teorema 3.2 na página 169, do Teorema 3.6 na página 182 e da definição de determinante de uma matriz que

$$\begin{aligned}
(V \times W) \cdot U &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= u_1 \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} - u_2 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} + u_3 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.13. O produto misto dos vetores $U = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $V = -\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ e $W = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ é

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = -84.$$

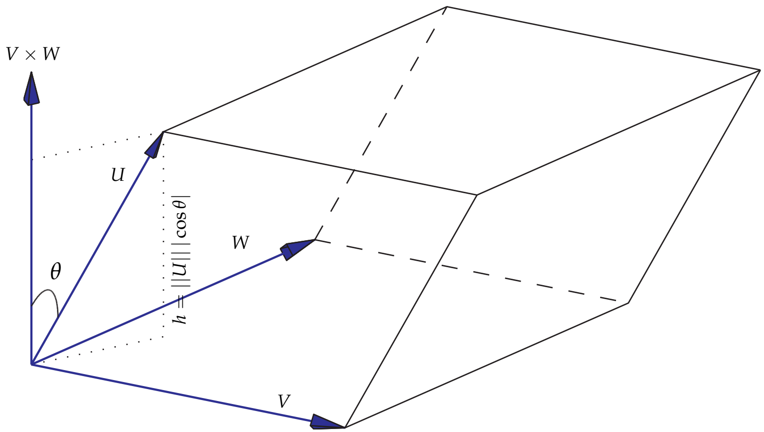


Figura 3.25 – Volume do paralelepípedo determinado por V, W e U

Teorema 3.8. *Dados três vetores no espaço, U, V e W,*

$$|(V \times W) \cdot U|$$

é numericamente igual ao volume do paralelepípedo determinado por U, V e W.

Demonstração. O volume do paralelepípedo determinado por U, V e W é igual ao produto da área da base pela altura, ou seja, pela definição do produto vetorial, o volume é dado por

$$\text{Volume} = ||V \times W||\, h\,.$$

Mas, como vemos na Figura 3.25 a altura é $h = ||U|||\cos\theta|$, o que implica que

$$\text{Volume} = ||V \times W||\, ||U|||\cos\theta| = |(V \times W) \cdot U|\,.$$

■

Exemplo 3.14. Sejam $V = 4\vec{i}$, $W = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ e $U = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. O volume do paralelepípedo com um vértice na origem e arestas determinadas por U, V e W é dado por

$$\text{volume} = |(V \times W) \cdot U| = |\det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}| = |80| = 80\,.$$

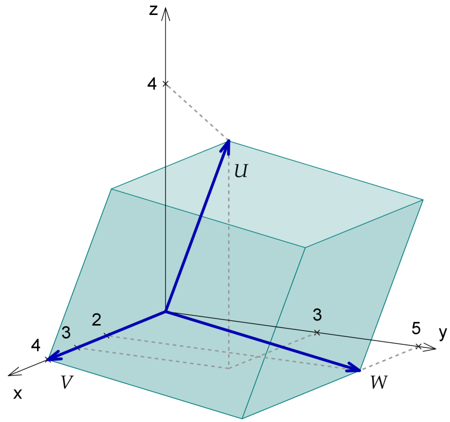


Figura 3.26 – Paralelepípedo determinado por U, V e W do Exemplo 3.14

Segue imediatamente do Teorema 3.7 e do Teorema 3.8 um critério para saber se três vetores são paralelos a um mesmo plano.

Corolário 3.9. *Sejam $U = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e $W = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. Estes vetores são **coplanares** (isto é, são paralelos a um mesmo plano) se, e somente se,*

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Exemplo 3.15. Vamos verificar que os pontos $P = (0, 1, 1)$, $Q = (1, 0, 2)$, $R = (1, -2, 0)$ e $S = (-2, 2, -2)$ são **coplanares**, isto é, pertencem a um mesmo plano. Com estes pontos podemos construir os vetores

$$\overrightarrow{PQ} = (1-0, 0-1, 2-1) = (1, -1, 1),$$

$$\overrightarrow{PR} = (1-0, -2-1, 0-1) = (1, -3, -1) \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{PS} = (-2-0, 2-1, -2-1) = (-2, 1, -3)$$

Os pontos P, Q, R e S pertencem a um mesmo plano se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$ são coplanares. E isto acontece se, e somente se, o produto misto deles é igual zero.

$$(\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}) \cdot \overrightarrow{PQ} = \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Assim, P, Q, R e S são coplanares.

O resultado a seguir será usado no próximo capítulo para deduzir as equações paramétricas do plano.

Corolário 3.10. *Sejam U, V e W vetores coplanares não nulos no espaço.*

(a) *Então a equação vetorial*

$$xU + yV + zW = \bar{0}$$

tem solução não trivial, em que x, y e z são escalares.

(b) *Então um dos vetores U, V ou W é combinação linear (soma de múltiplos escalares) dos outros dois.*

(c) *Se V e W são não paralelos, então U é combinação linear de V e W.*

Demonstração. (a) Seja A a matriz cujas colunas são U, V e W escritos como vetores colunas. A equação $xU + yV + zW = \bar{0}$ é equivalente ao sistema $AX = \bar{0}$. Se U, V e W são coplanares, então

$$\det(A) = \det(A^t) = (U \times V) \cdot W = 0.$$

Logo a equação $xU + yV + zW = \bar{0}$ tem solução não trivial.

(b) Pelo item anterior a equação $xU + yV + zW = \bar{0}$ possui solução não trivial. Mas, se isto acontece, então um dos escalares x ou y ou z pode ser diferente de zero. Se $x \neq 0$, então $U = (-y/x)V + (-z/x)W$, ou seja, o vetor U é combinação linear de V e W. De forma semelhante, se $y \neq 0$, então V é combinação linear de U e W e se $z \neq 0$, então W é combinação linear de U e V.

(c) Como U, V e W são coplanares, então a equação $xU + yV + zW = \bar{0}$ possui solução não trivial com $x \neq 0$. Pois, caso contrário $yV + zW = \bar{0}$ com y ou z não simultaneamente nulos o que implicaria que V e W seriam paralelos (por que?). Logo $U = (-y/x)V + (-z/x)W$.

■

Exemplo 3.16. Considere os vetores

$$U = \overrightarrow{PQ} = (1, -1, 1),$$

$$V = \overrightarrow{PR} = (1, -3, -1) \quad \text{e}$$

$$W = \overrightarrow{PS} = (-2, 1, -3)$$

do Exemplo 3.15 na página 191. A equação

$$xU + yV + zW = \bar{0}$$

é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Escalonando a matriz do sistema obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A última matriz corresponde ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Assim,

$$\frac{5\alpha}{2} U - \frac{\alpha}{2} V + \alpha W = \bar{0}.$$

Logo

$$W = -\frac{5}{2} U + \frac{1}{2} V.$$

Verifique que realmente vale esta relação entre os vetores U, V e W.

Exercícios Numéricos (respostas na página 550)

3.2.1. Determine a equação da reta no plano que é perpendicular ao vetor $N = (2,3)$ e passa pelo ponto $P_0 = (-1,1)$.

3.2.2. Seja $O = (0,0,0)$. Qual o lugar geométrico dos pontos $P = (x,y,z)$ tais que $||\overrightarrow{OP}||^2 = 4$? Qual figura é representada pela equação $x^2 + y^2 = 4$?

3.2.3. Sejam $V = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ e $W = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Determine vetores unitários paralelos aos vetores (a) $V + W$; (b) $V - W$; (c) $2V - 3W$.

3.2.4. Determine o valor de x para o qual os vetores $V = x\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ e $W = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ são perpendiculares.

3.2.5. Demonstre que não existe x tal que os vetores $V = x\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $W = x\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ são perpendiculares.

3.2.6. Ache o ângulo entre os seguintes pares de vetores:

(a) $2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{j} - \vec{k}$; (b) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $-2\vec{j} - 2\vec{k}$; (c) $3\vec{i} + 3\vec{j}$ e $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

3.2.7. Decomponha $W = -\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ como a soma de dois vetores W_1 e W_2, com W_1 paralelo ao vetor $\vec{j} + 3\vec{k}$ e W_2 ortogonal a este último. (Sugestão: revise o Exemplo 3.10 na página 174)

3.2.8. Ache o vetor unitário da bissetriz do ângulo entre os vetores $V = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $W = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. (Sugestão: observe que a soma de dois vetores está na direção da bissetriz se, e somente se, os dois tiverem o mesmo comprimento. Portanto, tome múltiplos escalares de V e W de forma que eles tenham o mesmo comprimento e tome o vetor unitário na direção da soma deles.)

3.2.9. Verifique se os seguintes pontos pertencem a um mesmo plano:

(a) $A = (2,2,1), B = (3,1,2), C = (2,3,0)$ e $D = (2,3,2)$;

(b) $A = (2,0,2), B = (3,2,0), C = (0,2,1)$ e $D = (10,-2,1)$;

3.2.10. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2,1,6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4,1,3), C = (1,3,2)$ e $D = (1,2,1)$.

3.2.11. Calcule a área do paralelogramo em que três vértices consecutivos são $A = (1,0,1), B = (2,1,3)$ e $C = (3,2,4)$.

3.2.12. Calcule a área do triângulo com vértices $A = (1,2,1), B = (3,0,4)$ e $C = (5,1,3)$.

3.2.13. Ache X tal que $X \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ e $||X|| = \sqrt{6}$.

3.2.14. Sabe-se que o vetor X é ortogonal a $\vec{i} + \vec{j}$ e a $-\vec{i} + \vec{k}$, tem norma $\sqrt{3}$ e sendo θ o ângulo entre X e $\vec{j}$, tem-se $\cos\theta > 0$. Ache X.

3.2.15. Mostre que $A = (3,0,2)$, $B = (4,3,0)$ e $C = (8,1,-1)$ são vértices de um triângulo retângulo. Em qual dos vértices está o ângulo reto?

3.2.16. Considere dois vetores V e W tais que $||V|| = 5$, $||W|| = 2$ e o ângulo entre V e W é $60°$. Determine, como combinação linear de V e W ($xV + yW$):

(a) Um vetor X tal que $X \cdot V = 20$ e $X \cdot W = 5$

(b) Um vetor X tal que $X \times V = \bar{0}$ e $X \cdot W = 12$.

Exercícios usando o MATLAB®

`>> V=[v1,v2,v3]` cria um vetor `V`, usando as componentes numéricas `v1, v2, v3`. Por exemplo `>> V=[1,2,3]` cria o vetor $V = (1,2,3)$;

`>> subs(expr,x,num)` substitui `x` por `num` na expressão `expr`;

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`;

Comandos numéricos do pacote GAAL:

`>> V=randi(1,3)` cria um vetor aleatório com componentes inteiras;

`>> no(V)` calcula a norma do vetor `V`.

`>> pe(V,W)` calcula o produto escalar do vetor `V` pelo vetor `W`.

`>> pv(V,W)` calcula o produto vetorial do vetor `V` pelo vetor `W`.

Comandos gráficos do pacote GAAL:

`>> desvet(P,V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto `P` e `>> desvet(V)` desenha o vetor `V` com origem no ponto $O = (0, 0, 0)$.

`>> po([P1;P2;...;Pn])` desenha os pontos `P1, P2, ..., Pn`.

`>> lineseg(P1,P2,'cor')` desenha o segmento de reta `P1P2`.

`>> eixos` desenha os eixos coordenados.

`>> box` desenha uma caixa em volta da figura.

`>> axiss` reescala os eixos com a mesma escala.

`>> rota` faz uma rotação em torno do eixo z.

`>> zoom3(fator)` amplifica a região pelo `fator`.

`>> tex(P,'texto')` coloca o `texto` no ponto `P`.

3.2.17. Digite no prompt

`demog21,`

(sem a vírgula!). Esta função demonstra as funções gráficas para vetores.

3.2.18. Coloque em duas variáveis V e W dois vetores bi-dimensionais ou tri-dimensionais a seu critério.

(a) Use a função `ilvijk(V)` para visualizar o vetor `V` como uma soma de múltiplos escalares (combinação linear) dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

(b) Use a função `ilpv(V,W)` para visualizar o produto vetorial $V \times W$.

(c) Use a função `ilproj(W,V)` para visualizar a projeção de V em W.

3.2.19. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

3.2.20. Mostre que em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é perpendicular à base.

3.2.21. Mostre que o ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

Sugestão para os próximos 2 exercícios: Considere o paralelogramo $ABCD$. Seja $U = \overrightarrow{AB}$ e $V = \overrightarrow{AD}$. Observe que as diagonais do paralelogramo são $U + V$ e $U - V$.

3.2.22. Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares então ele é um losango.

3.2.23. Mostre que se as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo comprimento então ele é um retângulo.

3.2.24. Se $V \cdot W = V \cdot U$ e $V \neq \bar{0}$, então $W = U$?

3.2.25. Mostre que se V é ortogonal a W_1 e W_2, então V é ortogonal a $\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2$.

3.2.26. Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares. (Sugestão: mostre que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, usando o fato de que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $|| \overrightarrow{AB} || = || \overrightarrow{BC} ||$.)

3.2.27. Sejam V um vetor não nulo no espaço e α, β e γ os ângulos que V forma com os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Demonstre que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \,.$$

(Sugestão: $\cos \alpha = \frac{V \cdot \vec{i}}{||V|| ||\vec{i}||}$, $\cos \beta = \frac{V \cdot \vec{j}}{||V|| ||\vec{j}||}$ e $\cos \gamma = \frac{V \cdot \vec{k}}{||V|| ||\vec{k}||}$)

3.2.28. Demonstre que, se V e W são vetores quaisquer, então:

(a) $V \cdot W = \dfrac{1}{4}\left(||V + W||^2 - ||V - W||^2\right)$;

(b) $||V||^2 + ||W||^2 = \frac{1}{2}\left(||V+W||^2 + ||V-W||^2\right)$.

(Sugestão: desenvolva os segundos membros das igualdades acima observando que $||V+W||^2 = (V+W)\cdot(V+W)$ e $||V-W||^2 = (V-W)\cdot(V-W)$)

3.2.29. Demonstre que se V e W são vetores quaisquer, então:

(a) $|V \cdot W| \leq ||V||\,||W||$;

(b) $||V+W|| \leq ||V|| + ||W||$;
(Sugestão: mostre que $||V+W||^2 = (V+W)\cdot(V+W) \leq (||V|| + ||W||)^2$, usando o item anterior)

(c) $\Big|\, ||V|| - ||W|| \,\Big| \leq ||V-W||$.
(Sugestão: defina $U = V - W$ e aplique o item anterior a U e W)

3.2.30. O produto vetorial é associativo? Justifique a sua resposta. (Sugestão: experimente com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

3.2.31. Se $V \times W = V \times U$ e $V \neq \bar{0}$, então $W = U$?

3.2.32. Demonstre que se V e W são vetores quaisquer no espaço, então

$$||V \times W|| \leq ||V||\,||W||.$$

3.2.33. Se U, V e W são vetores no espaço, prove que $|U \cdot (V \times W)| \leq ||U||\,||V||\,||W||$. (Sugestão: use o Teorema 3.2 na página 169 e o exercício anterior)

3.2.34. Mostre que $U \cdot (V \times W) = V \cdot (W \times U) = W \cdot (U \times V)$. (Sugestão: use as propriedades do determinante)

3.2.35. Mostre que

(a) $(\alpha U_1 + \beta U_2) \cdot (V \times W) = \alpha U_1 \cdot (V \times W) + \beta U_2 \cdot (V \times W)$;

(b) $U \cdot [(\alpha V_1 + \beta V_2) \times W] = \alpha U \cdot (V_1 \times W) + \beta U \cdot (V_2 \times W)$;

(c) $U \cdot [V \times (\alpha W_1 + \beta W_2)] = \alpha U \cdot (V \times W_1) + \beta U \cdot (V \times W2)$.

(d) $U \cdot (V \times W) = U \cdot [(V + \alpha U + \beta W) \times W]$.

(Sugestão: use as propriedades dos produtos escalar e vetorial)

3.2.36. Prove a identidade de Lagrange

$$||V \times W||^2 = ||V||^2||W||^2 - (V \cdot W)^2.$$

3.2.37. Mostre que a área do triângulo com vértices (x_i, y_i), para $i = 1, 2, 3$ é igual à $|\det(A)|/2$, em que

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Sugestão: Marque os pontos $P_1 = (x_1, y_1, 1)$, $P_2 = (x_2, y_2, 1)$, $P_3 = (x_3, y_3, 1)$ e $P_1' = (x_1, y_1, 0)$. O volume do paralelepípedo determinado por P_1, P_2, P_3 e P_1' é dado por $|\ \overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\ |$. Mas, a altura deste paralelepípedo é igual à 1. Assim, o seu volume é igual à área da base que é o paralelogramo determinado por P_1, P_2 e P_3. Observe que $\overrightarrow{OP_1'}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são paralelos ao plano xy.)

3.2.38. Sejam U_1, U_2 e U_3 três vetores unitários mutuamente ortogonais. Se $A = [\ U_1\ U_2\ U_3\ ]$ é uma matriz 3×3 cujas colunas são os vetores U_1, U_2 e U_3, então A é invertível e $A^{-1} = A^t$. (Sugestão: mostre que $A^tA = I_3$.)

3.2.39. Sejam $U = (u_1, u_2, u_3)$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$. Prove a fórmula seguinte para o **produto vetorial duplo**

$$U \times (V \times W) = (U \cdot W)V - (U \cdot V)W,$$

seguindo os seguintes passos:

(a) Prove que

$$\begin{aligned} U \times (\vec{i} \times \vec{j}) &= (U \cdot \vec{j})\vec{i} - (U \cdot \vec{i})\vec{j} \\ U \times (\vec{j} \times \vec{k}) &= (U \cdot \vec{k})\vec{j} - (U \cdot \vec{j})\vec{k} \\ U \times (\vec{k} \times \vec{i}) &= (U \cdot \vec{i})\vec{k} - (U \cdot \vec{k})\vec{i} \end{aligned}$$

(b) Prove usando o item anterior e as propriedades do produto vetorial que

$$\begin{aligned} U \times (V \times \vec{i}) &= (U \cdot \vec{i})V - (U \cdot V)\vec{i} \\ U \times (V \times \vec{j}) &= (U \cdot \vec{j})V - (U \cdot V)\vec{j} \\ U \times (V \times \vec{k}) &= (U \cdot \vec{k})V - (U \cdot V)\vec{k} \end{aligned}$$

(c) Prove agora o caso geral usando o item anterior e as propriedades do produto vetorial.

3.2.40. (a) Prove que

$$[A \times (B \times C)] + [B \times (C \times A)] + [C \times (A \times B)] = 0$$

(Sugestão: use o exercício anterior).

(b) Mostre que se $(A \times C) \times B = \bar{0}$, então

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C,$$

ou seja, o produto vetorial é, neste caso, associativo.

Apêndice IV: Demonstração do item (e) do Teorema 3.5 na página 179

Vamos dividir a demonstração da distributividade do produto vetorial em relação a soma

$$V \times (W + U) = V \times W + V \times U \quad \text{e} \quad (V + W) \times U = V \times U + W \times U$$

da seguinte forma:

(a) $(V \times W) \cdot U > 0$ se, e somente se, V, W e U satisfazem a regra da mão direita, isto é, se o ângulo entre V e W é θ, giramos o vetor V de um ângulo θ até que coincida com W e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de U.

(b) $(V \times W) \cdot U = V \cdot (W \times U)$, ou seja, pode-se trocar os sinais $\times$ e $\cdot$ em $(V \times W) \cdot U$.

(c) $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$ e $(V + W) \times U = V \times U + W \times U$.

Provemos, agora, os três ítens acima.

(a) Como vemos na Figura 3.25 na página 188 V, W e U satisfazem a regra da mão direita se, e somente se, $0 < \theta < \pi/2$, ou seja, $\cos\theta > 0$, em que θ é o ângulo entre $V \times W$ e U. Como, $(V \times W) \cdot U = ||V \times W|| ||U|| \cos\theta$, então V, W e U satisfazem a regra da mão direita se, e somente se, $(V \times W) \cdot U > 0$.

(b) Como o produto escalar é comutativo, pelo Teorema 3.8 na página 189,

$$|(V \times W) \cdot U| = |V \cdot (W \times U)|.$$

Agora, pelo item (a), temos que

$$(V \times W) \cdot U \quad \text{e} \quad V \cdot (W \times U)$$

têm o mesmo sinal, pois V, W e U satisfazem a regra da mão direita se, e somente se, W, U e V também satisfazem.

(c) Vamos provar a primeira igualdade e deixamos como exercício para o leitor a demonstração da segunda. Vamos mostrar que o vetor $Y = V \times (W + U) - V \times W - V \times U$ é o vetor nulo. Para isso, vamos mostrar que para qualquer vetor X no espaço $X \cdot Y = 0$.

Pela distributividade do produto escalar, Teorema 3.3 item (b) na página 172, temos que

$$X \cdot Y = X \cdot V \times (W + U) - X \cdot (V \times W) - X \cdot (V \times U).$$

Pelo item (b), temos que

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= (X \times V) \cdot (W + U) - (X \times V) \cdot W - (X \times V) \cdot U \\ &= (X \times V) \cdot (W + U) - (X \times V) \cdot (W + U) = 0 \end{aligned}$$

Assim, $X \cdot Y = 0$, para todo vetor X, em particular para $X = Y$, temos que $Y \cdot Y = ||Y||^2 = 0$. Portanto, $Y = \bar{0}$, ou seja, $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$.

Teste do Capítulo

1. Mostre que os pontos $A = (4, 0, 1)$, $B = (5, 1, 3)$, $C = (3, 2, 5)$, $D = (2, 1, 3)$ são vértices de um paralelogramo. Calcule a sua área.

2. Dado o triângulo de vértices $A = (0, 1, -1)$, $B = (-2, 0, 1)$ e $C = (1, -2, 0)$, determine a medida da altura relativa ao lado BC.

3. Sejam U e V vetores no espaço, com $V \neq \bar{0}$.

   (a) Determine o número α, tal que $U - \alpha V$ seja ortogonal a V.

   (b) Mostre que $(U + V) \times (U - V) = 2V \times U$.

4. Determine x para que $A = (x, 1, 2)$, $B = (2, -2, -3)$, $C = (5, -1, 1)$ e $D = (3, -2, -2)$ sejam coplanares.

4

Retas e Planos

4.1 Equações de Retas e Planos

4.1.1 Equações do Plano

Equação Geral

No plano a equação geral de uma reta é $ax + by + c = 0$. No espaço um plano é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{para } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

que é chamada **equação geral do plano**. Existe uma analogia entre uma reta no plano e um plano no espaço. No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados sua inclinação e um de seus pontos. No espaço, a inclinação de um plano é caracterizada por um vetor perpendicular a ele, chamado **vetor normal ao plano** e a equação de um plano é determinada se são dados um vetor normal e um de seus pontos.

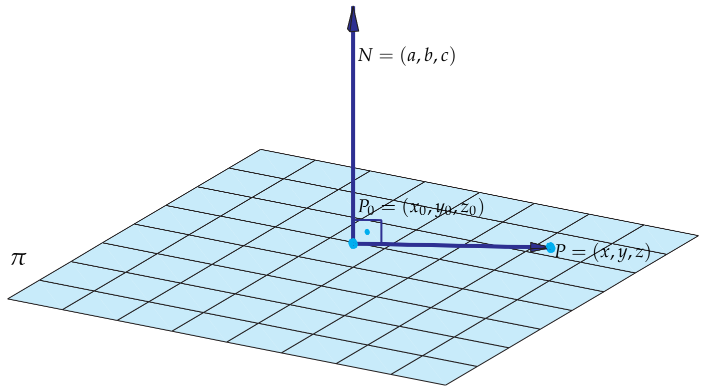


Figura 4.1 – Plano perpendicular a $N = (a, b, c)$ e que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Proposição 4.1. *A equação geral de um plano π que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor normal $N = (a, b, c)$ é*

$$ax + by + cz + d = 0\,, \tag{4.1}$$

em que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Demonstração. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for perpendicular ao vetor N, ou seja,

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0\,. \tag{4.2}$$

Como, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, a equação (4.2) pode ser reescrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou seja,

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0\,.$$

■

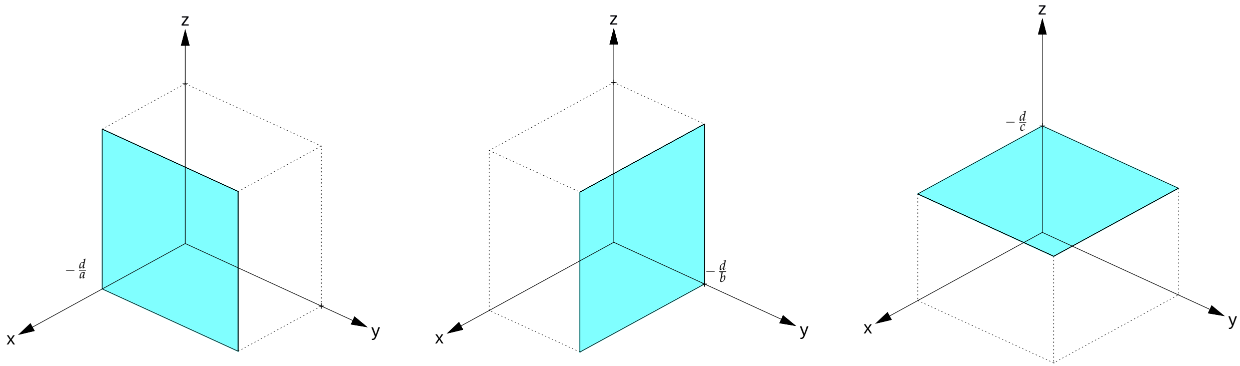


Figura 4.2 – Planos $ax + d = 0$, $by + d = 0$ e $cz + d = 0$

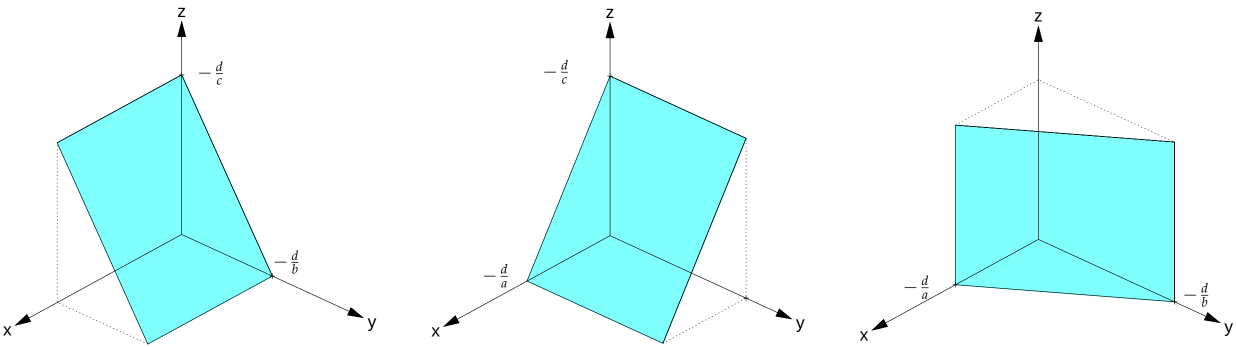


Figura 4.3 – Planos $by + cz + d = 0$, $ax + cz + d = 0$ e $ax + by + d = 0$

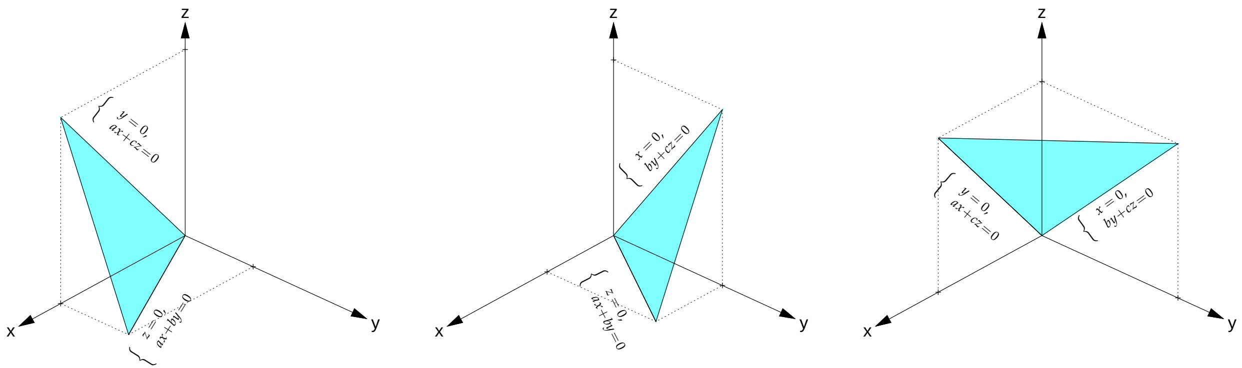


Figura 4.4 – Planos $ax + by + cz = 0$

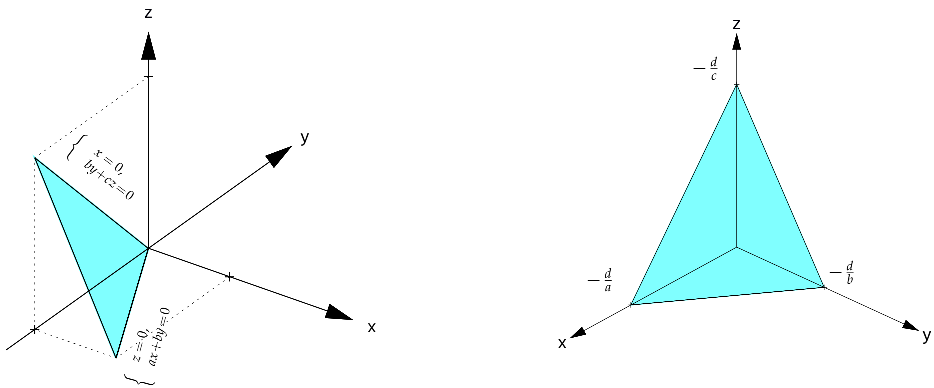


Figura 4.5 – Planos $ax + by + cz = 0$ e $ax + by + cz + d = 0$

Exemplo 4.1. Vamos encontrar a equação do plano π que passa pelo ponto $P_0 = (1, -2, -2)$ e é perpendicular ao vetor $N = (2, -1, 2)$. Da Proposição 4.1, a equação do plano é da forma

$$ax + by + cz + d = 0\,,$$

em que os coeficientes de x, y e z são as componentes do vetor normal, ou seja, $a = 2$, $b = -1$ e $c = 2$. Assim, a equação de π é da forma

$$2x - y + 2z + d = 0\,.$$

Para determinar o coeficiente d, ao invés de usarmos a Proposição 4.1, vamos usar o fato de que $P_0 = (1, -2, -2)$ pertence a π. Mas, o ponto P_0 pertence a π se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação de π, ou seja,

$$2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + d = 0\,.$$

Logo, $d = 2 + 2 - 4 = 0$. Substituindo-se $d = 0$ na equação anterior do plano obtemos que a equação do plano π é

$$2x - y + 2z = 0\,.$$

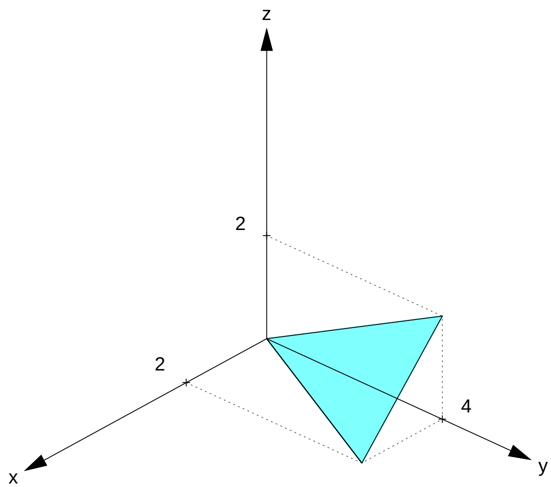


Figura 4.6 – Plano $2x - y + 2z = 0$

No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados dois pontos da reta. Analogamente, no espaço, a equação de um plano é determinada se são dados três pontos P_1, P_2 e P_3 não colineares (isto é, não pertencentes a uma mesma reta). Com os três pontos podemos "formar" os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Figura 4.7).

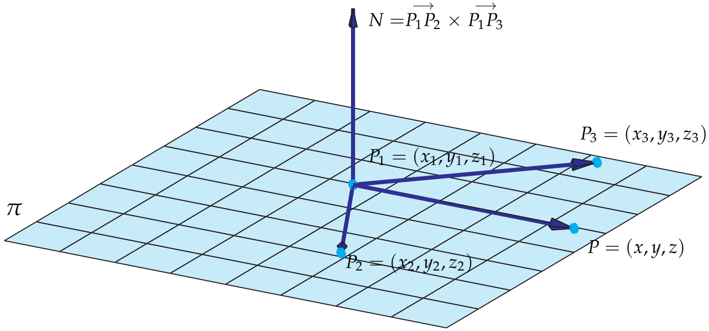


Figura 4.7 – Plano que passa por três pontos

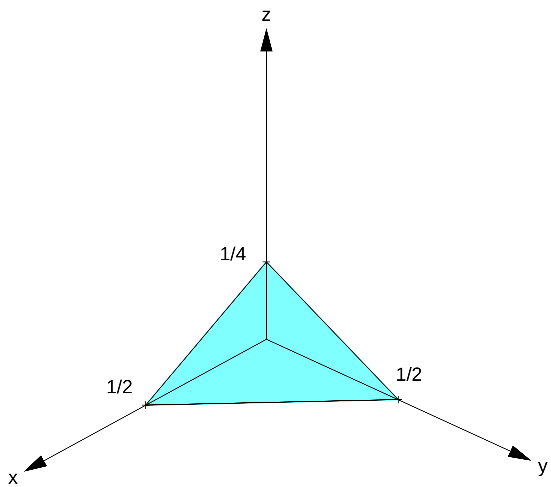


Figura 4.8 – Plano $2x + 2y + 4z - 1 = 0$

Exemplo 4.2. Vamos encontrar a equação do plano π que passa pelos pontos $P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $P_2 = (0, \frac{1}{2}, 0)$ e $P_3 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Com os três pontos podemos "formar" os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$. O vetor

$$N = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \times (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

é um vetor normal ao plano. Assim, a equação do plano é da forma

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z + d = 0,$$

em que os coeficientes de x, y e z são as componentes do vetor N. Para determinar o coeficiente d, vamos usar o fato de que o ponto $P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ pertence ao plano π. Mas, o ponto P_1 pertence a π se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação de π, ou seja,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + d = 0 \,.$$

Logo, $d = \frac{1}{8}$. Finalmente, uma equação do plano π é

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8} = 0$$

ou multiplicando por 8, obtemos

$$2x + 2y + 4z - 1 = 0.$$

<u>Alternativamente</u>, podemos encontrar a equação do plano da seguinte forma. Como vimos anteriormente (Corolário 3.9 na página 191), três vetores, $\overrightarrow{P_1P}$ $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, são coplanares se, e somente se, o produto misto entre eles é zero. Assim, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se,

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0 \,.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P} &= (x - \frac{1}{2}, y, z) \\
\overrightarrow{P_1P_2} &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \\
\overrightarrow{P_1P_3} &= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Então,

$$\det \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} & y & z \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$$

e assim a equação do plano é dada por

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8} = 0.$$

ou multiplicando por 8,

$$2x + 2y + 4z - 1 = 0$$

A equação do plano também é determinada se ao invés de serem dados três pontos, forem dados um ponto P_1 do plano e dois vetores paralelos ao plano, $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$, desde que eles sejam não paralelos. Ou ainda se forem dados dois pontos P_1 e P_2 do plano e um vetor paralelo ao plano $V = (v_1, v_2, v_3)$, já que neste caso podemos formar o vetor $W = \overrightarrow{P_1P_2} = (w_1, w_2, w_3)$ que é também paralelo ao plano.

Nestes casos temos novamente pelo menos duas maneiras de encontrarmos a equação do plano. Uma delas é observando que o vetor $N = V \times W$ é um vetor normal ao plano. Desta forma temos um ponto do plano e um vetor normal ao plano. A outra é observando que temos três vetores paralelos ao plano:

$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, V e W. Como vimos anteriormente (Corolário 3.9 na página 191), os três vetores são coplanares se, e somente se, o produto misto entre eles é zero, ou seja,

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (V \times W) = \det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0\,. \tag{4.3}$$

Assim, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a um plano π que passa pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e é paralelo aos vetores $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ (não paralelos) se, e somente se, a equação (4.3) é verdadeira.

Observação. Não faz sentido dizer que um vetor pertence a um plano. Pois, por um lado, um plano é um conjunto de pontos e por outro, os vetores são "livres", podem ser "colocados" em qualquer ponto. O correto é dizer que um vetor é paralelo a um plano.

Equações Paramétricas

Além da equação geral do plano podemos também caracterizar os pontos de um plano da seguinte forma. Considere um plano π, um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertencente a π e dois vetores $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ não colineares, paralelos a π. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ é uma combinação linear de V e W (Corolário 3.10 na página 192), ou seja, se existem escalares t e s tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = tV + sW. \tag{4.4}$$

Escrevendo em termos de componentes (4.4) pode ser escrito como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tv_1 + sw_1, tv_2 + sw_2, tv_3 + sw_3).$$

Logo um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, satisfaz as equações

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x & = & x_0 & + & v_1\, t & + & w_1\, s \\ y & = & y_0 & + & v_2\, t & + & w_2\, s \\ z & = & z_0 & + & v_3\, t & + & w_3\, s \end{array}\right. \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Estas equações são chamadas **equações paramétricas do plano**.

Exemplo 4.3. Podemos obter equações paramétricas do plano do Exemplo 4.2 na página 217 usando o fato de que ele passa pelo ponto $P_1 = (1/2, 0, 0)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1/2, 1/2, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1/2, -1/2, 1/2)$. Assim,

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ y & = & \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ z & = & \frac{1}{2}s \end{array}\right. \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.4. Para encontrarmos as equações paramétricas do plano do Exemplo 4.1 na página 212 podemos resolver a equação geral do plano $2x + 2y + 4z - 1 = 0$. Podemos proceder como no caso de sistemas lineares e considerar as variáveis y e z livres: $z = t$ e $y = s$. Assim, $x = \frac{1}{2} - 2\,t - s$ e portanto

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \frac{1}{2} - 2\,t - s \\ y & = & s \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R}.$$

são equações paramétricas do plano. Destas equações obtemos que os vetores $V_1 = (-2, 0, 1)$ e $V_2 = (-1, 1, 0)$ são paralelos ao plano.

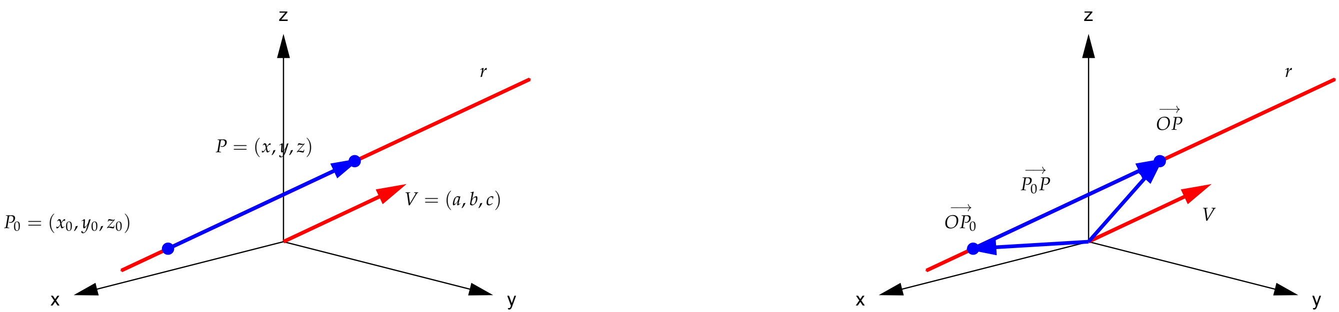


Figura 4.9 – Reta paralela ao vetor $V = (a, b, c)$

4.1.2 Equações da Reta

Equações Paramétricas

Vamos supor que uma reta r seja paralela a um vetor $V = (a, b, c)$ não nulo e que passe por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao vetor V, isto é, se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é um múltiplo escalar de V, ou seja,

$$\overrightarrow{P_0P} = t\,V\,. \tag{4.5}$$

Em termos de componentes, a equação (4.5) pode ser escrita como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc).$$

Logo, $x - x_0 = t\,a$, $y - y_0 = t\,b$ e $z - z_0 = t\,c$.
Ou seja, a reta r pode ser descrita como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + t\,a \\ y & = & y_0 + t\,b, \\ z & = & z_0 + t\,c \end{array} \right. \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

As equações (4.6), chamadas **equações paramétricas da reta**, são de uma reta r que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $V = (a, b, c)$, chamado **vetor diretor da reta** r.

O parâmetro t nas equações (4.6) pode ser interpretado como o instante de tempo, se o ponto $P = (x, y, z)$ descreve o movimento de uma partícula em movimento retilíneo uniforme com vetor velocidade $V = (a, b, c)$. Observe que para $t = 1$, $P = (x, y, z) = (x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c)$, para $t = 2$, $P = (x, y, z) = (x_0 + 2a, y_0 + 2b, z_0 + 2c)$ e assim por diante.

As equações (4.6), podem ser reescritas como

$$(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct),$$

que é chamada **equação vetorial da reta** r.

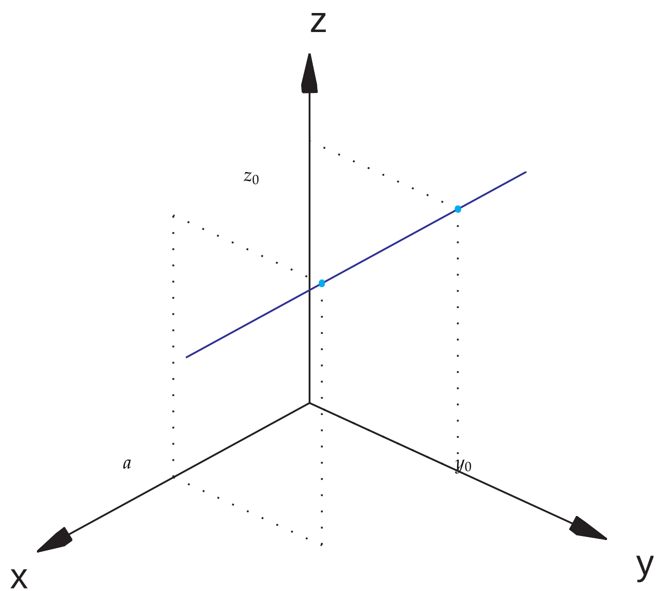


Figura 4.10 – Reta $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0, z_0)$

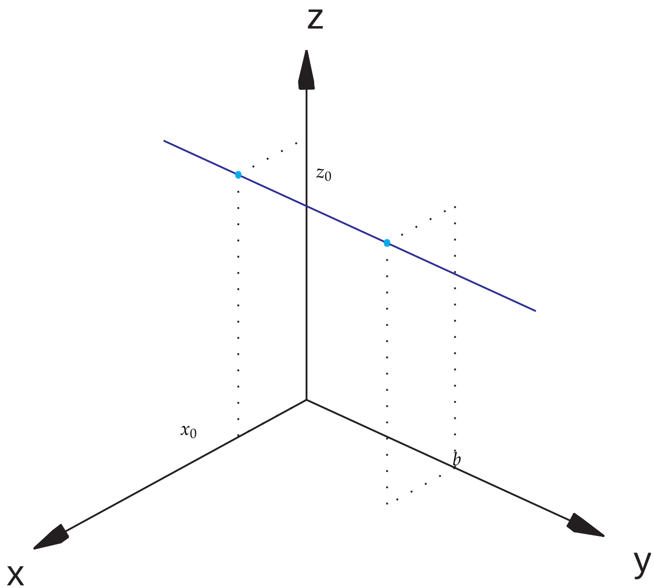


Figura 4.11 – Reta $(x, y, z) = (x_0, y_0 + bt, z_0)$

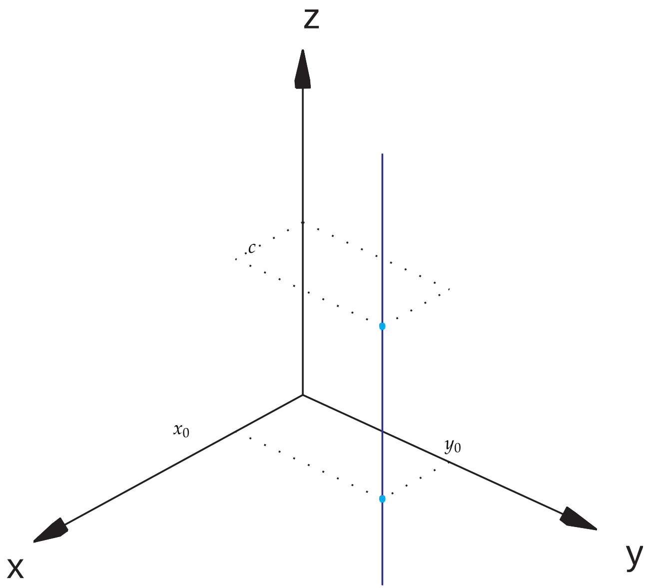


Figura 4.12 – Reta $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0 + ct)$

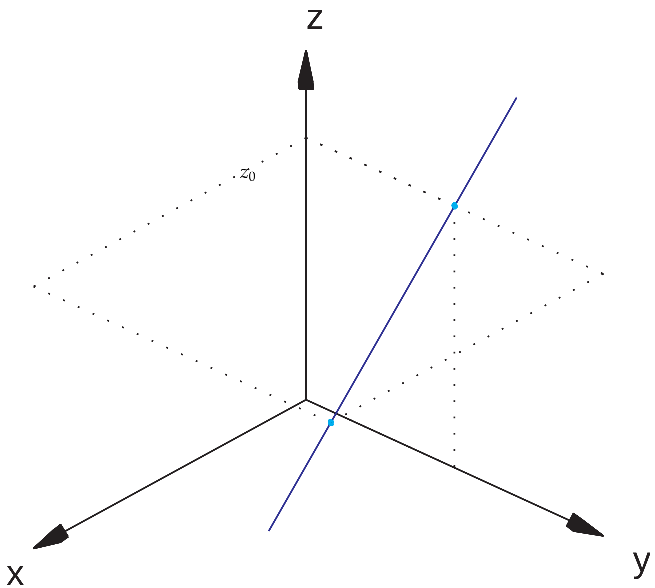


Figura 4.13 – Reta $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0)$

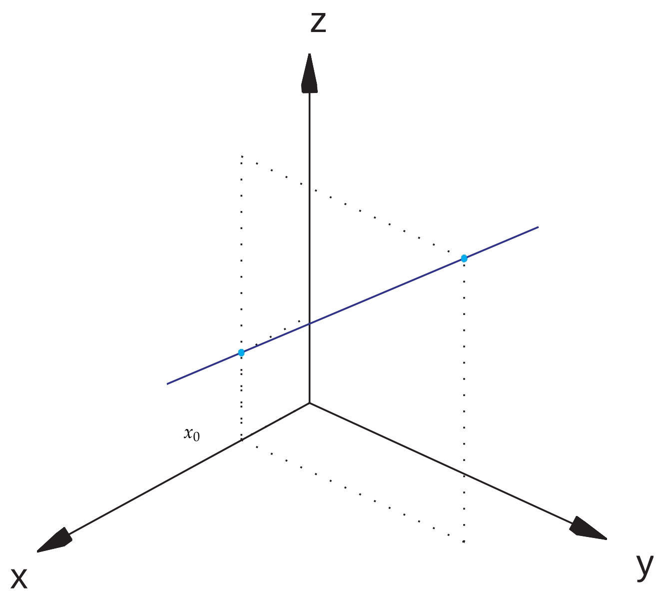


Figura 4.14 – Reta $(x, y, z) = (x_0, y_0 + bt, z_0 + ct)$

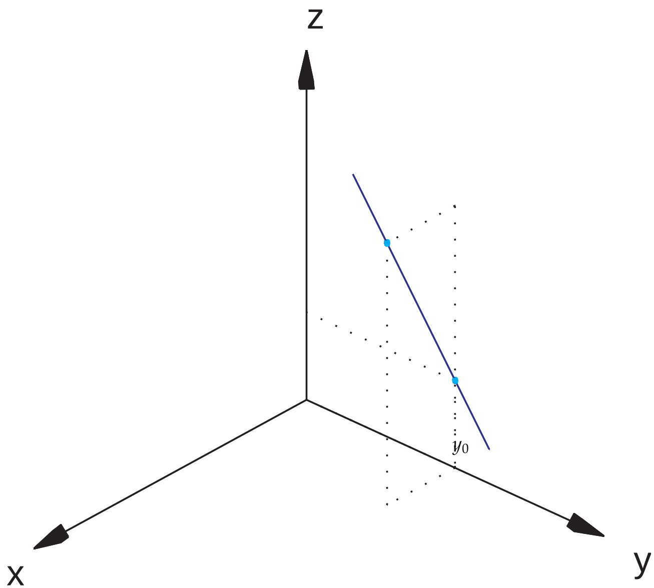


Figura 4.15 – Reta $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0, z_0 + ct)$

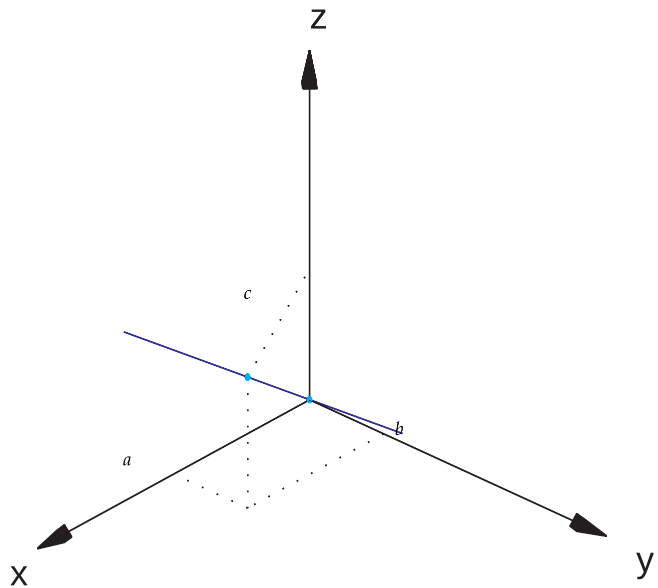


Figura 4.16 – Reta $(x, y, z) = (at, bt, ct)$

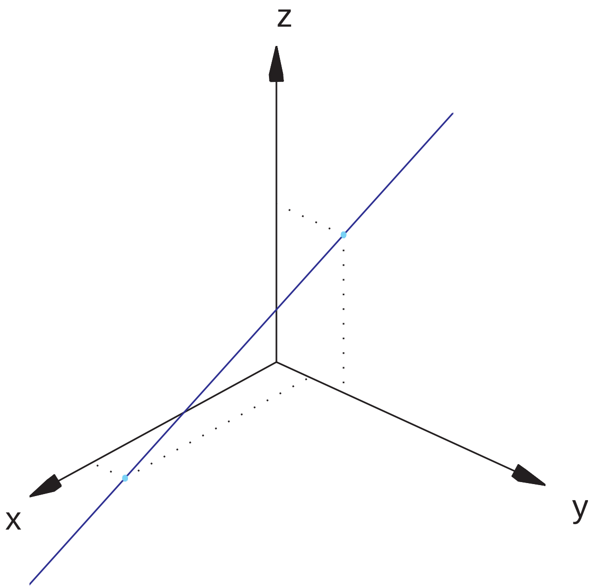


Figura 4.17 – Reta $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$

Observação. Não faz sentido dizer que o vetor está contido na reta. Por um lado, a reta é um conjunto de pontos e por outro um vetor não tem posição fixa.

Exemplo 4.5. A reta que passa por $P_0 = (-3, 3/2, 4)$ e é paralela ao vetor $V = (-6, 1, 4)$ tem equações paramétricas

$$r : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -3 - 6\,t \\ y & = & \frac{3}{2} + t \\ z & = & 4 + 4t \end{array} \right. \quad \text{para } t \in \mathbb{R}$$

Podemos encontrar a interseção da reta r com os planos coordenados xy, yz e xz. A equação do plano xy é $z = 0$, do plano yz é $x = 0$ e do plano xz é $y = 0$. Substituindo $z = 0$ nas equações de r, obtemos $t = -1$, $x = 3$ e $y = 1/2$, ou seja,

- o ponto de interseção de r com o plano xy é

$$(x, y, z) = (3, \frac{1}{2}, 0).$$

De forma análoga obtemos

- o ponto de interseção de r com o plano yz é

$$(x, y, z) = (0, 1, 2),$$

- o ponto de interseção de r com o plano xz

$$(x, y, z) = (6, 0, -2).$$

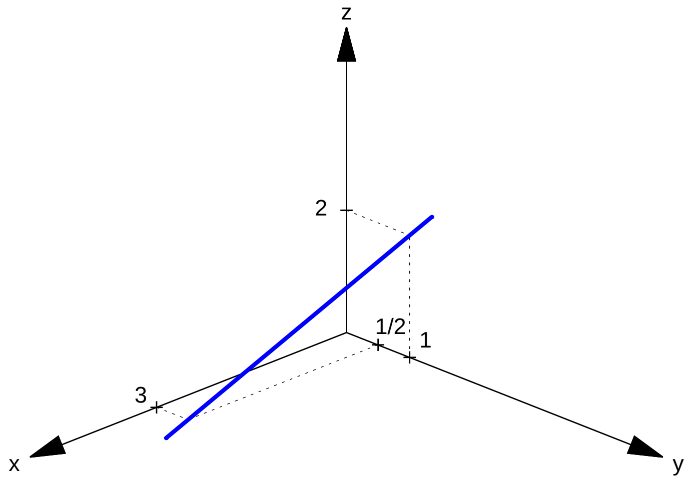


Figura 4.18 – Reta que passa pelo ponto $P_0 = (-3, 3/2, 4)$ paralela ao vetor $V = (-6, 1, 4)$

Equações na Forma Simétrica

Se todas componentes do vetor diretor da reta r são não nulos, podemos resolver cada equação em (4.6) para t e igualar os resultados obtendo o que chamamos de **equações na forma simétrica** de r:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.}$$

No Exemplo 4.5 as equações de r na forma simétrica são:

$$\frac{x+3}{-6}=\frac{y-3/2}{1}=\frac{z-4}{4}.$$

Exemplo 4.6. Vamos encontrar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $P_1=(3,0,2)$ e $P_2=(0,3,3)$. O vetor

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(0-3,3-0,3-2)=(-3,3,1)$$

é paralelo a r e o ponto $P_1=(3,0,2)$ pertence a r. Portanto, as equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x = 3-3\,t \\ y = 3\,t \\ z = 2+t \end{cases} \quad \text{para } t\in\mathbb{R}.$$

Exemplo 4.7. Vamos encontrar as equações paramétricas da reta r, interseção dos planos

$$\begin{array}{rlcl} \pi_1: & 2x+y+4z-4 & = & 0 \\ \pi_2: & 2x-y+2z & = & 0. \end{array}$$

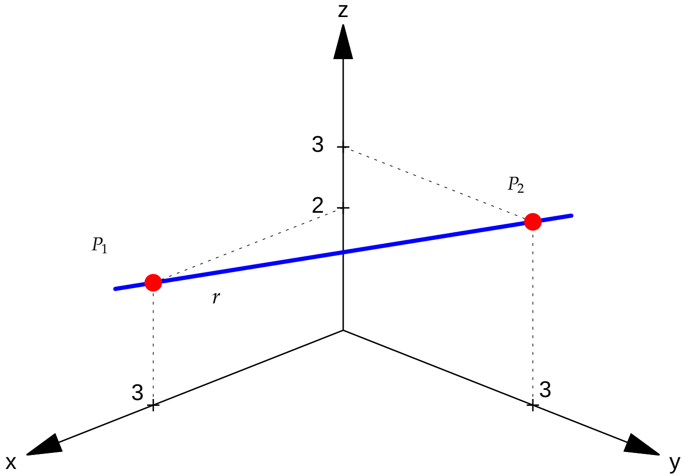


Figura 4.19 – Reta que passa pelos pontos $P_1 = (3, 0, 2)$ e $P_2 = (0, 3, 3)$

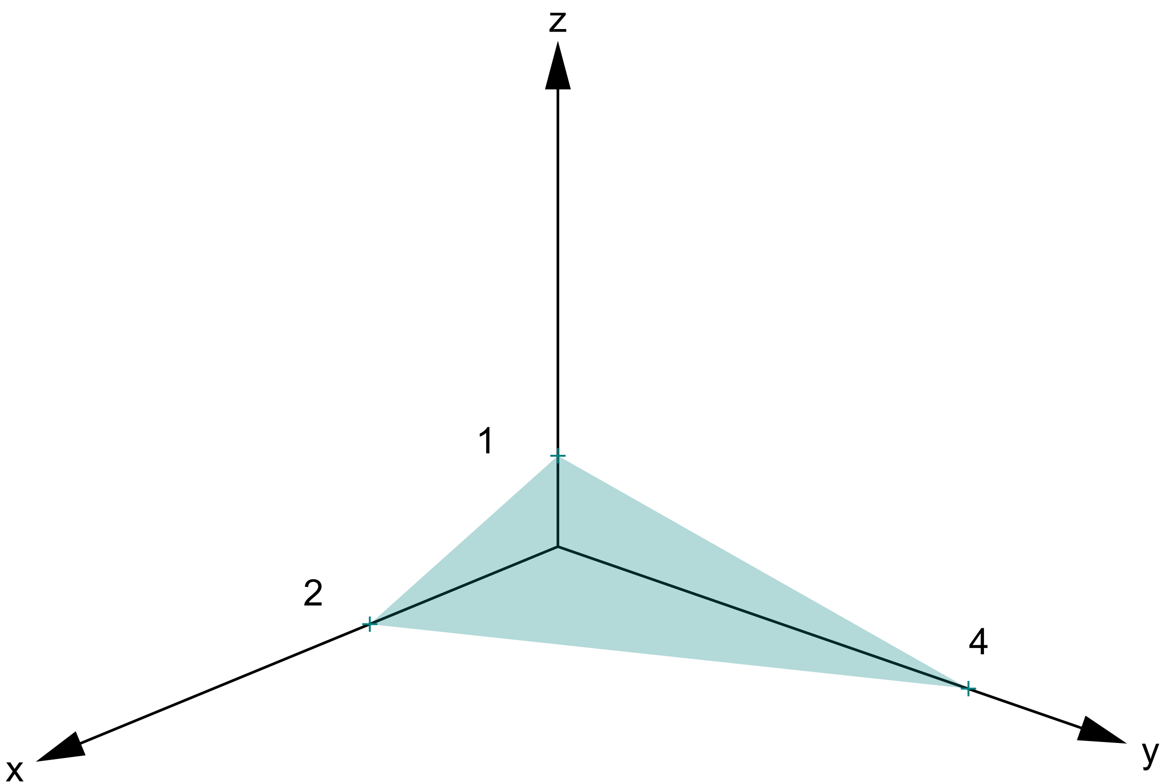


Figura 4.20 – $\pi_1 : 2x + y + 4z - 4 = 0$

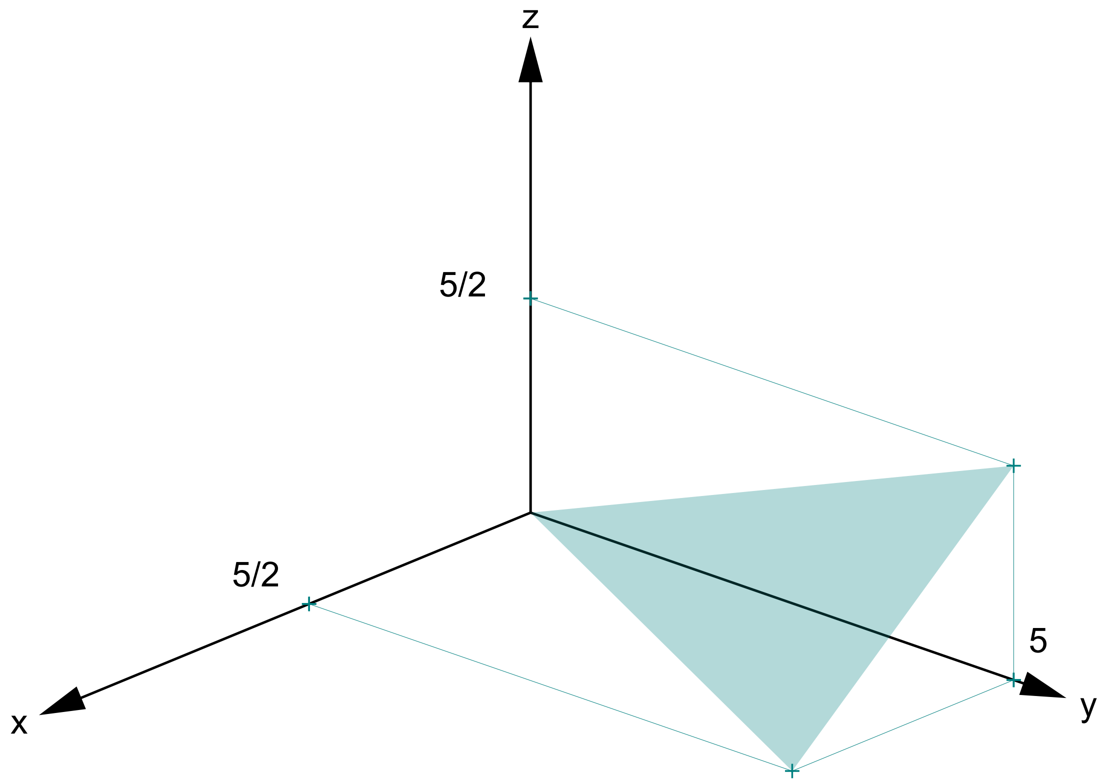


Figura 4.21 – $\pi_2 : 2x - y + 2z = 0$

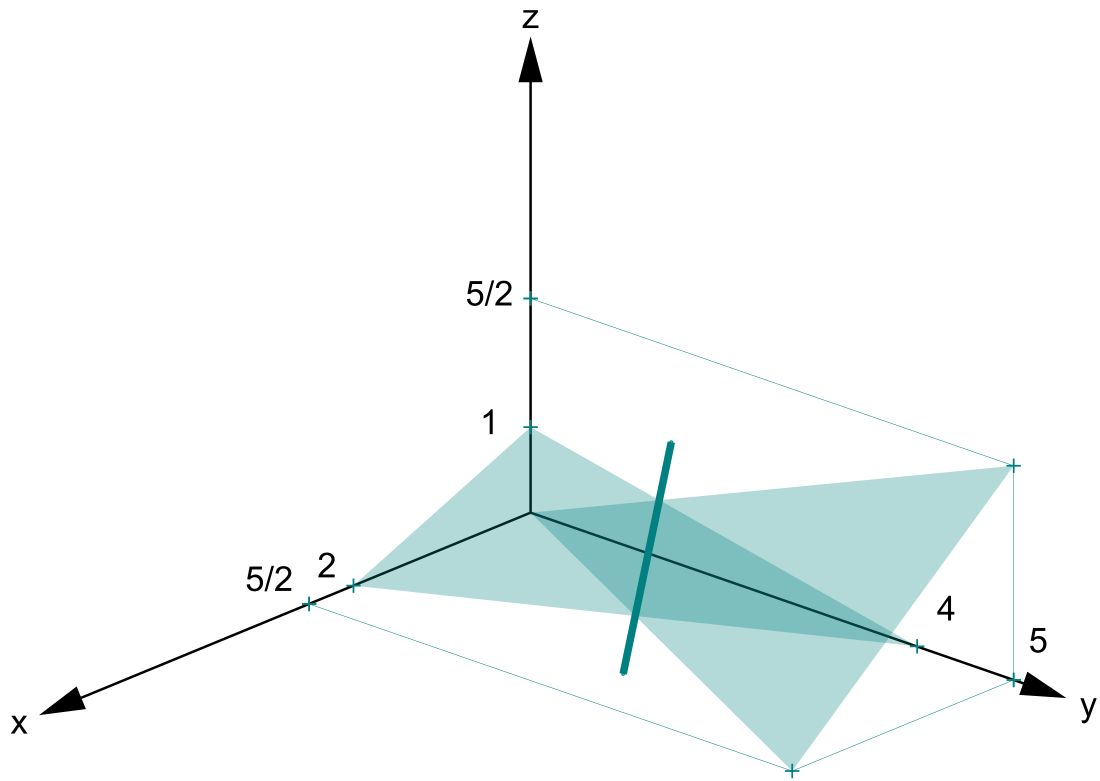


Figura 4.22 – π_1, π_2 e $\pi_1 \cap \pi_2$

Vetores normais destes planos são

$$N_1 = (2,1,4) \text{ e } N_2 = (2,-1,2)\,.$$

A reta r está contida em ambos os planos, portanto é perpendicular a ambos os vetores normais. Assim, a reta r é paralela ao produto vetorial $N_1 \times N_2$ (Teorema 3.5 (c) na página 179).

$$N_1 \times N_2 = \left(\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, -\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = (6,4,-4)\,.$$

Assim, $V = N_1 \times N_2 = (6,4,-4)$ é um vetor diretor de r. Agora, precisamos encontrar um ponto da reta r. Este ponto é uma solução particular do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & y & + & 4z & - & 4 & = 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & & & = 0 \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Para encontrar uma solução particular do sistema, atribuímos um valor a uma das incógnitas (neste exemplo podemos fazer $x = 0$) e resolvemos o sistema obtido, que é de duas equações e duas incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} y & + & 4z & - & 4 & = 0 \\ -y & + & 2z & & & = 0 \end{array}\right.$$

Obtemos então, $y = 4/3$ e $z = 2/3$, ou seja, o ponto $P_0 = (0,4/3,2/3)$ é um ponto da reta r, pois é uma solução particular do sistema (4.7). Assim, as equações paramétricas de r são

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 6t \\ y & = & 4/3 + 4t \\ z & = & 2/3 - 4t \end{array}\right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

<u>Alternativamente</u>, podemos encontrar as equações paramétricas de r determinando a solução geral do sistema (4.7). Para isto devemos escalonar a matriz do sistema

(4.7):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Precisamos "zerar" o outro elemento da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha, menos a 1ª linha.

$\boxed{\text{-1ª linha} + \text{2ª linha} \longrightarrow \text{2ª linha}}$ $\quad \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right]$

Agora, já podemos obter facilmente a solução geral do sistema dado, já que ele é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & = & 4 \\ & - & 2y & - & 2z & = & -4 \end{array}\right.$$

A variável z é uma variável livre. Podemos dar a ela um valor arbitrário, digamos t, para $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Assim, a solução geral do sistema dado é

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & \frac{3}{2}t \\ y & = & 2 & - & t \\ z & = & & & t \end{array}\right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Estas equações são diferentes das equações (4.8), mas representam a mesma reta, pois os vetores diretores obtidos das duas equações são paralelos e o ponto $P_0 = (1,2,0)$ satisfaz também as equações (4.9). Poderíamos dizer também que (4.8) e (4.9) representam retas coincidentes.

O próximo exemplo mostra como encontrar a equação da reta que é perpendicular a duas retas.

Exemplo 4.8. Achar as equações da reta r_3 que intercepta as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

e

$$r_2 : \; x - 2 = \frac{y-4}{2} \quad \text{e} \quad z = 3$$

e é perpendicular a ambas.

Um ponto qualquer da reta r_1 é descrito por $P_{r_1} = (-1 + 2t, 1 + t, 0)$ e um ponto qualquer da reta r_2 é da forma $P_{r_2} = (2 + s, 4 + 2s, 3)$. Aqui é necessário o uso de um parâmetro diferente para a reta r_2. O vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (3 + s - 2t, 3 + 2s - t, 3)$ "liga" um ponto qualquer de r_1 a um ponto qualquer de r_2. Vamos determinar t e s tais que o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ seja perpendicular ao vetor diretor $V_1 = (2, 1, 0)$ de r_1 e ao vetor diretor $V_2 = (1, 2, 0)$ de r_2, ou seja, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_1 = 9 + 4s - 5t = 0 \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_2 = 9 + 5s - 4t = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é $t = 1$, $s = -1$. Logo $P_{r_1} = (1, 2, 0)$, $P_{r_2} = (1, 2, 3)$ e $V_3 = \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0, 0, 3)$. Assim, as equações paramétricas da reta procurada são

$$r_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2, \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Esta solução usou o fato de que as retas são reversas, isto é, elas não são paralelas, mas também não se interceptam. Como seria a solução se elas se interceptassem? Por exemplo se a reta r_2 fosse dada por

$$r_2 : \; x - 2 = \frac{y-4}{2} \quad \text{e} \quad z = 0 \; ?$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 556)

4.1.1. Faça um esboço dos seguintes planos:

(a) $2x + 3y + 5z - 1 = 0$
(b) $x - 2y + 4z = 0$
(c) $3y + 2z - 1 = 0$
(d) $2x + 3z - 1 = 0$
(e) $3x + 2y - 1 = 0$
(f) $5y - 2 = 0$
(g) $3z - 2 = 0$
(h) $2x - 1 = 0$

4.1.2. Faça um esboço das retas dadas a seguir:

(a) $(x, y, z) = (-3 + 3t, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t, 4 - 2t)$
(b) $(x, y, z) = (2t, t, \frac{3}{2}t)$
(c) $(x, y, z) = (1 + t, 2, 3 + 2t)$
(d) $(x, y, z) = (1, 2 + 2t, \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t)$
(e) $(x, y, z) = (2 + 2t, 3 + t, 3)$
(f) $(x, y, z) = (1, 2, 2 + 2t)$
(g) $(x, y, z) = (1, 2 + 2t, 3)$
(h) $(x, y, z) = (2 + 2t, 2, 3)$

4.1.3. Ache a equação do plano paralelo ao plano $2x - y + 5z - 3 = 0$ e que passa por $P = (1, -2, 1)$.

4.1.4. Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $P = (2, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos $x + 2y - 3z + 2 = 0$ e $2x - y + 4z - 1 = 0$.

4.1.5. Encontrar a equação do plano que passa pelos pontos $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (1, 0, 1)$ e é perpendicular ao plano $y = z$.

4.1.6. Determine a interseção da reta que passa pela origem e tem vetor diretor $V = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ com o plano $2x + y + z = 5$.

4.1.7. Verifique se as retas $r : (x, y, z) = (9t, 1 + 6t, -2 + 3t)$ e $s : (x, y, z) = (1 + 2t, 3 + t, 1)$ se interceptam e em caso afirmativo determine a interseção. (Sugestão: a questão é se as trajetórias se cortam e não se as partículas se chocam, ou seja, elas não precisam estar num ponto no mesmo instante.)

4.1.8. Dadas as retas

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = z \qquad \text{e} \qquad s : x - 2 = y = z,$$

obtenha uma equação geral para o plano determinado por r e s.

4.1.9. Sejam $P = (4,1,-1)$ e $r : (x,y,z) = (2+t, 4-t, 1+2t)$.

(a) Mostre que $P \notin r$;

(b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

4.1.10. Dados os planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$, determine o plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é ortogonal ao vetor $(-1,1,-1)$.

4.1.11. Quais dos seguintes pares de planos se cortam segundo uma reta?

(a) $x + 2y - 3z - 4 = 0$ e $x - 4y + 2z + 1 = 0$;

(b) $2x - y + 4z + 3 = 0$ e $4x - 2y + 8z = 0$;

(c) $x - y = 0$ e $x + z = 0$.

4.1.12. Encontre as equações da reta que passa pelo ponto $Q = (1,2,1)$ e é perpendicular ao plano $x - y + 2z - 1 = 0$.

4.1.13. Ache equações da reta que passa pelo ponto $P = (1,0,1)$ e é paralela aos planos $2x + 3y + z + 1 = 0$ e $x - y + z = 0$.

4.1.14. Seja r a reta determinada pela interseção dos planos $x + y - z = 0$ e $2x - y + 3z - 1 = 0$. Ache a equação do plano que passa por $A = (1,0,-1)$ e contém a reta r.

4.1.15. Sejam r e s retas reversas passando por $A = (0,1,0)$ e $B = (1,1,0)$ e por $C = (-3,1,-4)$ e $D = (-1,2,-7)$, respectivamente. Obtenha uma equação da reta concorrente com r e s e paralela ao vetor $V = (1,-5,-1)$.

4.1.16. (a) Mostre que os planos $2x - y + z = 0$ e $x + 2y - z = 1$ se interceptam segundo uma reta r;

(b) Ache equações da reta que passa pelo ponto $A = (1,0,1)$ e intercepta a reta r ortogonalmente.

4.1.17. Considere as retas $(x,y,z) = t(1,2,-3)$ e $(x,y,z) = (0,1,2) + s(2,4,-6)$. Encontre a equação geral do plano que contém estas duas retas.

4.1.18. Determine as equações paramétricas da reta interseção dos planos:

(a) $x + 2y - 3z - 4 = 0$ e $x - 4y + 2z + 1 = 0$;

(b) $x - y = 0$ e $x + z = 0$.

4.1.19. Considere o plano $\pi :\ 2x + 2y - z = 0$.

(a) Determine as retas r, interseção do plano π com o plano yz, s, interseção do plano π com o plano xz e t, interseção do plano π com o plano $z = 2$. Desenhe um esboço do plano π mostrando as retas r, s e t.

(b) Determine o volume do tetraedro determinado pelo plano π, os planos coordenados xz e yz e o plano $z = 2$. (Sugestão: este volume é igual a $1/6$ do volume do paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, em que $O = (0, 0, 0)$, A é o ponto interseção do eixo z com o plano $z = 2$, B é a interseção das retas r e t e C é a interseção das retas s e t.)

(c) Determine a área da face do tetraedro contida no plano π.

(d) Determine a altura do tetraedro relativa a face contida no plano π. (Sugestão: a reta ortogonal ao plano π que passa pelo ponto A intercepta o plano π num ponto P de forma que a altura procurada é igual à $||\ \overrightarrow{AP}\ ||$)

4.1.20. Achar as equações da reta que intercepta as retas r_1 e r_2 e é perpendicular a ambas.

(a)

$$r_1 :\ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \\ z = 4t \end{cases}$$

e

$$r_2 :\ x + 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 2}{3}.$$

(b)

$$r_1 : \begin{cases} x &= -1 + t \\ y &= 2 + 3t, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \\ z &= 4t \end{cases}$$

e

$$r_2 : x = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Exercícios usando o MATLAB®

`>> V=[v1,v2,v3]` cria um vetor `V`, usando as componentes numéricas `v1, v2, v3`. Por exemplo `>> V=[1,2,3]` cria o vetor $V = (1, 2, 3)$;

`>> V+W` é a soma de `V` e `W`; `>> V-W` é a diferença `V` menos `W`; `>> num*V` é o produto do vetor `V` pelo escalar `num`;

`>> subs(expr,x,num,)` substitui `x` por `num` na expressão `expr`;

`>> solve(expr)` determina a solução da equação `expr=0`;

Comandos numéricos do pacote GAAL:

`>> no(V)` calcula a norma do vetor `V`.

`>> pe(V,W)` calcula o produto escalar do vetor `V` pelo vetor `W`.

`>> pv(V,W)` calcula o produto vetorial do vetor `V` pelo vetor `W`.

`>> subst(expr,[x,y,z],[a,b,c])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x,y,z` por `a,b,c`, respectivamente.

Comandos gráficos do pacote GAAL:

`>> lin(P,V)` desenha a reta que passa por `P` com direção `V`.

`>> lin(P1,V1,P2,V2)` desenha retas que passam por `P1, P2`, direções `V1, V2`.

`>> plan(P,N)` desenha o plano que passa por `P` com normal `N`.

`>> plan(P1,N1,P2,N2)` desenha planos que passam por `P1, P2`, normais `N1, N2`.

`>> plan(P1,N1,P2,N2,P3,N3)` desenha planos que passam por `P1`, `P2` e `P3` com normais `N1`, `N2` e `N3`.

`>> poplan(P1,P2,N2)` desenha ponto `P1` e plano passando por `P2` com normal `N2`.

`>> poline(P1,P2,V2)` desenha ponto `P2` e reta passando por `P2` com direção `V2`.

`>> lineplan(P1,V1,P2,N2)` desenha reta passando por `P1` com direção `V1` e plano passando por `P2` com normal `N2`.

`>> axiss` reescala os eixos com a mesma escala.

`>> rota` faz uma rotação em torno do eixo z.

4.1.21. Digite no prompt `demog22`, (sem a vírgula!). Esta função demonstra as funções gráficas para visualização de retas e planos.

4.1.22. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercício Teórico

4.1.23. Seja $ax + by + cz + d = 0$ a equação de um plano π com $abcd \neq 0$.

(a) Determine a interseção de π com os eixos;

(b) Se $P_1 = (p_1, 0, 0)$, $P_2 = (0, p_2, 0)$ e $P_3 = (0, 0, p_3)$ são as interseções de π com os eixos, a equação de π pode ser posta sob a forma

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{p_2} + \frac{z}{p_3} = 1\,.$$

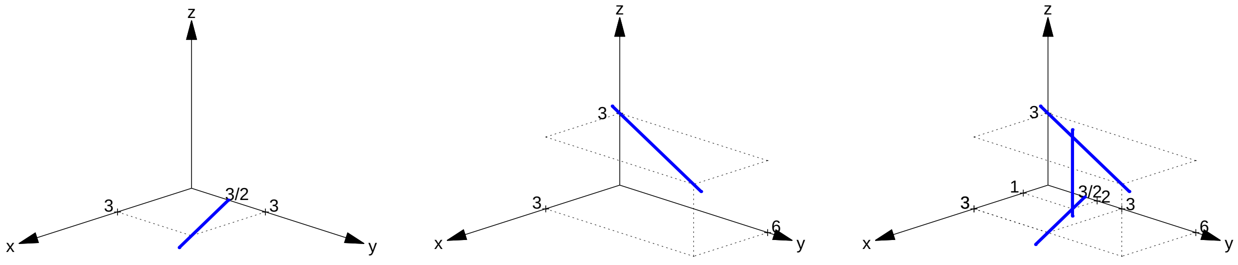


Figura 4.23 – Retas r_1, r_2 e r_3 do Exemplo 4.8

4.2 Ângulos e Distâncias

4.2.1 Ângulos

Ângulo entre Retas

Com duas retas no espaço pode ocorrer um dos seguintes casos:

(a) As retas se interceptam em um ponto, ou seja, são **concorrentes**;

(b) As retas são paralelas (ou coincidentes);

(c) As retas são **reversas**, isto é, não são paralelas mas também não se interceptam.

Se as retas se interceptam, então elas determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. O ângulo entre elas é definido como sendo o menor destes ângulos.

Se as retas r_1 e r_2 são reversas, então por um ponto P de r_1 passa um reta r_2' que é paralela a r_2. O ângulo entre r_1 e r_2 é definido como sendo o ângulo entre r_1 e r_2' (Figura 4.24).

Se as retas são paralelas o ângulo entre elas é igual à zero.
Em qualquer dos casos, se V_1 e V_2 são vetores paralelos a r_1 e r_2 respectivamente, então o cosseno do ângulo entre elas é

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos\theta|,$$

em que θ é o ângulo entre V_1 e V_2.
Lembrando que da definição de produto escalar (Definição 3.1 na página 166), podemos encontrar o cosseno do ângulo entre dois vetores, ou seja,

$$\cos\theta = \frac{V_1 \cdot V_2}{||V_1||\,||V_2||}.$$

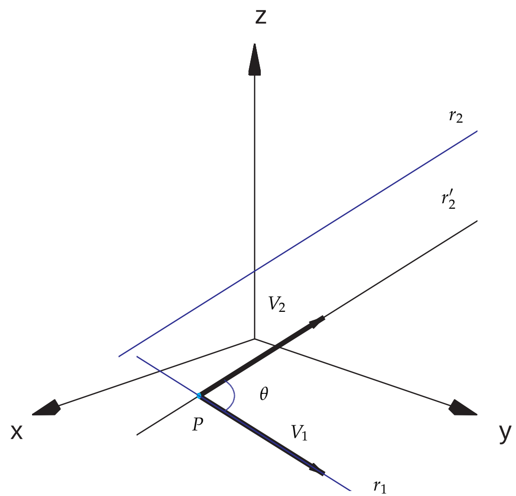


Figura 4.24 – O Ângulo entre duas retas reversas r_1 e r_2

Isto prova o resultado seguinte.

Proposição 4.2. *Sejam duas retas*

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_1 + t\,a_1 \\ y & = & y_1 + t\,b_1 \\ z & = & z_1 + t\,c_1 \end{array} \right. \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_2 + t\,a_2 \\ y & = & y_2 + t\,b_2 \\ z & = & z_2 + t\,c_2 \end{array} \right. \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O cosseno do ângulo entre r_1 e r_2 é

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos\theta| = \frac{|V_1 \cdot V_2|}{||V_1||\,||V_2||},$$

em que $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Exemplo 4.9. Encontrar o ângulo entre a reta

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & z & + & 1 & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & & & = & 0 \end{array} \right.$$

e a reta

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2\,t \\ y & = & 1 - t \\ z & = & 2 + 3\,t \end{array} \right. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Vamos encontrar vetores paralelos a estas retas. A reta r_1 é dada como a interseção de dois planos, portanto o produto vetorial dos vetores normais dos dois planos é paralelo a r_1.

$$N_1 = (1, 1, -1),$$

$$N_2 = (2, -1, 1),$$

$$V_1 = N_1 \times N_2 = \left(\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = (0, -3, -3)$$

é paralelo a r_1 e $V_2 = (2, -1, 3)$ é paralelo a r_2. Assim,

$$\begin{aligned} \cos(r_1, r_2) &= \frac{|V_1 \cdot V_2|}{||V_1||\,||V_2||} = \frac{|0 \cdot 2 + (-3)(-1) + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|-6|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo entre r_1 e r_2 é

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 67^{\mathrm{o}}.$$

Ângulo entre Planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos com vetores normais $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. O ângulo entre π_1 e π_2 é definido como o ângulo entre duas retas perpendiculares a eles. Como toda reta perpendicular a π_1 tem N_1 como vetor diretor e toda reta perpendicular a π_2 tem N_2 como vetor diretor, então o cosseno do ângulo entre eles é dado por

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos\theta|,$$

em que θ é o ângulo entre os vetores normais N_1 e N_2 de π_1 e π_2, respectivamente (Figura 4.25).

Portanto, o cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é $\cos(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||}$. O que prova o resultado seguinte.

Proposição 4.3. *Sejam dois planos*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0\,, \\ \pi_2 &: \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

O cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||}\,,$$

em que $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são os vetores normais de π_1 e π_2, respectivamente.

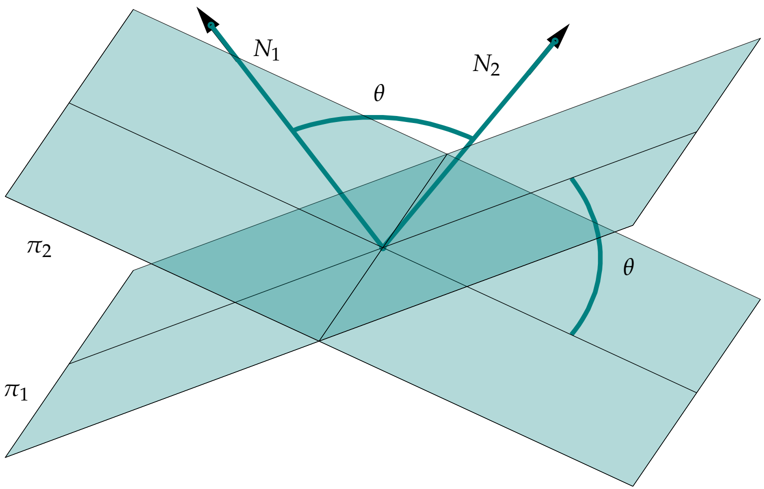


Figura 4.25 – Ângulo entre dois planos

Dois planos π_1 e π_2 ou são paralelos ou se cortam segundo um reta. Eles são paralelos se, e somente se, os vetores normais de π_1 e π_2, são paralelos, ou seja, um vetor é um múltiplo escalar do outro. Assim, π e π_2 são paralelos se, e somente se, o ângulo entre eles é igual à zero.

Exemplo 4.10. Determinar o ângulo entre os planos cujas equações são

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad x + y + z &= 0\,, \\ \pi_2 : \quad x - y - z &= 0\,. \end{aligned}$$

Os vetores normais a estes planos são os vetores cujas componentes são os coeficientes de x, y e z nas equações dos planos, ou seja,

$$N_1 = (1,1,1) \text{ e } N_2 = (1,-1,-1)\,.$$

Assim, o cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1||\,||N_2||} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\,.$$

Portanto, o ângulo entre eles é

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^{\text{o}}\,.$$

4.2.2 Distâncias

Distância de Um Ponto a Um Plano

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi \;:\; ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P_0 a π é definida como sendo a distância de P_0 até o ponto de π mais próximo de P_0.

Dado um ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de π, podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas parcelas, uma na direção do vetor normal de π, $N = (a, b, c)$ e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor N é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{P_1P_0}$ em N. Como vemos na Figura 4.26, a distância de P_0 a π é igual à norma da projeção, ou seja,

$$\text{dist}(P_0, \pi) = ||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}||.$$

Mas, pela Proposição 3.4 na página 174, temos que

$$||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}|| = \left\| \left(\frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N}{||N||^2} \right) N \right\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||}.$$

O que prova o resultado seguinte.

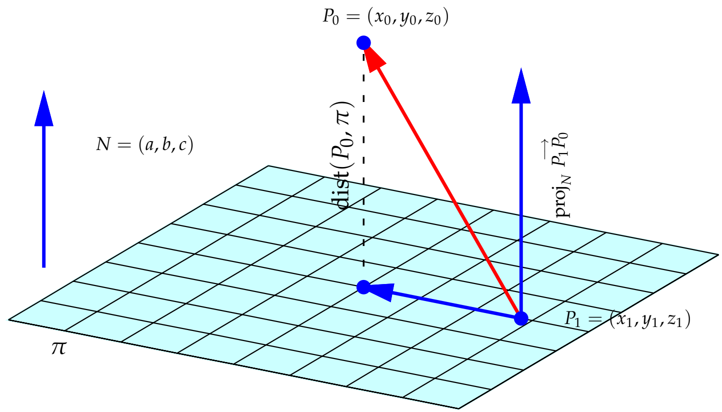


Figura 4.26 – Distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a um plano π

Proposição 4.4. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi : \; ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P_0 a π é dada por*

$$\mathrm{dist}(P_0, \pi) = ||\mathrm{proj}_N \, \overrightarrow{P_1P_0} \, || = \frac{| \, \overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||},$$

em que $N = (a, b, c)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto de π (isto é, um ponto que satisfaz a equação de π).

Exemplo 4.11. Calcular a distância entre o ponto $P_0 = (1, 2, 3)$ ao plano

$$\pi : x - 2y + z - 1 = 0.$$

Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ na equação de π, obtemos $x = 1$. Assim, o ponto $P_1 = (1, 0, 0)$ pertence a π.

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (1 - 1, 2 - 0, 3 - 0) = (0, 2, 3)$$

e

$$N = (1, -2, 1)\,.$$

Assim,

$$\text{dist}(P_0, \pi) = ||\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\,|| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{||N||} = \frac{|0 \cdot 1 + 2(-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Distância de Um Ponto a Uma Reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e r uma reta. A distância de P_0 a r é definida como a distância de P_0 ao ponto de r mais próximo de P_0.

Dado um ponto qualquer $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de r podemos decompor o vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ em duas parcelas, uma na direção do vetor diretor V de r e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor V é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{P_1P_0}$ em V. Como vemos na Figura 4.27,

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 + ||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}\,||^2 = ||\overrightarrow{P_1P_0}\,||^2,$$

ou seja,

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 = ||\overrightarrow{P_1P_0}\,||^2 - ||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}\,||^2\,. \tag{4.10}$$

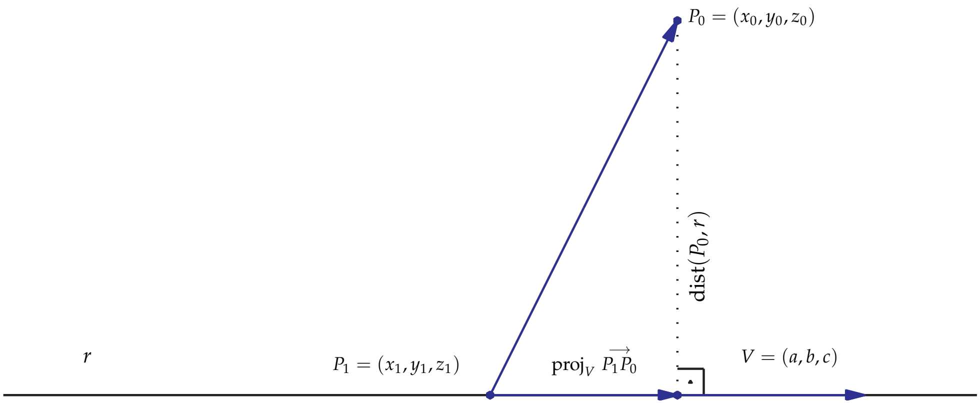


Figura 4.27 – Distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a uma reta r

Mas, pela Proposição 3.4 na página 174, temos que

$$||\text{proj}_V \overrightarrow{P_1P_0}\,||^2 = \left|\left|\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot V}{||V||^2}\right) V\right|\right|^2 = \frac{(\overrightarrow{P_1P_0}\cdot V)^2}{||V||^2}.$$

Substituindo esta expressão em (4.10) e usando a definição do produto escalar na página 166 e da norma do produto vetorial na página 177 obtemos

$$\begin{aligned}(\text{dist}(P_0,r))^2 &= ||\overrightarrow{P_1P_0}\,||^2 - \frac{(\overrightarrow{P_1P_0}\cdot V)^2}{||V||^2} = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}\,||^2||V||^2 - (\overrightarrow{P_1P_0}\cdot V)^2}{||V||^2}\\ &= \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}\,||^2||V||^2 - ||\overrightarrow{P_1P_0}\,||^2||V||^2\cos^2\theta}{||V||^2}\\ &= \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}\,||^2||V||^2\,\text{sen}^2\,\theta}{||V||^2} = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}\times V||^2}{||V||^2}.\end{aligned}$$

Isto prova o resultado seguinte.

Proposição 4.5. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e*

$$r : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_1 + t\,a\\ y &=& y_1 + t\,b\\ z &=& z_1 + t\,c\end{array}\right. \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}$$

uma reta. A distância de P_0 a r é dada por

$$\text{dist}(P_0, r) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_0}\times V||}{||V||}.$$

em que $V = (a, b, c)$ é um vetor diretor e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto da reta r.

Exemplo 4.12. Calcular a distância do ponto $P_0 = (1, -1, 2)$ à reta

$$r : \begin{cases} x &= 1 + 2\,t \\ y &= -t \\ z &= 2 - 3\,t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Um vetor diretor da reta r é $V = (2, -1, -3)$ e um ponto de r é $P_1 = (1, 0, 2)$. Assim,

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (1-1, -1-0, 2-2) = (0, -1, 0)\,,$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} \times V = (3, 0, 2)\,,$$

$$||\ \overrightarrow{P_1P_0} \times V|| = \sqrt{13} \ \text{ e } \ ||V|| = \sqrt{14}\,.$$

Portanto,

$$\operatorname{dist}(P_0, r) = \frac{||\ \overrightarrow{P_1P_0} \times V||}{||V||} = \sqrt{\frac{13}{14}}\,.$$

Distância entre Dois Planos

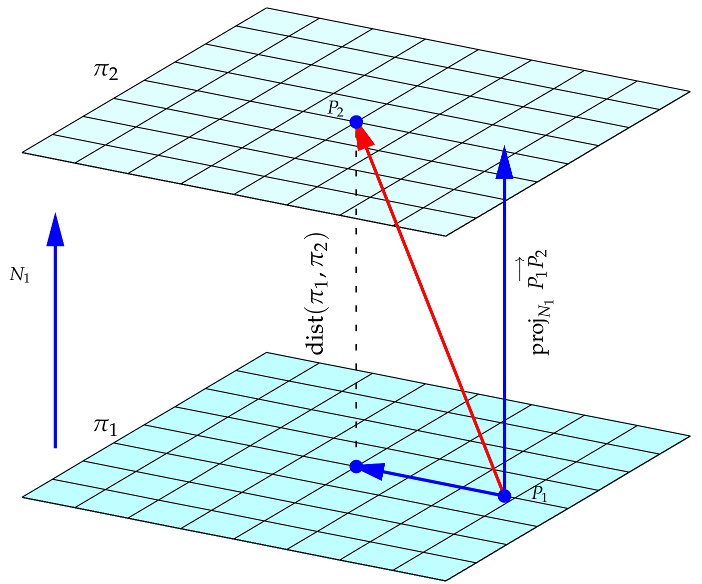


Figura 4.28 – Distância entre dois planos

Sejam dois planos π_1 e π_2 quaisquer. A distância entre π_1 e π_2 é definida como a menor distância entre dois pontos, um de π_1 e outro de π_2.
Se os seus vetores normais **não** são paralelos, então os planos são concorrentes e neste caso a distância entre eles é igual à zero. Se os seus vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos (ou coincidentes) e a distância entre π_1 e π_2 é igual à distância entre um ponto de um deles, por exemplo P_2 de π_2, e o ponto de π_1, mais próximo de P_2 (Figura 4.28). Mas, esta distância é igual à distância de P_2 a π_1. Vamos ver isto em um exemplo.

Exemplo 4.13. Os planos $\pi_1 : x + 2y - 2z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x + 4y - 4z - 7 = 0$ são paralelos, pois os seus vetores normais $N_1 = (1, 2, -2)$ e $N_2 = (2, 4, -4)$ são paralelos (um é múltiplo escalar do outro). Vamos encontrar a distância entre eles.
Vamos encontrar dois pontos quaisquer de cada um deles. Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ em ambas as equações obtemos $x_1 = 3$ e $x_2 = 7/2$. Assim, $P_1 = (3, 0, 0)$ pertence a π_1 e $P_2 = (7/2, 0, 0)$ pertence a π_2. Portanto, pela Proposição 4.4 temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\pi_1, \pi_2) &= \operatorname{dist}(\pi_1, P_2) = ||\operatorname{proj}_{N_1} \overrightarrow{P_1P_2}\,|| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N_1|}{||N_1||} \\
&= \frac{|(7/2 - 3, 0 - 0, 0 - 0) \cdot (1, 2, -2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|(1/2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0(-2)|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Distância entre Duas Retas

Sejam r_1 e r_2 duas retas quaisquer. A distância entre r_1 e r_2 é definida como a menor distância entre dois pontos, um de r_1 e outro de r_2.

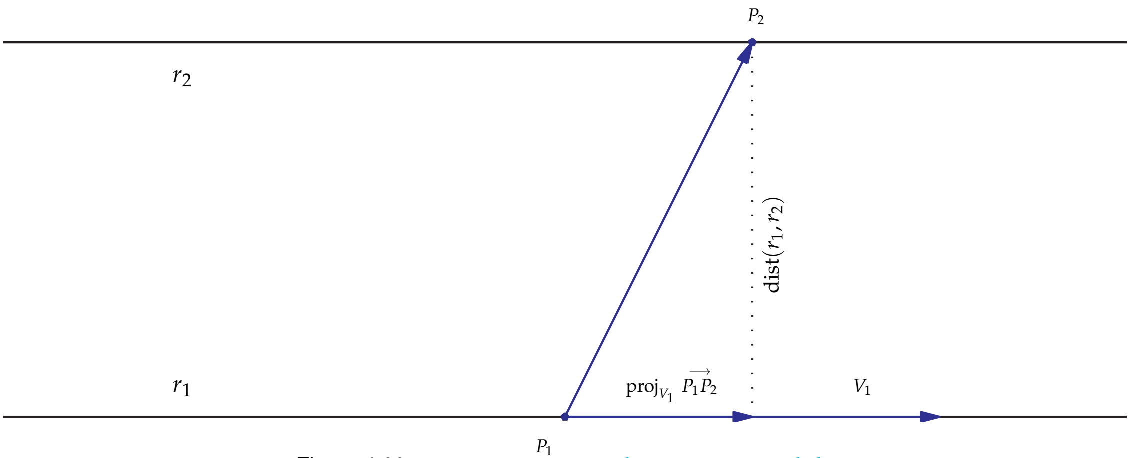


Figura 4.29 – Distância entre duas retas paralelas

Para calcular a distância entre duas retas, vamos dividir em dois casos:

(a) Se os **vetores diretores são paralelos**, então as retas r_1 e r_2 são paralelas (ou coincidentes). Neste caso, a distância entre elas é igual à distância entre um ponto de r_2 e a reta r_1, ou vice-versa, entre um ponto de r_1 e a reta r_2 (Figura 4.29). Assim, pela Proposição 4.5 na página 261, temos que

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \operatorname{dist}(P_1, r_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2||}{||V_2||}, \tag{4.11}$$

em que P_1 e P_2 são pontos de r_1 e r_2 e V_1 e V_2 são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente.

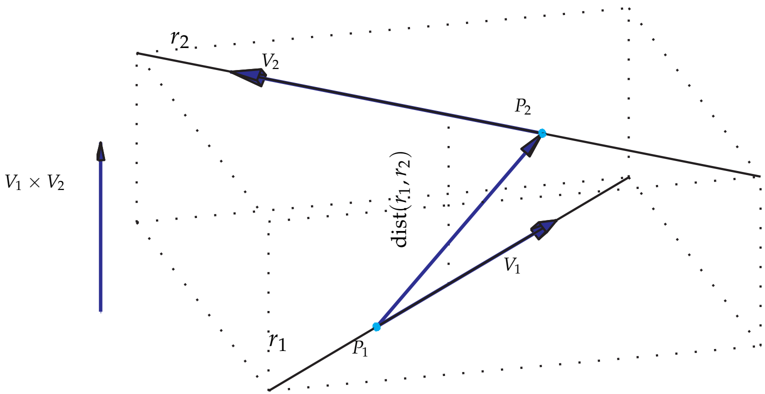


Figura 4.30 – Distância entre duas retas reversas

(b) Se **os vetores diretores não são paralelos**, então elas são reversas ou concorrentes. Os dois casos podem ser resolvidos da mesma forma. Estas retas definem dois planos paralelos (que podem ser coincidentes, no caso em que elas são concorrentes). Um é o plano que contém r_1 e é paralelo a r_2, vamos chamá-lo de π_1. O outro, contém r_2 e é paralelo a r_1, π_2. O vetor $N = V_1 \times V_2$, é normal (ou perpendicular) a ambos os planos, em que V_1 e V_2 são os vetores diretores de r_1 e r_2 respectivamente. Assim, a distância entre as retas é igual à distância entre estes dois planos (Figura 4.30), ou seja,

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{||N||} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2)|}{||V_1 \times V_2||} \tag{4.12}$$

em que P_1 e P_2 são pontos de r_1 e r_2 e V_1 e V_2 são vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente. Observe que se as retas são concorrentes a distância entre elas é zero, pois os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, V_1 e V_2 são coplanares e $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0$ (Corolário 3.9 na página 191).

Exemplo 4.14. Vamos determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-6}.$$

e

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

As retas são paralelas, pois seus vetores diretores $V_1 = (4, -2, -6)$ e $V_2 = (2, -1, -3)$ (Exemplo 4.5 na página 232) são paralelos (um é um múltiplo escalar do outro, ou ainda as componentes correspondentes são proporcionais). Além disso, o ponto $P_1 = (1, -1, 2)$ pertence à reta r_1. Como dissemos acima, a distância de r_1 a r_2 é igual à distância entre um ponto de r_2 e a reta r_1 (Figura 4.29). Assim, pela Proposição 4.5

na página 261, temos que

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, r_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2||}{||V_2||} = \sqrt{\frac{13}{14}}\,.$$

As contas são as mesmas do Exemplo 4.12 na página 262.

Exemplo 4.15. Determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z\,.$$

e

$$r_2 : \begin{cases} x &= t \\ y &= 2\,t \\ z &= 1-t \end{cases} \quad \text{para qualquer } t \in \mathbb{R}.$$

As retas r_1 e r_2 são paralelas aos vetores $V_1 = (3, 2, 1)$ e $V_2 = (1, 2, -1)$ e passam pelos pontos $P_1 = (-1, 1, 0)$ e $P_2 = (0, 0, 1)$, respectivamente. As retas não são paralelas, pois seus vetores diretores não são paralelos (observe que a 1ª componente de V_1 é 3 vezes a 1ª componente de V_2, mas as 2ª's componentes são iguais). Logo,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0-(-1), 0-1, 1-0) = (1, -1, 1)\,.$$

Um vetor perpendicular a ambas as retas é

$$N = V_1 \times V_2 = (-4, 4, 4)\,.$$

Este vetor é normal aos planos π_1 (que contém r_1 e é paralelo a r_2) e π_2 (que contém r_2 e é paralelo a r_1) (veja a Figura 4.30). Assim,

$$\begin{aligned} \text{dist}(r_1, r_2) &= \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot N|}{||N||} \\ &= \frac{|1(-4) + (-1)\cdot 4 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{|-4|}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,. \end{aligned}$$

Exercícios Numéricos (respostas na página 570)

4.2.1. Considere os vetores $V = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $W = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $U = \vec{i} - 2\vec{j}$. Seja π um plano paralelo aos vetores W e U e r uma reta perpendicular ao plano π. Ache a projeção ortogonal do vetor V sobre a reta r, ou seja, a projeção ortogonal de V sobre o vetor diretor da reta r.

4.2.2. Encontrar o ângulo entre o plano $2x - y + z = 0$ e o plano que passa pelo ponto $P = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

4.2.3. Seja π_1 o plano que passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ e π_2 o plano que passa pelos pontos $P = (0, 0, 1)$ e $Q = (0, 0, 0)$ e é paralelo ao vetor $\vec{i} + \vec{j}$. Ache o ângulo entre π_1 e π_2.

4.2.4. Ache uma reta que passa pelo ponto $(1, -2, 3)$ e que forma ângulos de 45º e 60º com os eixos x e y respectivamente.

4.2.5. Obtenha os vértices B e C do triângulo equilátero ABC, sendo $A = (1, 1, 0)$ e sabendo que o lado BC está contido na reta $r : (x, y, z) = t\,(0, 1, -1)$. (Sugestão: Determine os pontos P_r da reta r tais que $\overrightarrow{P_rA}$ faz ângulo de 60º e 120º com o vetor diretor da reta r)

4.2.6. Seja π o plano que passa pela origem e é perpendicular à reta que une os pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$. Encontre a distância do ponto $C = (1, 0, 1)$ ao plano π.

4.2.7. Seja r_1 a reta que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 2, 0)$, e r_2 a reta

$$x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}\,.$$

(a) Encontre as equações da reta perpendicular às retas r_1 e r_2;

(b) Calcule a distância entre r_1 e r_2.

4.2.8. Dados $A = (0, 2, 1)$, $r : X = (0, 2, -2) + t\,(1, -1, 2)$, ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A. A distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual à $\sqrt{3}$? Por que?

4.2.9. Dada a reta $r : X = (1,0,0) + t\,(1,1,1)$ e os pontos $A = (1,1,1)$ e $B = (0,0,1)$, ache o ponto de r equidistante de A e B.

4.2.10. Encontre a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes de $A = (1,-1,2)$ e $B = (4,3,1)$. Este plano passa pelo ponto médio de AB? Ele é perpendicular ao segmento AB?

4.2.11. Ache as equações dos planos em $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $(2,2,2)$, que distam $\sqrt{3}$ do ponto $(1,1,1)$.

4.2.12. Obtenha uma equação geral do plano π, que contém a reta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 5y & + & 7z & = & 0 \end{array} \right.$$

e forma com o plano $\pi_1 : x + z = 0$ um ângulo de 60^o.

4.2.13. (a) Verifique que a reta $r : (x,y,z) = (1,0,1) + t(1,-1,0)$ é paralela ao plano

$$\pi : x + y + z = 0.$$

(b) Calcule a distância de r a π.

(c) Existem retas contidas no plano π, que são reversas à reta r e distam 2 desta?

4.2.14. (a) Determine a equação do plano π_1 que passa por $A = (10/3, 1, -1)$, $B = (1, 9/2, -1)$ e $C = (1, -1, 5/6)$.

(b) Determine a equação do plano π_2 que passa por $D = (-1,4,-1)$, $E = (3/2, -1, 10)$ e é paralelo ao eixo z.

(c) Escreva equações paramétricas para a reta r interseção dos planos π_1 e π_2.

(d) Faça um esboço dos planos π_1, π_2 e da reta r no primeiro octante.

(e) Qual o ângulo entre os planos π_1 e π_2?

(f) Qual o ponto P de π_1 que está mais próximo da origem? (Sugestão: este ponto é tal que $\overrightarrow{OP}$ é ortogonal ao plano π_1.)

(g) Qual a área do triângulo ABC?

Exercícios usando o MATLAB®

4.2.15. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

4.2.16. Prove que o lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de dois pontos distintos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é um plano que passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular a ele. Esse plano é chamado **plano mediador** do segmento AB.

4.2.17. Mostre que a distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ é

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4.2.18. Mostre que a distância entre dois planos paralelos $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ e $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4.2.19. Mostre que a distância entre duas retas não paralelas $r_1 : (x, y, z) = (x_1 + ta_1, y_1 + tb_1, z_1 + tc_1)$ e $r_2 : (x, y, z) = (x_2 + ta_2, y_2 + tb_2, z_2 + tc_2)$ é

$$\frac{\left|\det\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}\right|}{\sqrt{\left(\det\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)^2}}$$

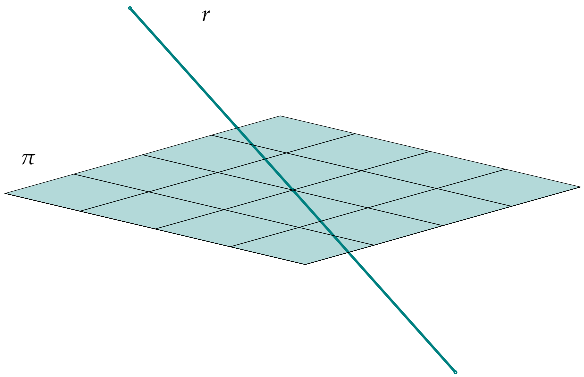


Figura 4.31 – Reta e plano concorrentes

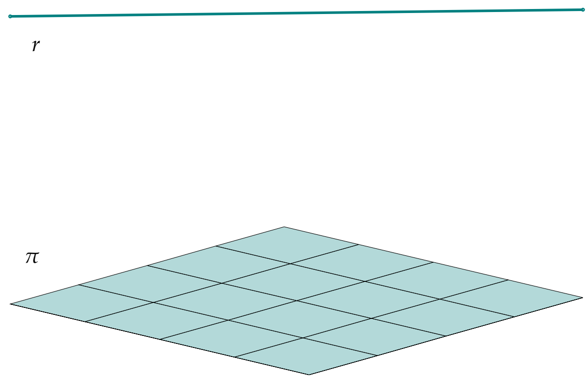


Figura 4.32 – Reta e plano paralelos

4.2.20. O ângulo entre uma reta r que tem vetor diretor $V = (a_r, b_r, c_r)$ e um plano π que tem vetor normal $N = (a_\pi, b_\pi, c_\pi)$ é definido pelo complementar do ângulo entre uma reta perpendicular ao plano π e a reta r. Mostre que

$$\text{sen}(r, \pi) = \frac{|N \cdot V|}{||N||||V||}.$$

4.2.21. A distância entre uma reta r que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor diretor $V = (a_r, b_r, c_r)$ e um plano $\pi : a_\pi x + b_\pi y + c_\pi z + d_\pi = 0$ é definida como a menor distância entre dois pontos um de r e outro de π. Se o vetor diretor da reta r, $V = (a_r, b_r, c_r)$, não é ortogonal ao vetor normal do plano π, $N = (a_\pi, b_\pi, c_\pi)$, então a reta e o plano são concorrentes e a distância entre eles é igual à zero, caso contrário a distância é igual à distância de uma ponto da reta r ao plano π. Mostre que

$$\text{dist}(r, \pi) = \begin{cases} \dfrac{|a_\pi x_0 + b_\pi y_0 + c_\pi z_0 + d_\pi|}{\sqrt{a_\pi^2 + b_\pi^2 + c_\pi^2}}, & \text{se } V \cdot N = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

4.3 Posições Relativas de Retas e Planos

Posições Relativas de Duas Retas

Consideremos duas retas quaisquer $r_1 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + tV_1$ e $r_2 : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + tV_2$. Para estudar a posição relativa destas retas, vamos dividir em dois casos:

(a) Se os **vetores diretores são paralelos**, então as retas são paralelas ou coincidentes (Figura 4.29 na página 265). Além de paralelas, elas são coincidentes se, e somente se, um ponto de uma reta pertence a outra reta. Portanto, se, e somente se, $\overrightarrow{P_1P_2}$ é paralelo a V_1 (e a V_2, pois V_1 e V_2 são paralelos).

(b) Se os **vetores diretores não são paralelos**, então as retas são reversas ou concorrentes (Figura 4.30 na página 267).

   i. Se os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, V_1 e V_2 são coplanares, ou seja, se $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0$ (Corolário 3.9 na página 191), então as retas são concorrentes.

   ii. Se os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, V_1 e V_2 **não** são coplanares, ou seja, se $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) \neq 0$ (Corolário 3.9 na página 191), então as retas são reversas.

Posições Relativas de Dois Planos

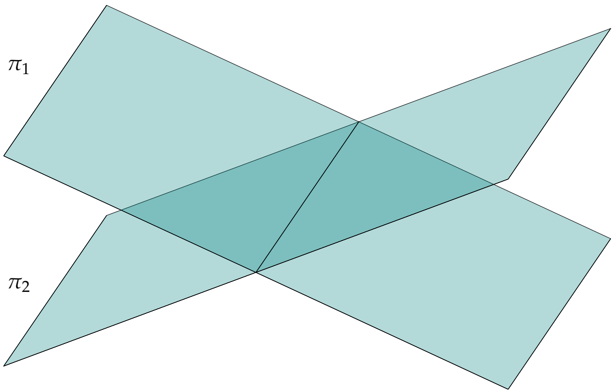


Figura 4.33 – Dois planos que se interceptam

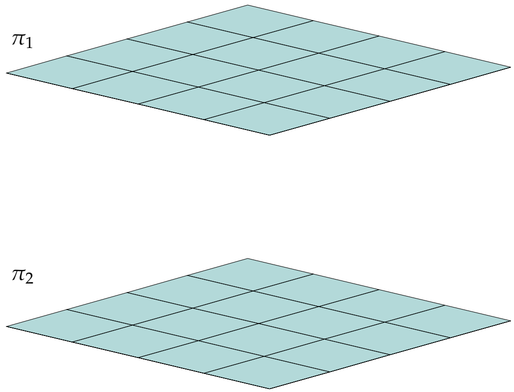


Figura 4.34 – Dois planos paralelos

Sejam dois planos $\pi_1 : \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ quaisquer.

(a) Se os seus **vetores normais** $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ **e** $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ **não são paralelos**, então os planos são concorrentes (Figura 4.33).

(b) Se os seus **vetores normais são paralelos**, ou seja, se $N_2 = \alpha N_1$, então os planos são paralelos distintos (Figura 4.34) ou coincidentes. Além de paralelos, eles são coincidentes se, e somente se, todo ponto que satisfaz a equação de π_1, satisfaz também a equação de π_2.

Assim, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = \alpha a_1x + \alpha b_1y + \alpha c_1z + d_2 = \alpha(a_1x + b_1y + c_1z) + d_2 = \alpha(-d_1) + d_2 = 0$. Portanto, $d_2 = \alpha d_1$ e as equações de π_1 e π_2 são proporcionais. Reciprocamente, se as equações de π_1 e π_2 são proporcionais, então claramente os dois planos são coincidentes. Portanto, dois planos são coincidentes se, e somente se, além dos vetores normais serem paralelos, as suas equações são proporcionais.

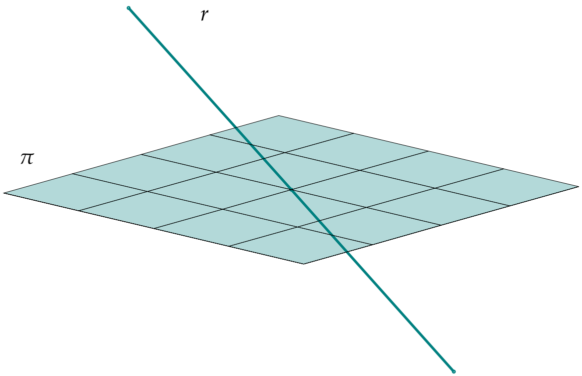


Figura 4.35 – Reta e plano concorrentes

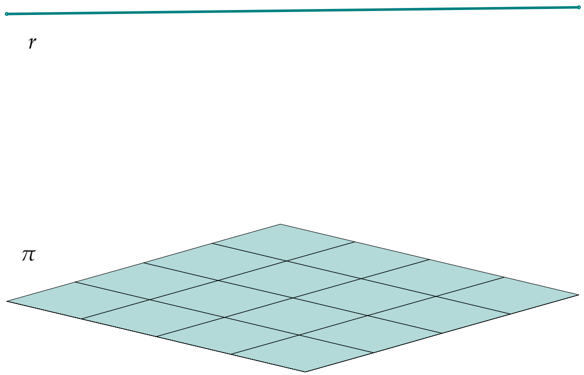


Figura 4.36 – Reta e plano paralelos

Posições Relativas de Reta e Plano

Sejam a reta $r : (x, y, z) = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + tV$ e o plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.

(a) Se o **vetor diretor da reta** r**,** V**, e o vetor normal do plano** π**,** $N = (a, b, c)$**, são ortogonais** ($V \cdot N = 0$), então a reta e o plano são paralelos.

Se além dos vetores V e N serem ortogonais, um ponto qualquer da reta pertence ao plano, por exemplo, se P_0 pertence a π (P_0 satisfaz a equação de π), então a reta está contida no plano.

(b) Se o **vetor diretor da reta** r**,** V**, e o vetor normal do plano** π**,** $N = (a, b, c)$**, não são ortogonais** ($V \cdot N \neq 0$), então a reta é concorrente ao plano.

Posições Relativas de Três Planos

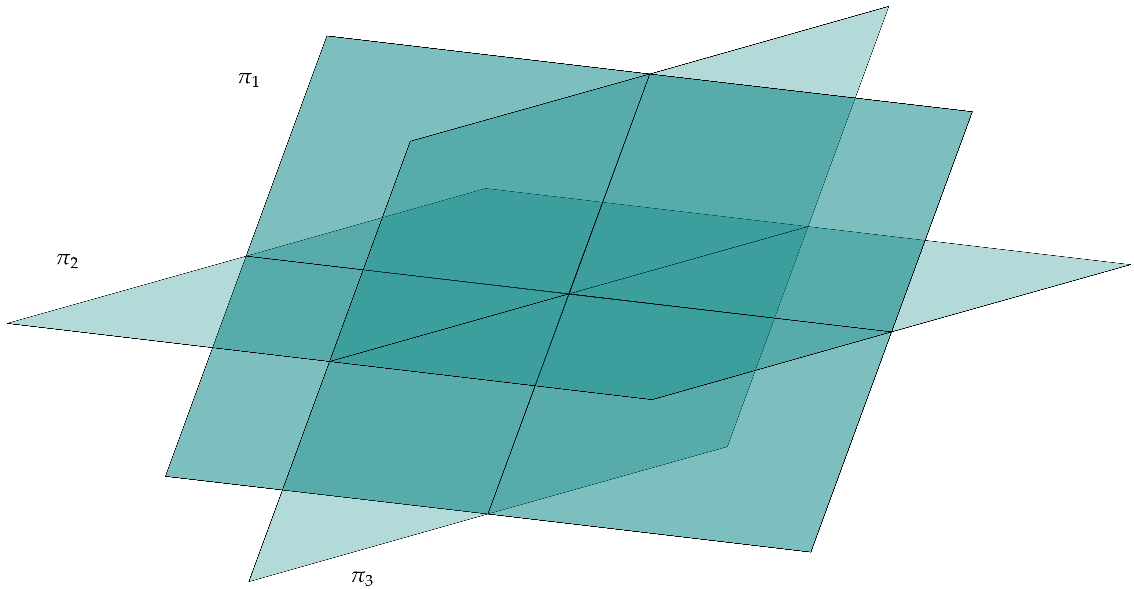


Figura 4.37 – Três planos que se interceptam segundo um ponto

Consideremos três planos π_1, π_2, e π_3 dados pelas equações:

$$\left\{\begin{array}{ll} \pi_1: & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \pi_2: & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \pi_3: & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}\right. \tag{4.13}$$

Os vetores $N_i = (a_i, b_i, c_i)$ são normais aos planos π_i, para $i = 1,2,3$. Os três vetores são coplanares ou não são coplanares.

(a) Se os vetores N_1, N_2 e N_3 **não** são coplanares, então vamos mostrar que os planos se interceptam dois a dois segundo retas que se interceptam em um ponto. As retas $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e $s = \pi_1 \cap \pi_3$ estão no plano π_1. Vamos mostrar que elas são concorrentes. Sejam A e B dois pontos distintos da reta r. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é perpendicular a N_1 e a N_2. Se as retas r e s fossem paralelas, então $\overrightarrow{AB}$ seria perpendicular também a N_3, ou seja, $\overrightarrow{AB}$ seria perpendicular a três vetores não coplanares o que implicaria que $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Os vetores N_1, N_2 e N_3 não são coplanares se, e somente se,

$$\det(A) \neq 0,$$

em que $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$. Neste caso o sistema tem solução única (Figura 4.37).

(b) Se os três vetores normais são coplanares, então pode ocorrer uma das seguintes situações:

i. Os vetores normais são paralelos, ou seja, $N_1 = \alpha N_2$, $N_1 = \beta N_3$ e $N_2 = \gamma N_3$. Neste caso, os planos são paralelos.
Se além disso, exatamente duas das equações são proporcionais, então exatamente dois planos são coincidentes e o sistema não tem solução. Se as três equações são proporcionais, então os três planos são coincidentes e o

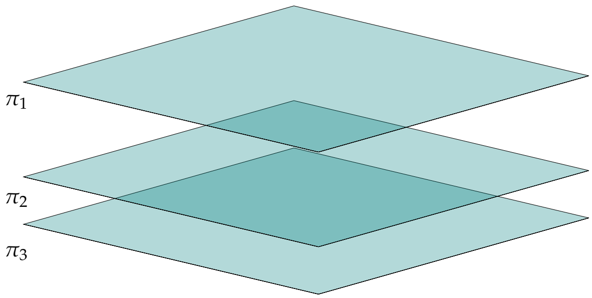


Figura 4.38 – Três planos paralelos

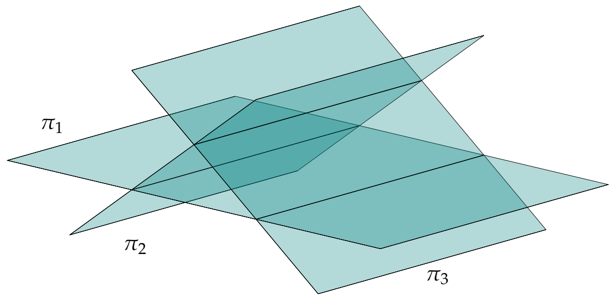


Figura 4.39 – Planos interceptando-se 2 a 2

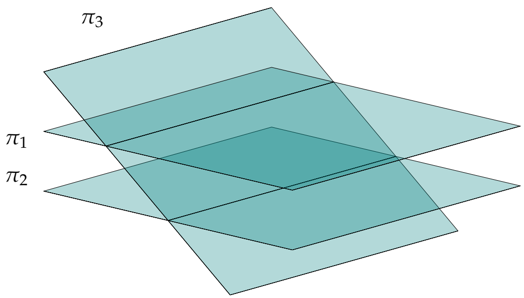


Figura 4.40 – Três planos, sendo 2 paralelos

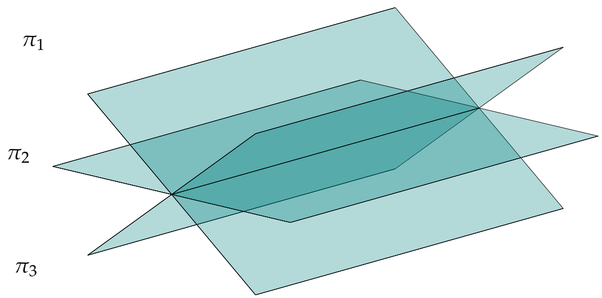


Figura 4.41 – Reta interseção de 3 planos

sistema tem infinitas soluções. Se não ocorre nenhuma destas situações, os planos são paralelos e distintos e o sistema não tem solução (Figura 4.38).

ii. Exatamente dois vetores normais são paralelos, ou seja, vale uma, e somente uma, equação entre: $N_1 = \alpha N_2$, $N_1 = \alpha N_3$, $N_2 = \alpha N_3$. Neste caso, exatamente dois planos são paralelos.
Se além de exatamente dois vetores normais serem paralelos, as equações correspondentes forem proporcionais, então dois planos são coincidentes e o terceiro corta os dois segundo uma reta. Neste caso o sistema tem infinitas soluções. Se isto não acontece, então os planos paralelos são distintos e o sistema não tem solução (Figura 4.40).

iii. Os vetores normais são coplanares e quaisquer dois vetores normais não são paralelos, ou seja, $\det(A) = 0$ e quaisquer dois vetores normais não são múltiplos escalares. Neste caso, quaisquer dois planos se interceptam segundo retas que são paralelas. Com estas condições podem ocorrer dois casos: **os três planos se interceptem segundo uma reta**, (Figura 4.41) ou **os planos se interceptem, dois a dois, segundo retas distintas** (Figura 4.39). No primeiro caso, o sistema (4.13) tem infinitas soluções. No segundo caso, o sistema não tem solução.

Exercícios Numéricos (respostas na página 576)

4.3.1. (a) Determine as equações da reta r que é a interseção dos planos:

$$\pi_1 : x - 2y + 2z = 0$$
$$\pi_2 : 3x - 5y + 7z = 0.$$

(b) Qual a posição relativa da reta r e do plano $y + z = 0$.

4.3.2. Determine a posição relativa das retas r e s

$$r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, 2, 1), \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$s : (x, y, z) = t(1, 1, 0), \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

4.3.3. Sejam $r_1 : (x, y, z) = (1, 0, 2) + (2t, t, 3t)$ e $r_2 : (x, y, z) = (0, 1, -1) + (t, mt, 2mt)$ duas retas.

(a) Determine m para que as retas sejam coplanares (não sejam reversas).

(b) Para o valor de m encontrado, determine a posição relativa entre r_1 e r_2.

(c) Determine a equação do plano determinado por r_1 e r_2.

4.3.4. Sejam a reta $r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + (2t, mt, t)$ e o plano $\pi : 2x - y - 2z = 0$. Determine o valor de m para que a reta seja paralela ao plano. Para o valor de m encontrado a reta está contida no plano?

4.3.5. Dê a posição relativa dos seguintes ternos de planos:

(a) $2x + y + z = 1$, $x + 3y + z = 2$, $x + y + 4z = 3$.

(b) $x - 2y + z = 0$, $2x - 4y + 2z = 1$, $x + y = 0$.

(c) $2x - y + z = 3$, $3x - 2y - z = -1$, $2x - y + 3z = 7$.

(d) $3x + 2y - z = 8$, $2x - 5y + 2z = -3$, $x - y + z = 1$.

(e) $2x - y + 3z = -2$, $3x + y + 2z = 4$, $4x - 2y + 6z = 3$.

(f) $-4x + 2y - 4z = 6$, $3x + y + 2z = 2$, $2x - y + 2z = -3$.

(g) $6x - 3y + 9z = 3$, $4x - 2y + 6z = 5$, $2x - y + 3z = 2$.

(h) $x - 2y + 3z = 2$, $3x + y - 2z = 1$, $5x - 3y + 4z = 4$.

Teste do Capítulo

---

1. Ache os pontos do plano $\pi : y = x$ que equidistam dos pontos $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$.

---

2. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 0)$ em relação à reta $r : \ (x, y, z) = t(1, 1, 1)$?

---

3. (a) Encontre a equação do plano π que passa pelos pontos $A = (0, 0, -1)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (1, 0, 1)$.
   (b) Encontre a distância da origem ao plano π.

---

4. (a) Mostre que os planos $x - y = 0$ e $y - z = 1$ se interceptam segundo uma reta r.
   (b) Ache a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 0, -1)$ e é perpendicular à reta r.

5

Seções Cônicas

Uma **cônica** no plano é definida como o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ que satisfazem a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

em que a, b, c, d, e e f são números reais, com a, b e c não simultaneamente nulos. Vamos estudar a elipse, a hipérbole e a parábola, que são chamadas **cônicas não degeneradas**. As outras que incluem um único ponto e um par de retas são chamadas **cônicas degeneradas**. Como veremos adiante as cônicas não degeneradas podem ser obtidas da interseção de um cone circular com um plano.

Vamos definir as cônicas como conjunto de pontos que satisfazem certas propriedades e determinar as equações na forma mais simples possível.

5.1 Cônicas Não Degeneradas

5.1.1 Elipse

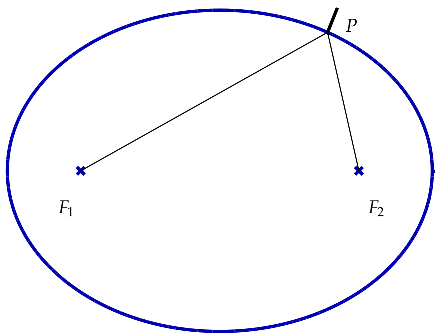


Figura 5.1 – Elipse que é o conjunto dos pontos P tais que $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$

Definição 5.1. A **elipse** é o conjunto dos pontos P no plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante, ou seja, se $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$, então a elipse é o conjunto dos pontos P tais que

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a, \quad \text{em que } a > c.$$

A elipse pode ser desenhada se fixarmos as extremidades de um barbante de comprimento $2a$ nos focos e esticarmos o barbante com uma caneta. Movimentando-se a caneta, mantendo o barbante esticado, a elipse será traçada (Figura 5.1).

Proposição 5.1. *(a) A equação da* ***elipse*** *cujos focos são* $F_1 = (-c, 0)$ *e* $F_2 = (c, 0)$ *é*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.1}$$

(b) A equação da ***elipse*** *cujos focos são* $F_1 = (0, -c)$ *e* $F_2 = (0, c)$ *é*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{5.2}$$

Em ambos os casos $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

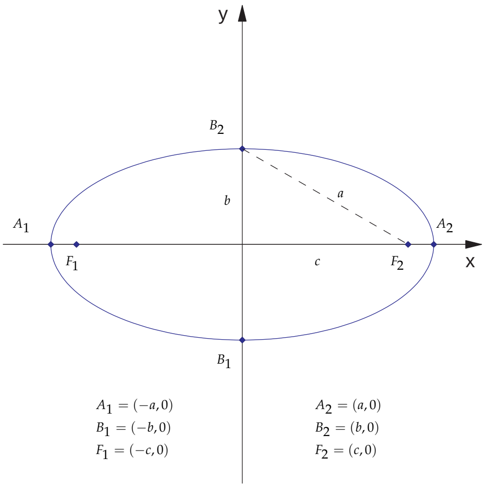


Figura 5.2 – Elipse com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

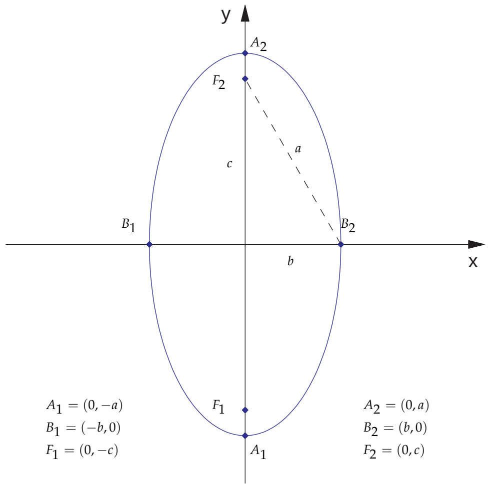


Figura 5.3 – Elipse com focos nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A elipse é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\mathrm{dist}(P, F_1) + \mathrm{dist}(P, F_2) = 2a,$$

ou seja,

$$||\overrightarrow{F_1P}|| + ||\overrightarrow{F_1P}|| = 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\,.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c$, então $a^2 - c^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e dividir e equação acima por $a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$, obtendo (5.1). ■

Nas Figuras 5.2 e 5.3, os pontos A_1 e A_2 são chamados **vértices da elipse**. Os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são chamados **eixos da elipse**.

A **excentricidade** da elipse é o número $e = \dfrac{c}{a}$. Como, $c < a$, a excentricidade de uma elipse é um número real não negativo menor que 1. Observe que se $F_1 = F_2$, então a elipse reduz-se ao **círculo** de raio a. Além disso, como $c = 0$, então $e = 0$. Assim, um círculo é uma elipse de excentricidade nula.

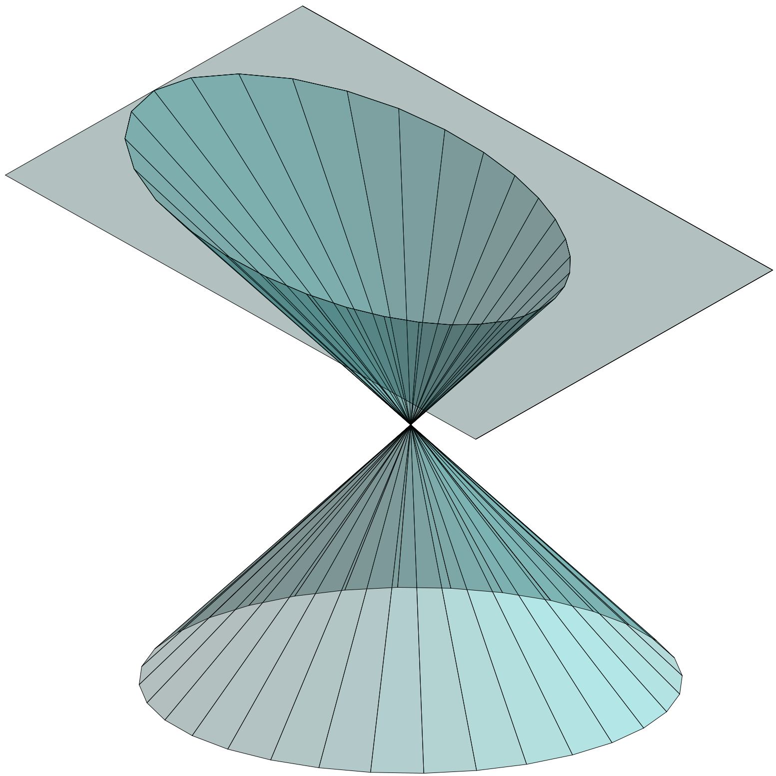


Figura 5.4 – Elipse obtida seccionando-se um cone com um plano

A elipse é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma **reta geratriz** (reta que gira em torno do eixo do cone de forma a gerá-lo) e que corta apenas uma das folhas da superfície (a demonstração deste fato está no Exercício 7.3.11 na página 505).

A elipse tem a propriedade de refletir os raios vindos de um dos focos na direção do outro foco (a demonstração deste fato está no Exercício 5.2.12 na página 351). Este fato é usado na construção de espelhos para dentistas e para escaneres.

Os planetas possuem órbitas elípticas em torno do Sol, assim como os satélites em torno dos planetas. A excentricidade da órbita da Terra em torno do Sol é 0,017. Da Lua em volta da Terra é 0,055. Netuno é o planeta, cuja órbita, tem a menor excentricidade do sistema solar, que é 0,005. Mercúrio tem a órbita de maior, e é 0,206. Triton, que é a maior lua de Netuno é o corpo, cuja órbita tem a menor excentricidade do sistema solar, que é de 0,00002. O cometa Halley tem uma órbita elíptica em torno do sol com excentricidade 0,967. O coliseu de Roma tem a base elíptica com eixo maior igual à 94 metros e eixo menor igual à 78 metros.

5.1.2 Hipérbole

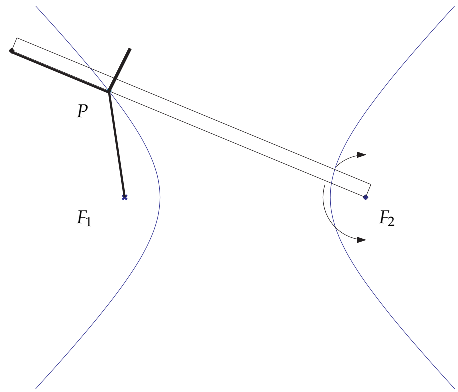


Figura 5.5 – Hipérbole que é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $|\,\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a$

Definição 5.2. A **hipérbole** é o conjunto dos pontos P no plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (**focos**) é constante, ou seja, se $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$, então a hipérbole é o conjunto dos pontos P tais que

$$|\,\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a,$$

em que $a < c$.

Podemos desenhar uma parte de um ramo da hipérbole da seguinte forma. Fixamos uma extremidade de uma régua em um dos focos, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao comprimento da régua menos $2a$) na outra ponta da régua e a outra extremidade do barbante no outro foco. Esticamos o barbante com uma caneta de forma que ela fique encostada na régua. Girando-se a régua em torno do foco no qual ela foi fixada, mantendo o barbante esticado com a caneta encostada na régua, uma parte de um ramo da hipérbole será traçada (Figura 5.5).

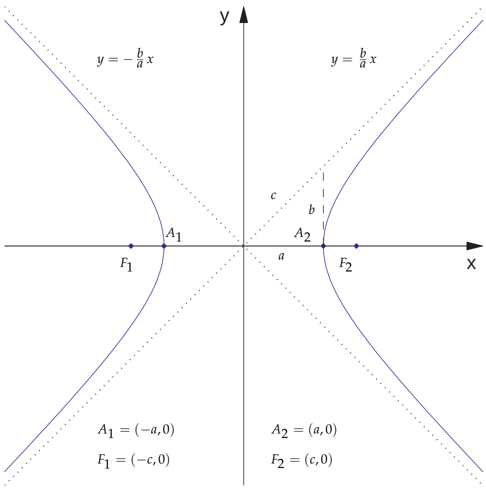


Figura 5.6 – Hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

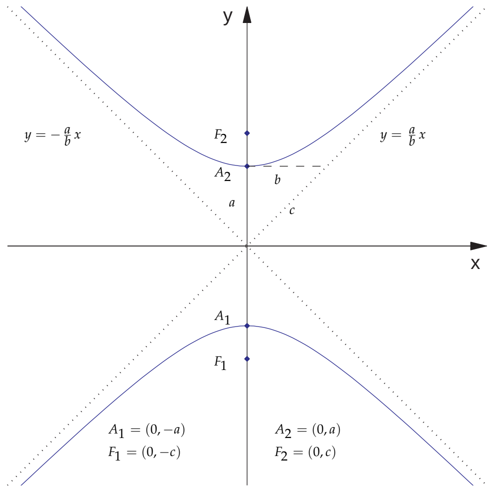


Figura 5.7 – Hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$

Proposição 5.2. *(a) A equação da **hipérbole** cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.3}$$

*e das **assíntotas** (retas para onde a curva se aproxima, quando $x \to \pm\infty$) são*

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

*(b) A equação da **hipérbole** cujos focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ é*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{5.4}$$

e das assíntotas são

$$x = \pm \frac{a}{b} y.$$

Em ambos os casos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A hipérbole é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2) = \pm 2a,$$

ou seja,

$$|| \overrightarrow{F_1P} || - || \overrightarrow{F_2P} || = \pm 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx\,.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Como $a < c$, então $c^2 - a^2 > 0$. Assim, podemos definir $b = \sqrt{c^2-a^2}$ e dividir e equação acima por $-a^2b^2 = a^2(a^2-c^2)$, obtendo (5.3).

Se a equação (5.3) é resolvida em y obtemos $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ que, para $x > 0$, pode ser escrita como

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

Para $x > 0$ muito grande, o radical no segundo membro é próximo de 1 e a equação se aproxima de

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

O mesmo ocorre para $x < 0$ muito grande em módulo (verifique!).

■

Nas Figuras 5.6 e 5.7, os pontos A_1 e A_2 são chamados **vértices da hipérbole**. A **excentricidade** da hipérbole é o número $e = \dfrac{c}{a}$. Como, $c > a$, a excentricidade de uma hipérbole é um número real maior que 1.

A hipérbole é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma reta geratriz e que corta as duas folhas da superfície (a demonstração deste fato está no Exercício 7.3.11 na página 505).

A hipérbole tem a propriedade de refletir os raios vindos na direção de um dos focos na direção do outro foco (a demonstração deste fato está no Exercício 5.2.13 na página 355). Este fato é usado na construção de espelhos para telescópios e para máquinas fotográficas.
O cometa C/1980 E1 foi descoberto em 1980 e está deixando o sistema solar numa trajetória hiperbólica com a maior velocidade já observada em um corpo no sistema solar.

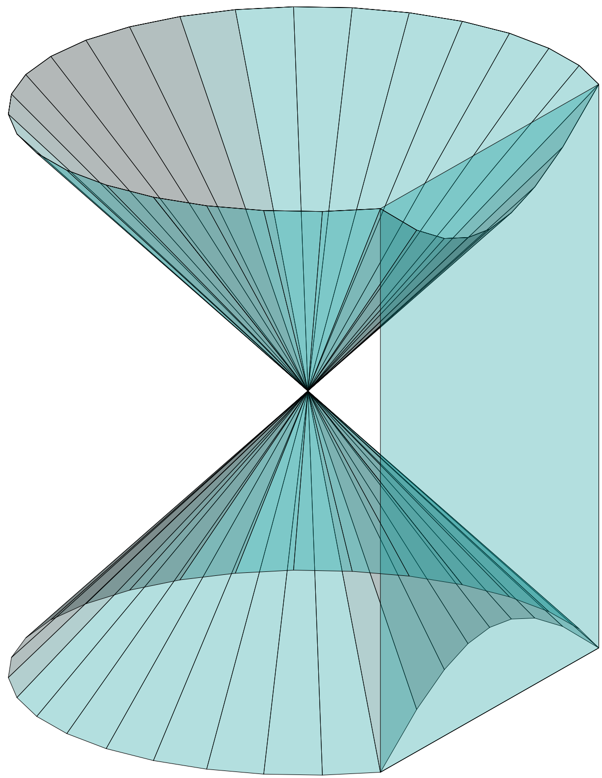


Figura 5.8 – Hipérbole obtida seccionando-se um cone com um plano

5.1.3 Parábola

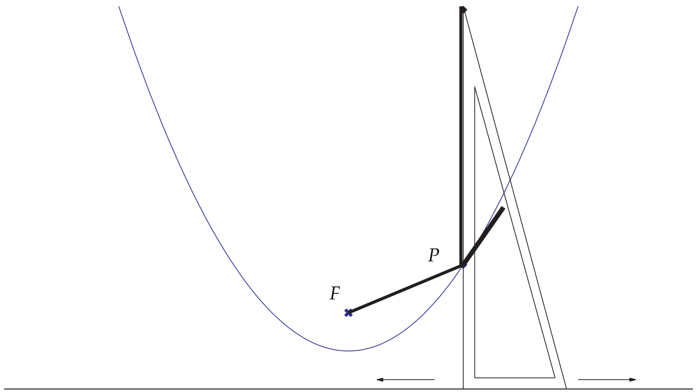


Figura 5.9 – Parábola que é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)$

Definição 5.3. Uma **parábola** é o conjunto dos pontos P no plano equidistantes de uma reta r (**diretriz**) e de um ponto F (**foco**), não pertencente a r, ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos P tais que

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r).$$

Podemos desenhar uma parte de uma parábola da seguinte forma. Colocamos um esquadro com um lado cateto encostado na reta diretriz, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao lado cateto do esquadro perpendicular à reta diretriz) no foco, a outra extremidade na ponta do esquadro oposta ao lado que está encostado na reta diretriz. Esticamos o barbante com a caneta de forma que ela fique encostada no lado do esquadro perpendicular à reta diretriz. Deslizando-se o esquadro na direção da reta diretriz mantendo o lado encostado nela uma parte da parábola é traçada (Figura 5.9).

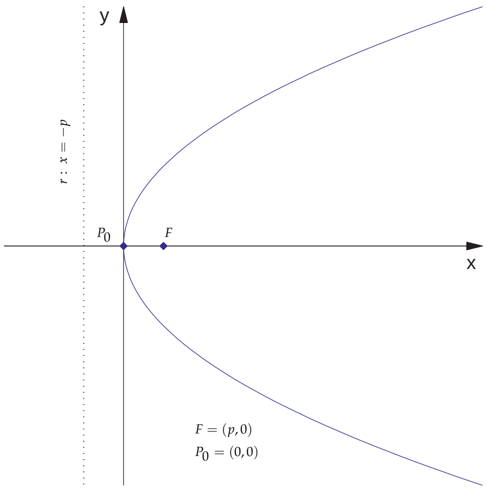


Figura 5.10 – Parábola com foco no ponto $F = (p, 0)$ e $p > 0$

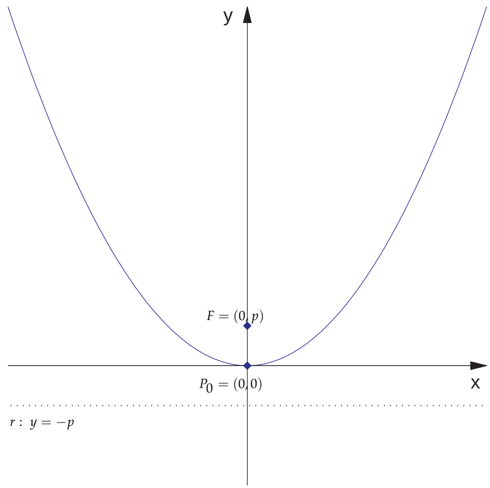


Figura 5.11 – Parábola com foco no ponto $F = (0, p)$ e $p > 0$

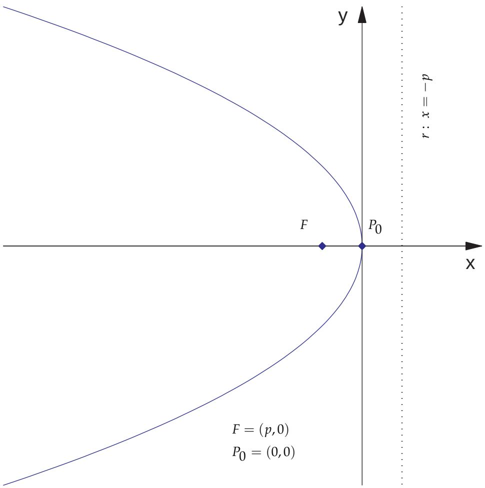


Figura 5.12 – Parábola com foco no ponto $F = (p, 0)$ e $p < 0$

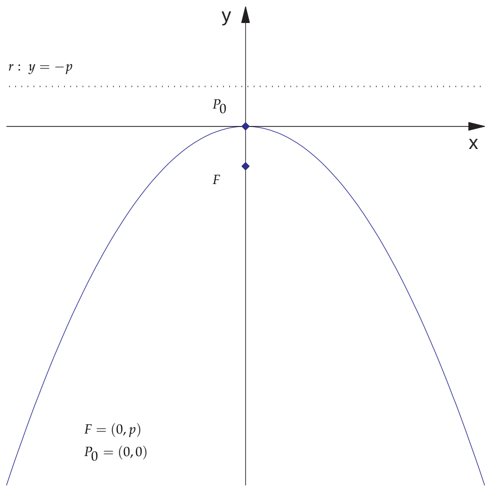


Figura 5.13 – Parábola com foco no ponto $F = (0, p)$ e $p < 0$

Proposição 5.3. (a) *A equação da* ***parábola*** *com foco* $F = (p, 0)$ *e reta diretriz* $r: \ x = -p$ *é*

$$y^2 = 4px\,. \tag{5.5}$$

(b) *A equação de uma* ***parábola*** *com foco* $F = (0, p)$ *e reta diretriz* $r: \ y = -p$ *é*

$$x^2 = 4py\,. \tag{5.6}$$

Demonstração. Vamos provar a primeira parte e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da segunda parte. A parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)\,,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|\,,$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos (5.5). ■

Nas Figuras 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13, o ponto P_0 é o ponto da parábola mais próximo da reta diretriz e é chamado de **vértice da parábola**. A parábola é a curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo a uma **reta geratriz do cone** conforme a Figura 5.14 (a demonstração deste fato está no Exercício 7.3.11 na página 505).

A parábola tem a propriedade de refletir os raios vindos do foco na direção do seu eixo (a demonstração deste fato está no Exercício 5.2.12 na página 316). Este fato é usado na construção de faróis e lanternas. Também, naturalmente, reflete na direção do foco os raios que incidem paralelos ao eixo de simetria, fato usado na construção de antenas receptoras.

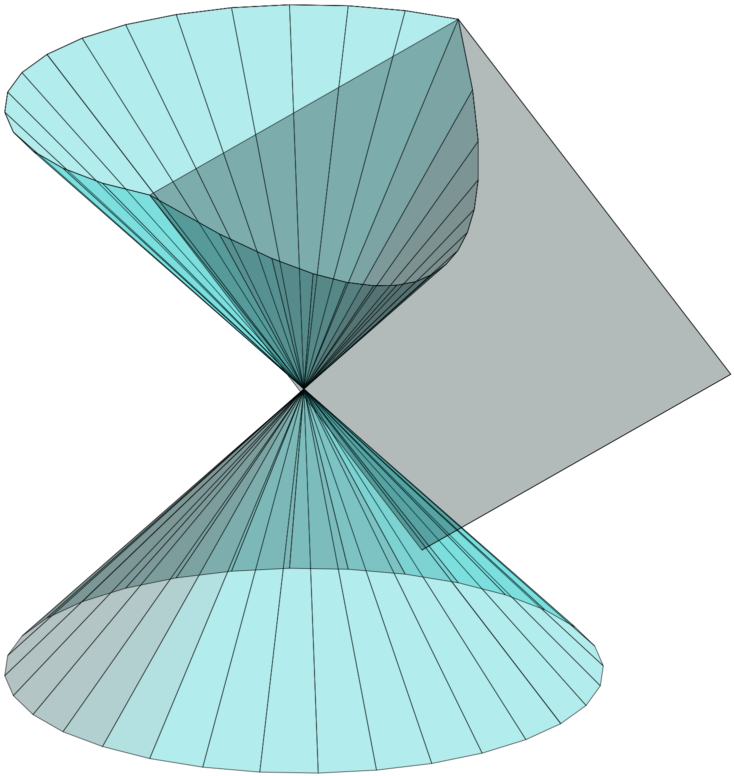


Figura 5.14 – Parábola obtida seccionando-se um cone com um plano

5.1.4 Caracterização das Cônicas

Vamos mostrar a seguir que todas as cônicas não degeneradas, com exceção da circunferência, podem ser descritas de uma mesma maneira.

Proposição 5.4. *Seja s uma reta fixa (**diretriz**) e F um ponto fixo (**foco**) não pertencente a s. O conjunto dos pontos do plano $P = (x, y)$ tais que*

$$\text{dist}(P, F) = e\ \text{dist}(P, s), \tag{5.7}$$

em que $e > 0$ é uma constante fixa, é uma cônica.

(a) *Se $e = 1$, então a cônica é uma parábola.*

(b) *Se $0 < e < 1$, então a cônica é uma elipse.*

(c) *Se $e > 1$, então a cônica é uma hipérbole.*

Reciprocamente, toda cônica que não seja uma circunferência pode ser descrita por uma equação da forma (5.7).

Demonstração. Se $e = 1$, a equação (5.7) é a própria definição da parábola. Vamos considerar o caso em que $e > 0$, com $e \neq 1$. Seja $d = \text{dist}(F, s)$. Sem perda de generalidade podemos tomar o foco como sendo o ponto $F = (p, 0)$ e a diretriz como sendo a reta vertical $s : x = \dfrac{p}{e^2}$, em que $p = \frac{de^2}{1-e^2}$ se a reta s estiver à direita do foco F (Figuras 5.15 e 5.16) e $p = \frac{de^2}{e^2-1}$ se a reta s estiver à esquerda do foco F (Figuras 5.17 e 5.18).
Assim, o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F) = e\ \text{dist}(P, s)\,,$$

pode ser descrito como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e \left| x - \frac{p}{e^2} \right| ,$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = p^2 \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right)$$

que pode ainda ser escrito como

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{e^2}} = 1. \tag{5.8}$$

Se $0 < e < 1$, esta é a equação de uma elipse. Se $e > 1$, é a equação de uma hipérbole. Para mostrar a recíproca, considere uma elipse ou hipérbole com excentricidade $e > 0$ e um dos focos em $F = (p, 0)$. É fácil verificar que (5.8) é a equação desta cônica e portanto (5.7) também o é, com a reta diretriz sendo $s : x = \dfrac{p}{e^2}$. ■

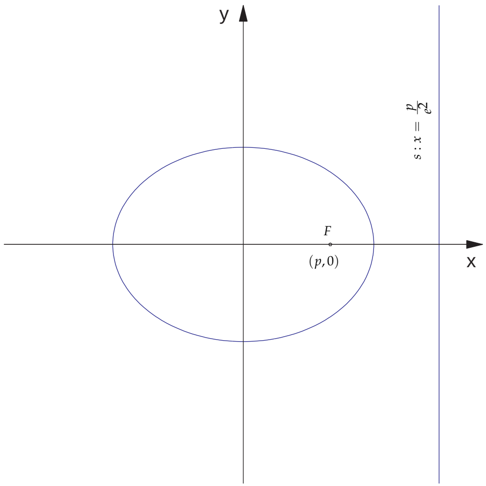


Figura 5.15 – Elipse, um de seus focos e a reta diretriz à direita

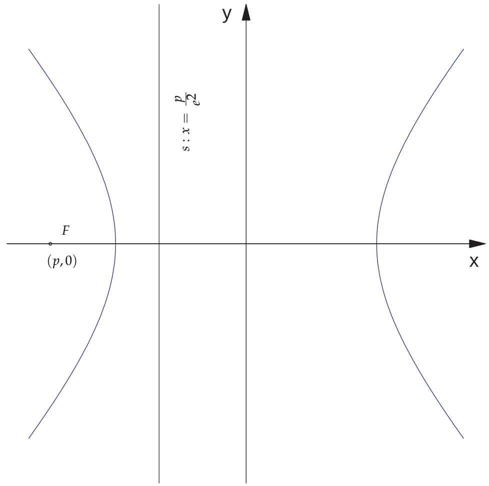


Figura 5.16 – Hipérbole, um de seus focos e a reta diretriz à direita

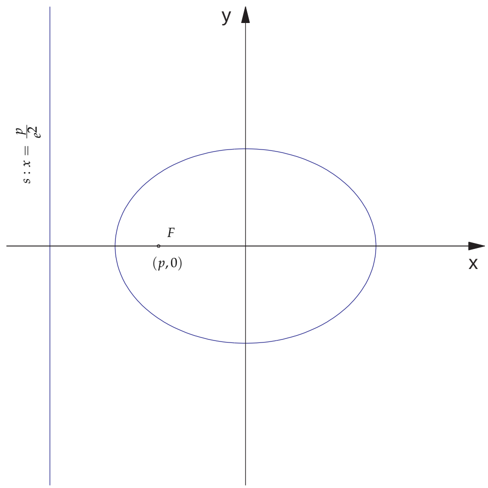


Figura 5.17 – Elipse, um de seus focos e a reta diretriz à esquerda

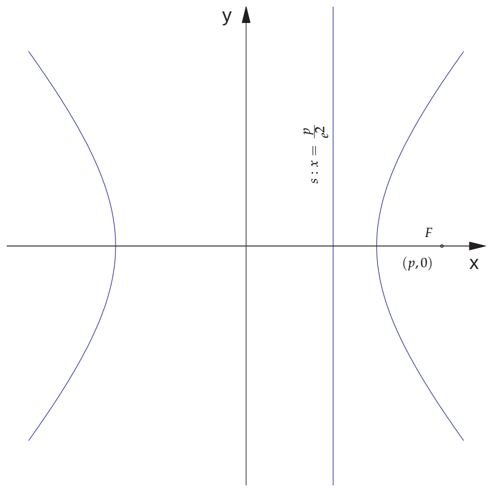


Figura 5.18 – Hipérbole, um de seus focos e a reta diretriz à esquerda

Exercícios Numéricos (respostas na página 580)

5.1.1. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a cônica que ela representa e faça um esboço do seu gráfico:

(a) $4x^2 + 2y^2 = 1$

(b) $x^2 + y = 0$

(c) $x^2 - 9y^2 = 9$

5.1.2. Escreva as equações das seguintes elipses:

(a) Os focos são $F_1 = (-1, 2)$ e $F_2 = (3, 2)$ e satisfaz $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 6$;

(b) Os focos são $F_1 = (-1, -1)$ e $F_2 = (1, 1)$ e satisfaz $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 4$;

5.1.3. Escreva as equações das seguintes hipérboles:

(a) Os focos são $F_1 = (3, -1)$ e $F_2 = (3, 4)$ e satisfaz $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 3$;

(b) Os focos são $F_1 = (-1, -1)$ e $F_2 = (1, 1)$ e satisfaz $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2$;

5.1.4. Escreva as equações das seguintes parábolas:

(a) O foco é $F = (0, 2)$ e diretriz $y = -2$;

(b) O foco é $F = (0, 0)$ e diretriz $x + y = 2$;

5.1.5. Determinar a equação e identificar a trajetória de um ponto que se move de maneira que sua distância ao ponto $F = (6, 0)$ é sempre igual à duas vezes sua distância a reta $2x - 3 = 0$.

5.1.6. Determinar a equação e identificar a trajetória de um ponto que se move de maneira que sua distância ao eixo y é sempre igual à duas vezes sua distância ao ponto $F = (3, 2)$.

Exercícios Teóricos

5.1.7. Mostre que a equação da elipse com focos nos pontos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ e satisfaz

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a, \quad \text{em que } a > c$$

é

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

5.1.8. Mostre que a equação da hipérbole com focos nos pontos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ e satisfaz

$$|\,\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a, \quad \text{em que } a < c$$

é

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

5.1.9. Mostre que a equação da parábola com foco no ponto $F = (x_0 + p, y_0)$ e reta diretriz $r: \ x = x_0 - p$ é

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

5.1.10. Seja uma elipse ou hipérbole com focos em $F_1 = (p, 0)$ e $F_2 = (-p, 0)$.

(a) Mostre que

$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{e^2}} = 1$$

é a equação desta cônica, em que e é a excentricidade.

(b) Definindo a reta $r : x = \dfrac{p}{e^2}$, Mostre que esta cônica pode ser descrita pelo conjunto de pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\text{dist}(P, F) = e\ \text{dist}(P, r).$$

5.1.11. (a) Verifique que com o procedimento abaixo realmente desenhamos uma parte de um ramo de uma hipérbole. Fixamos uma extremidade de uma régua em um dos focos, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao comprimento da régua menos $2a$) na outra ponta da régua e a outra extremidade do barbante no outro foco. Esticamos o barbante com uma caneta de forma que ela fique encostada na régua. Girando-se a régua em torno do foco no qual ela foi fixada, mantendo o barbante esticado com a caneta encostada na régua, uma parte de um ramo da hipérbole será traçada (Figura 5.5 na página 296).

(b) Verifique que com o procedimento abaixo realmente desenhamos uma parte de um ramo de uma parábola. Colocamos um esquadro com um lado cateto encostado na reta diretriz, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao lado cateto do esquadro perpendicular à reta diretriz) no foco, a outra extremidade na ponta do esquadro oposta ao lado que está encostado na reta diretriz. Esticamos o barbante com a caneta de forma que ela fique encostada no lado do esquadro perpendicular à reta diretriz. Deslizando-se o esquadro na direção da reta diretriz mantendo o lado encostado nela uma parte da parábola é traçada (Figura 5.9 na página 304).

5.1.12. Mostre que um espelho parabólico reflete na direção do foco os raios que incidem paralelos ao seu eixo de simetria seguindo os seguintes passos:

(a) Considere a parábola $y^2 = 4px$. Usando o fato de que a inclinação da reta tangente à parabola no ponto $P = (\frac{y_0^2}{4p}, y_0)$ é $\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y_0}$. Mostre que se o raio incidente tem equação $y = y_0$, então a equação do raio refletido que passa por $P = (\frac{y_0^2}{4p}, y_0)$ é

$$y - y_0 = \frac{4py_0}{y_0^2 - 4p^2}(x - \frac{y_0^2}{4p}).$$

Use o fato de que $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

(b) Mostre que o raio refletido intercepta o eixo x em $x = p$.

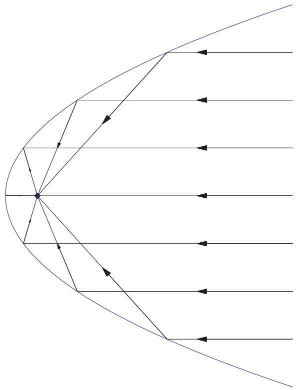


Figura 5.19 – Parábola refletindo na direção do foco os raios paralelos ao seu eixo de simetria.

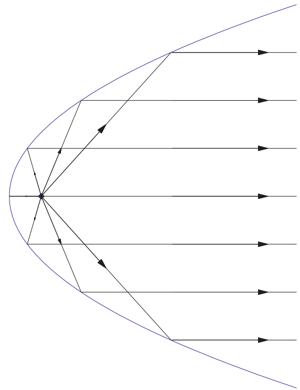


Figura 5.20 – Parábola refletindo na direção do seu eixo de simetria os raios originários do foco.

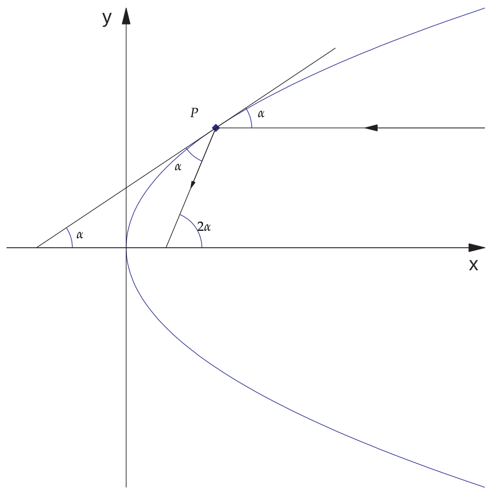


Figura 5.21 – Parábola refletindo na direção do foco os raios paralelos ao seu eixo de simetria.

5.2 Coordenadas Polares e Equações Paramétricas

Até agora vimos usando o chamado **sistema de coordenadas cartesianas**, em que um ponto do plano é localizado em relação a duas retas fixas perpendiculares entre si. Vamos definir um outro sistema de coordenadas chamado de **sistema de coordenadas polares** em que um ponto do plano é localizado em relação a um ponto e a uma reta que passa por esse ponto.

Escolhemos um ponto O (usualmente a origem do sistema cartesiano), chamado **polo** e uma reta orientada passando pelo polo chamada **eixo polar** (usualmente tomamos o próprio eixo x do sistema cartesiano). No sistema de coordenadas polares um ponto no plano é localizado dando-se a distância do ponto ao polo, $r = \text{dist}(P, O)$ e o ângulo, θ, entre os vetores $\overrightarrow{OP}$ e um vetor na direção e sentido do eixo polar, com a mesma convenção da trigonometria, ou seja, ele é positivo se medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se medido no sentido horário a partir do eixo polar. As coordenadas polares de um ponto P do plano são escritas na forma (r, θ).

Segue facilmente as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares.

Proposição 5.5. *Suponha que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares coincidem com a origem e o eixo x do sistema de coordenadas cartesianas, respectivamente. Então a transformação entre os sistemas de coordenadas polares e o de coordenadas cartesianas podem ser realizadas pelas equações*

$$x = r\cos\theta \quad e \quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad e \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad se\ x^2 + y^2 \neq 0.$$

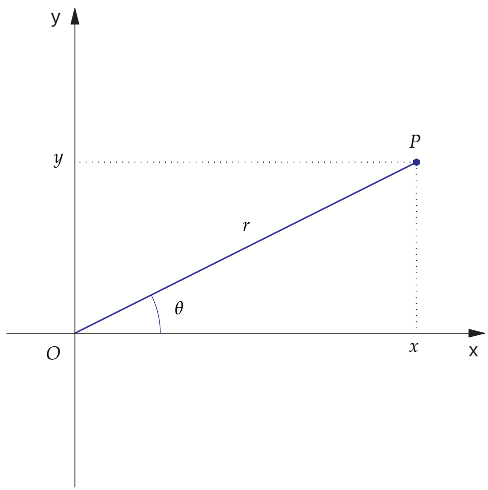


Figura 5.22 – Ponto P do plano em coordenadas polares (r, θ) e cartesianas (x, y)

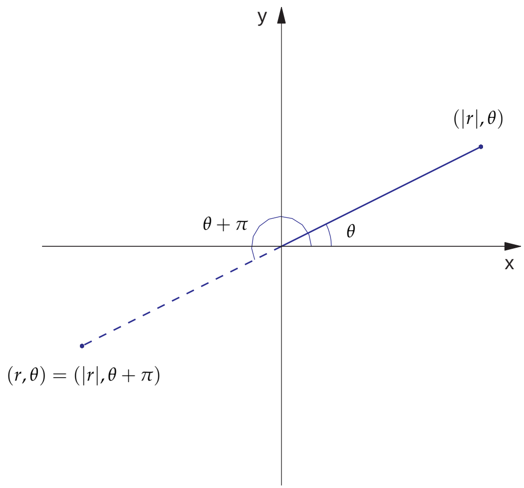


Figura 5.23 – Para $r < 0$, $(r, \theta) = (|r|, \theta + \pi)$

Estendemos as coordenadas polares para o caso no qual r é negativo da seguinte forma:

$$\text{para } r < 0, \quad (r, \theta) = (|r|, \theta + \pi).$$

Assim, (r, θ) e $(-r, \theta)$ estão na mesma reta que passa pelo polo, à distância $|r|$ do polo, mas em lados opostos em relação ao polo.

Exemplo 5.1. Vamos determinar a equação em coordenadas polares da circunferência cuja equação em coordenadas retangulares é

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

ou simplificando

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Substituindo-se x por $r \cos\theta$ e y por $r \operatorname{sen}\theta$ obtemos

$$r^2 - 2r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Dividindo-se por r ficamos com

$$r - 2\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta = 0.$$

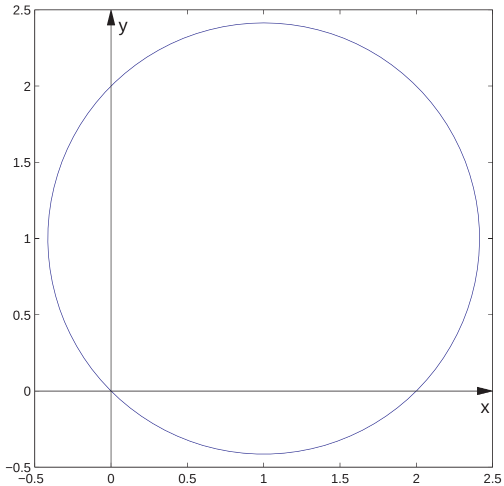


Figura 5.24 – Circunferência com equação em coordenadas polares $r - 2\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$

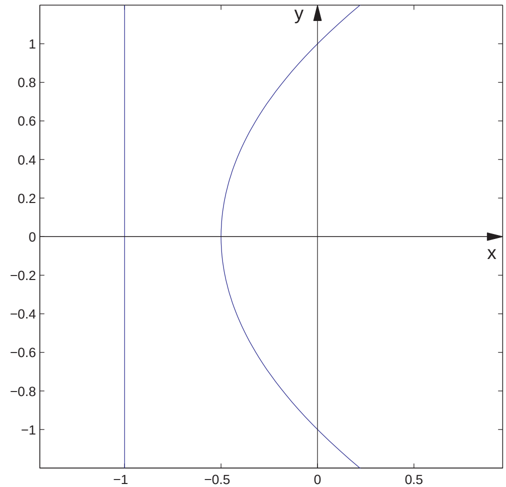


Figura 5.25 – Parábola com equação em coordenadas polares $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

Exemplo 5.2. Vamos determinar a equação em coordenadas retangulares do lugar geométrico cuja equação em coordenadas polares é

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}.$$

Substituindo-se r por $\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta$ por $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ obtemos

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

ou simplificando

$$\sqrt{x^2+y^2} - x = 1.$$

Somando-se x a ambos os membros obtemos

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 + x.$$

Elevando-se ao quadrado obtemos

$$x^2 + y^2 = (1+x)^2.$$

Simplificando-se obtemos ainda

$$y^2 = 1 + 2x = 2(x + 1/2),$$

que é uma parábola com foco na origem $F = (0,0)$ e reta diretriz $x = -1$ (verifique!).

5.2.1 Cônicas em Coordenadas Polares

A equação polar de uma cônica, que não é uma circunferência, assume uma forma simples quando um foco F está no polo e a reta diretriz s é paralela ou perpendicular ao eixo polar. Seja $d = \text{dist}(F, s)$. Para deduzir a equação polar das cônicas vamos usar a caracterização dada na Proposição 5.4 na página 310, ou seja, que uma cônica é o lugar geométrico dos pontos P que satisfazem

$$\text{dist}(P, F) = e\ \text{dist}(P, s)$$

Como o foco F está no polo, temos que $\text{dist}(P, F) = r$, em que (r, θ) são as coordenadas polares de P.

(a) Se a reta diretriz, s, é perpendicular ao eixo polar.

  (i) Se a reta s está à *direita* do polo, obtemos que $\text{dist}(P, s) = d - r\cos\theta$. Assim, a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d - r\cos\theta).$$

  Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}.$$

  (ii) Se a reta s está à *esquerda* do polo, obtemos que $\text{dist}(P, s) = d + r\cos\theta$. Assim, a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d + r\cos\theta).$$

  Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 - e\cos\theta}.$$

(b) Se a reta diretriz, s, é paralela ao eixo polar.

  (i) Se a reta s está *acima* do polo, obtemos que $\text{dist}(P, s) = d - r\,\text{sen}\,\theta$. Assim, a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d - r\,\text{sen}\,\theta).$$

  Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}.$$

(ii) Se a reta s está *abaixo* do polo, obtemos que $\text{dist}(P, s) = d + r \operatorname{sen} \theta$. Assim, a equação da cônica fica sendo

$$r = e(d + r \operatorname{sen} \theta).$$

Isolando r obtemos

$$r = \frac{de}{1 - e \operatorname{sen} \theta}.$$

Isto prova o seguinte resultado

Proposição 5.6. *Considere uma cônica com excentricidade $e > 0$ (que não é uma circunferência), que tem um foco F no polo e a reta diretriz s é paralela ou perpendicular ou eixo polar, com $d = \text{dist}(s, F)$.*

(a) *Se a reta diretriz correspondente a F é perpendicular ao eixo polar e está **à direita** do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 + e \cos \theta}$$

*e se está **à esquerda** do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 - e \cos \theta}$$

(b) *Se a reta diretriz correspondente a F é paralela ao eixo polar e está **acima** do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$$

*e se está **abaixo** do polo, então a equação polar da cônica é*

$$r = \frac{de}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$$

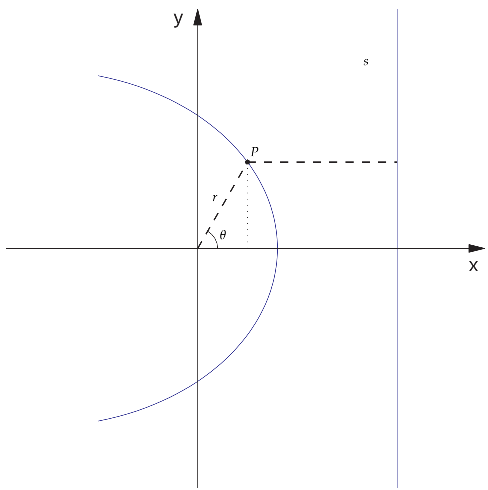


Figura 5.26 – Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à direita

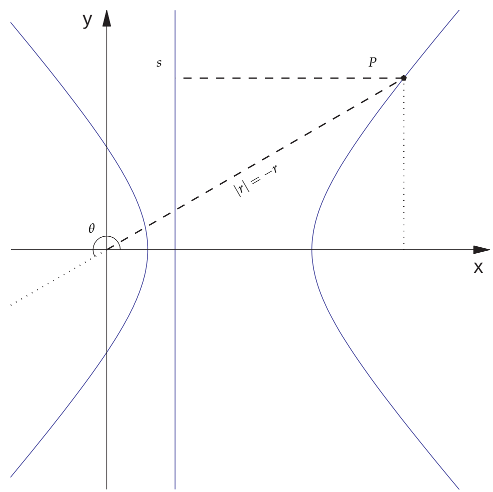


Figura 5.27 – Hipérbole com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à direita

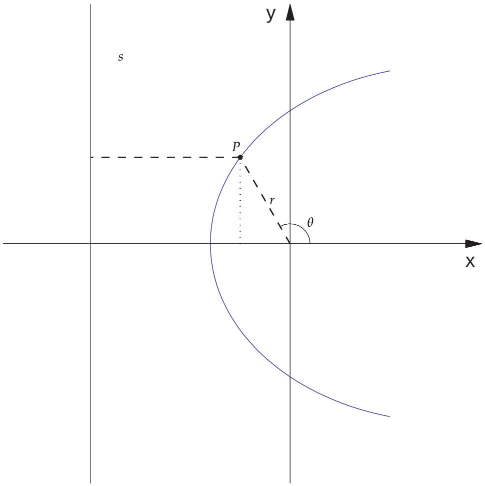


Figura 5.28 – Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à esquerda

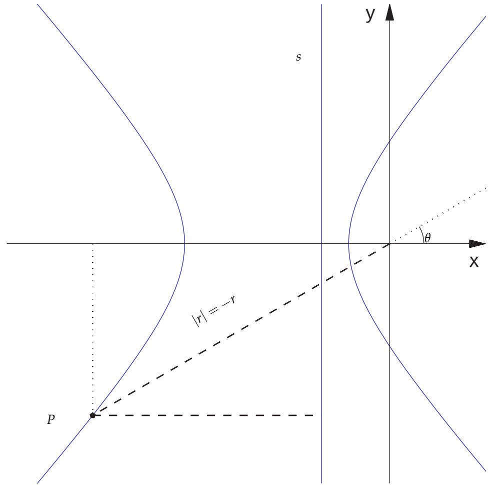


Figura 5.29 – Hipérbole com foco no polo e reta diretriz perpendicular ao eixo polar à esquerda

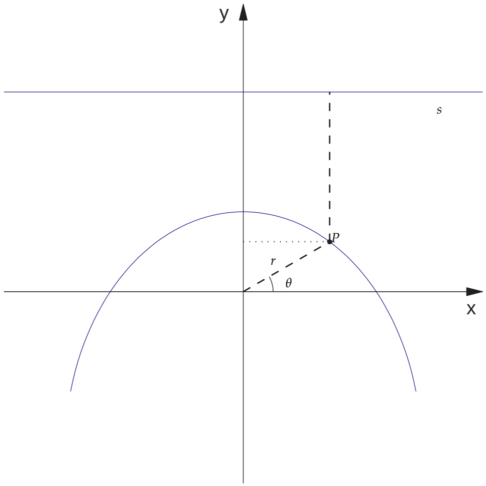


Figura 5.30 – Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar acima

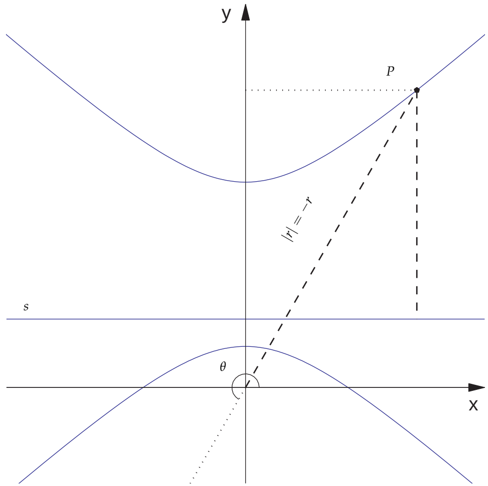


Figura 5.31 – Hipérbole com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar acima

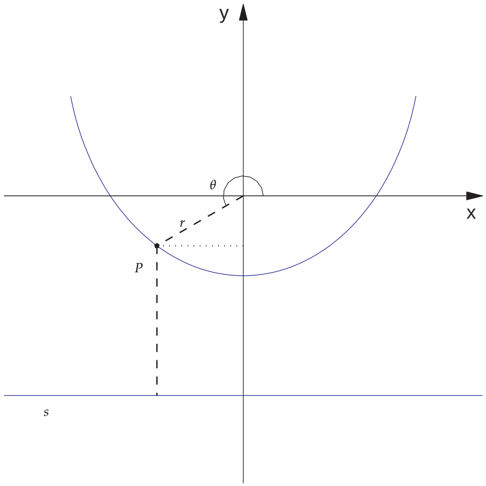


Figura 5.32 – Parte de uma cônica com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar abaixo

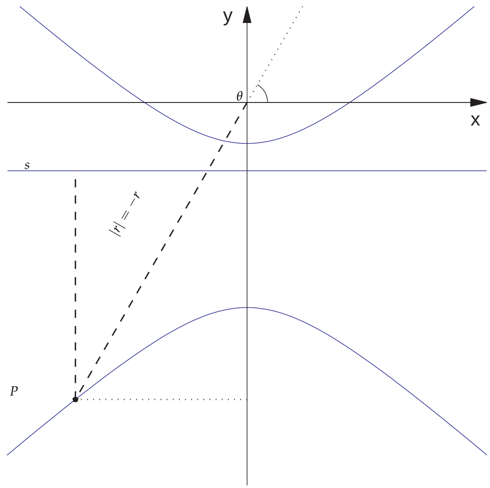


Figura 5.33 – Hipérbole com foco no polo e reta diretriz paralela ao eixo polar abaixo

Exemplo 5.3. Vamos identificar a cônica cuja equação em coordenadas polares é

$$r = \frac{4}{2+\cos\theta}.$$

Dividindo-se o numerador e o denominador do segundo membro da equação por 2 obtemos

$$r = \frac{2}{1+\frac{1}{2}\cos\theta},$$

que é a equação em coordenadas polares de uma elipse com excentricidade igual à $1/2$, um dos focos no polo, reta diretriz $x = 4$ (coordenadas cartesianas) ou $r\cos\theta = 4$ (coordenadas polares). Fazendo $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ na equação polar da elipse encontramos $r = 4/3$ e $r = 2$, respectivamente. $(4/3, 0)$ e $(2, \pi)$ são coordenadas polares de vértices da elipse.

5.2.2 Circunferência em Coordenadas Polares

A forma mais simples da equação de uma circunferência em coordenadas polares ocorre quando seu centro está no polo. Neste caso a equação é simplesmente $r = a$, em que a é o raio da circunferência. Além deste caso, a equação polar de uma circunferência assume uma forma simples quando ela passa pelo polo e o seu centro está no eixo polar ou na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo.

(a) Se o centro está no eixo polar.

(a) Se o raio é igual à a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, 0)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= ||\overrightarrow{CP}||^2 = ||\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}||^2 = ||\overrightarrow{OP}||^2 + ||\overrightarrow{OC}||^2 - 2\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$r^2 = 2ra\cos\theta$$

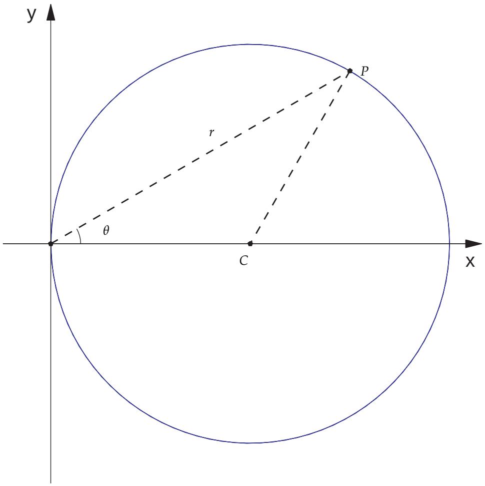


Figura 5.34 – Circunferência que passa pelo polo com centro no eixo polar à direita

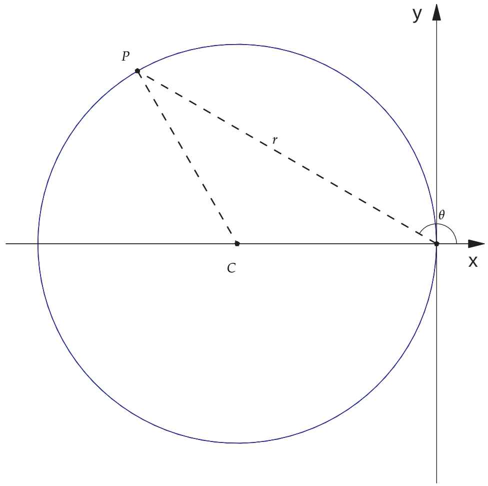


Figura 5.35 – Circunferência que passa pelo polo com centro no eixo polar à esquerda

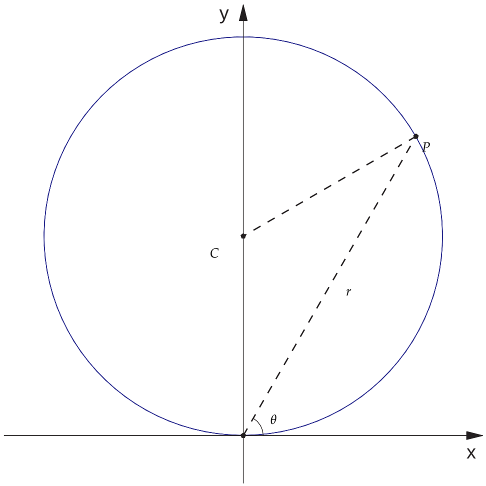


Figura 5.36 – Circunferência que passa pelo polo com centro acima do polo na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo

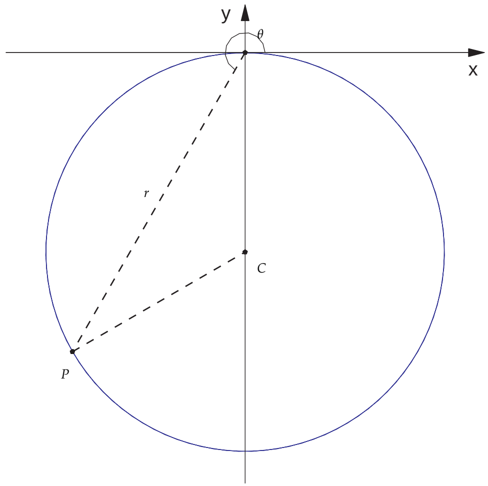


Figura 5.37 – Circunferência que passa pelo polo com centro abaixo do polo na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo

ou

$$r(r - 2a\cos\theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = 2a\cos\theta.$$

(b) Se o raio é igual à a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, \pi)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\overrightarrow{CP}\|^2 = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\|^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2 + \|\overrightarrow{OC}\|^2 - 2\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos(\pi - \theta). \end{aligned}$$

Assim,

$$r^2 = -2ra\cos\theta$$

ou

$$r(r + 2a\cos\theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = -2a\cos\theta.$$

(b) Se o centro está na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo.

(a) Se o raio é igual à a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, \pi/2)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\overrightarrow{CP}\|^2 = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}\|^2 = \|\overrightarrow{OP}\|^2 + \|\overrightarrow{OC}\|^2 - 2\,\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos(\pi/2 - \theta). \end{aligned}$$

Assim,

$$r^2 = 2ra\,\mathrm{sen}\,\theta$$

ou

$$r(r - 2a \operatorname{sen}\theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = 2a \operatorname{sen}\theta.$$

(b) Se o raio é igual à a e o centro em coordenadas polares é $C = (a, -\pi/2)$. Se P é um ponto qualquer da circunferência, então

$$\begin{aligned} a^2 &= ||\overrightarrow{CP}||^2 = ||\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}||^2 = ||\overrightarrow{OP}||^2 + ||\overrightarrow{OC}||^2 - 2\,\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= r^2 + a^2 - 2ra\cos(-\pi/2 - \theta). \end{aligned}$$

Assim,

$$r^2 = -2ra \operatorname{sen}\theta$$

ou

$$r(r + 2a \operatorname{sen}\theta) = 0$$

Logo a equação em coordenadas polares da circunferência é

$$r = -2a \operatorname{sen}\theta.$$

Proposição 5.7. *Considere uma circunferência de raio a que passa pelo polo cujo centro está no eixo polar ou na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo.*

(a) *Se o centro está no eixo polar e **à direita** do polo, então a equação polar da circunferência é dada por*

$$r = 2a\cos\theta$$

*e se o centro está **à esquerda** do polo, então a equação polar da circunferência é dada por*

$$r = -2a\cos\theta.$$

*(b) Se o centro está na reta perpendicular ao eixo polar que passa pelo polo e **acima** do polo, então a equação polar é dada por*

$$r = 2a \operatorname{sen} \theta,$$

*e se está **abaixo** do polo, então a equação polar da circunferência é dada por*

$$r = -2a \operatorname{sen} \theta.$$

Exemplo 5.4. Uma circunferência cuja equação em coordenadas polares é

$$r = -3 \cos \theta$$

passa pelo polo, tem raio igual à $3/2$ e as coordenadas polares do seu centro são $(3/2, \pi)$.

5.2.3 Equações Paramétricas

Seja

$$F(x, y) = 0 \tag{5.9}$$

a equação de uma curva plana $\mathcal{C}$ em coordenadas retangulares. Sejam x e y funções de uma terceira variável t em um subconjunto, $\mathcal{I}$, do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ou seja,

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t), \quad \text{para todo } t \in \mathcal{I}. \tag{5.10}$$

Se para qualquer valor da variável t no conjunto $\mathcal{I}$, os valores de x e y determinados pelas equações (5.10) satisfazem (5.9), então as equações (5.10) são chamadas **equações paramétricas da curva** $\mathcal{C}$ e a variável independente t é chamada **parâmetro**. Dizemos também que as equações (5.10) formam uma **representação paramétrica da curva** $\mathcal{C}$. A representação paramétrica de curvas tem um papel importante no traçado de curvas pelo computador.

Exemplo 5.5. Seja a um número real positivo fixo. A circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{5.11}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a\cos t \quad \text{e} \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi). \tag{5.12}$$

Pois elevando ao quadrado cada uma das equações (5.12) e somando os resultados obtemos

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2.$$

A circunferência definida por (5.11) pode também ser representada parametricamente por

$$x = t \quad \text{e} \quad y = \sqrt{a^2 - t^2}, \quad \text{para todo } t \in [-a, a]. \tag{5.13}$$

ou por

$$x = t \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{a^2 - t^2}, \quad \text{para todo } t \in [-a, a]. \tag{5.14}$$

Apenas que com (5.13) obtemos somente a parte de cima da circunferência e com (5.14) obtemos somente a parte de baixo.

Exemplo 5.6. A elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.15}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a\cos t \quad \text{e} \quad y = b \operatorname{sen} t, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi). \tag{5.16}$$

Pois elevando-se ao quadrado e dividindo-se por a^2 a primeira equação em (5.16), elevando-se ao quadrado e dividindo-se por b^2 a segunda equação em (5.16) e somando-se os resultados obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1.$$

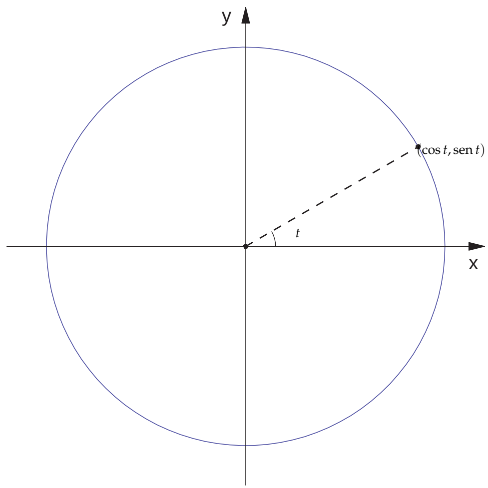


Figura 5.38 – Circunferência parametrizada

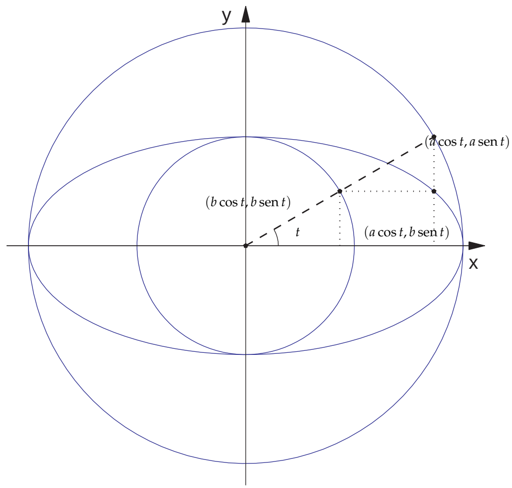


Figura 5.39 – Elipse parametrizada

Exemplo 5.7. A hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.17}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a\sec t \quad \text{e} \quad y = b\tan t, \quad \text{para todo } t \in [0, 2\pi),\ t \neq \pi/2, 3\pi/2. \tag{5.18}$$

Pois elevando-se ao quadrado e dividindo-se por a^2 a primeira equação em (5.18), elevando-se ao quadrado e dividindo-se por b^2 a segunda equação em (5.18) e subtraindo-se os resultados obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2 t - \tan^2 t = 1.$$

Vamos apresentar uma outra representação paramétrica da hipérbole. Para isso vamos definir duas funções

$$f_1(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad f_2(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \tag{5.19}$$

A hipérbole definida por (5.17) pode, também, ser representada parametricamente por

$$x = a f_1(t) \quad \text{e} \quad y = b f_2(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{5.20}$$

Pois elevando-se ao quadrado e dividindo-se por a^2 a primeira equação em (5.20), elevando-se ao quadrado e dividindo-se por b^2 a segunda equação em (5.20) e subtraindo-se os resultados obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = (f_1(t))^2 - (f_2(t))^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right) = 1. \tag{5.21}$$

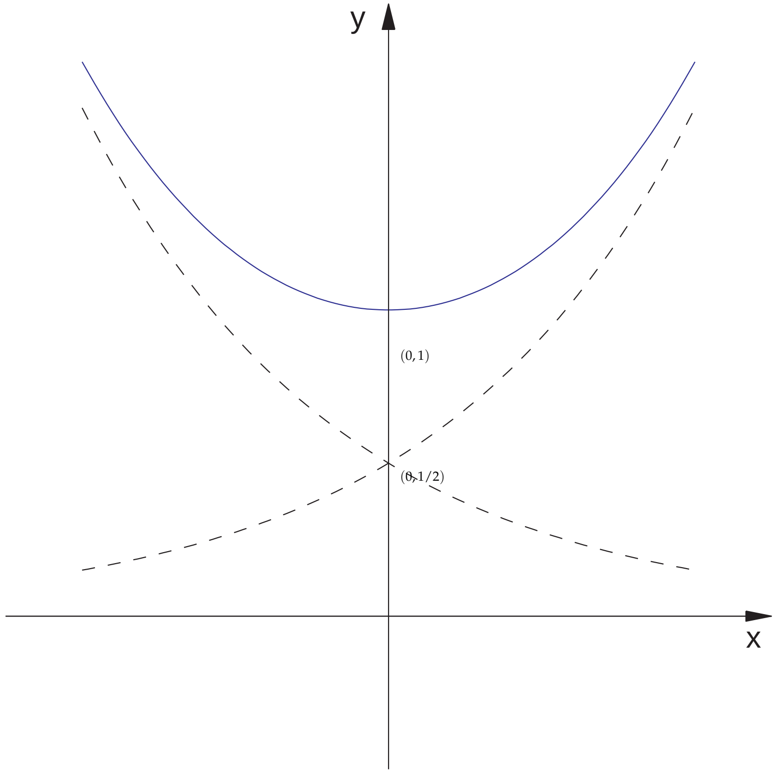


Figura 5.40 – Cosseno hiperbólico

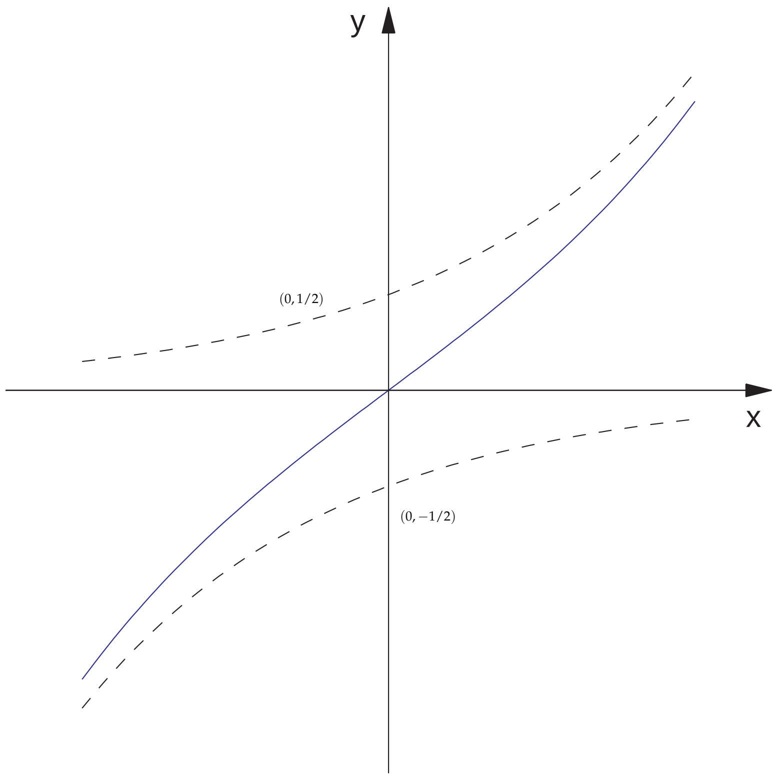


Figura 5.41 – Seno hiperbólico

As funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ definidas por (5.19) recebem o nome de **cosseno hiperbólico** e **seno hiperbólico**, respectivamente e são denotadas por $\cosh t$ e $\operatorname{senh} t$. De (5.21) segue-se a seguinte relação fundamental entre o cosseno e o seno hiperbólicos

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1. \tag{5.22}$$

e a representação paramétrica (5.20) pode ser escrita como

$$x = a\cosh t \quad \text{e} \quad y = b \operatorname{senh} t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{5.23}$$

Também

$$x = -a\cosh t \quad \text{e} \quad y = b \operatorname{senh} t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{5.24}$$

é uma representação paramétrica da hipérbole (5.17). Apenas que com (5.23) obtemos somente o ramo direito da hipérbole e com (5.24), somente o ramo esquerdo.

Exemplo 5.8. Vamos mostrar que a parametrização de uma curva em relação a qual sabemos sua equação em coordenadas polares $r = f(\theta)$ pode ser feita da seguinte forma

$$x = f(t)\cos t \quad \text{e} \quad y = f(t) \operatorname{sen} t. \tag{5.25}$$

A equação da curva em coordenadas cartesianas é

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = f(\theta(x,y)), & \text{se } f(\theta(x,y)) \geq 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} = f(\theta(x,y)), & \text{se } f(\theta(x,y)) < 0. \end{cases}$$

ou

$$\sqrt{x^2+y^2} = |f(\theta(x,y))|. \tag{5.26}$$

Para a parametrização (5.25) temos que

$$\sqrt{x^2+y^2} - |f(\theta(x,y))| = \sqrt{(f(t))^2\cos^2 t + (f(t))^2 \operatorname{sen}^2 t} - |f(t)| = 0.$$

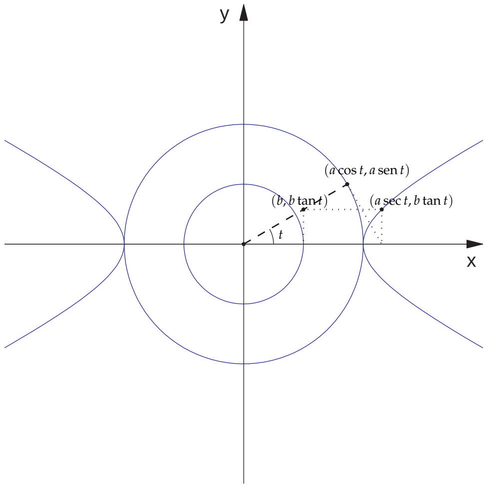


Figura 5.42 – Hipérbole parametrizada usando secante e tangente

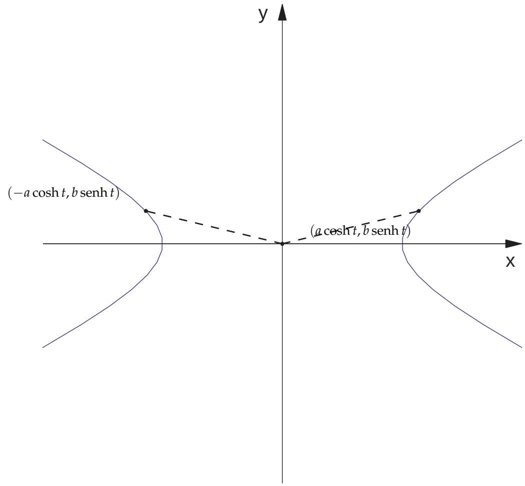


Figura 5.43 – Hipérbole parametrizada usando as funções hiperbólicas

O que mostra que (5.25) é uma parametrização para (5.26) e portanto para $r = f(\theta)$.
Por exemplo,

$$x = \frac{e\cos t}{1 + e\cos t} \quad \text{e} \quad y = \frac{e\,\text{sen}\, t}{1 + e\cos t}$$

é uma parametrização de uma cônica com excentricidade $e > 0$, reta diretriz localizada à direita a uma distância igual à 1 e um dos focos na origem.

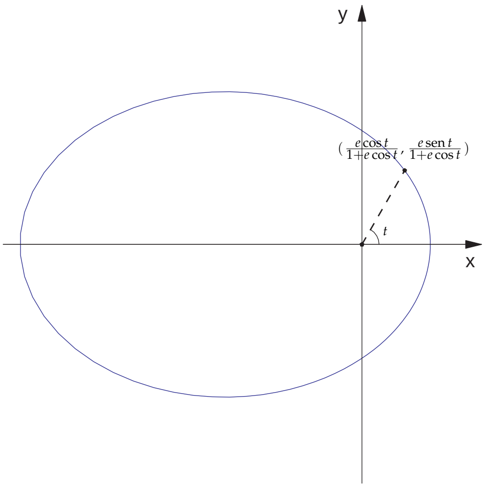


Figura 5.44 – Elipse com foco na origem parametrizada usando a sua fórmula em coordenadas polares

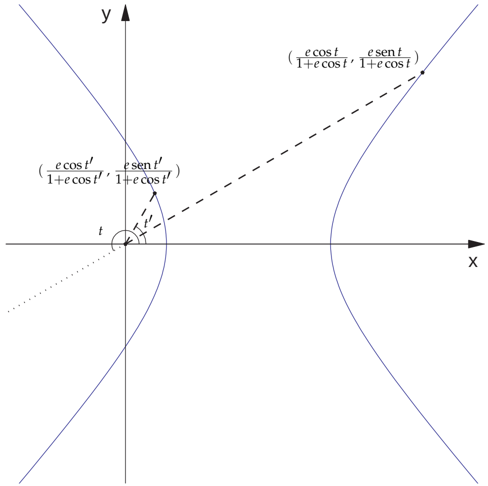


Figura 5.45 – Hipérbole com foco na origem parametrizada usando a sua fórmula em coordenadas polares

Exercícios Numéricos (respostas na página 587)

5.2.1. Transformar a equação em coordenadas retangulares em uma equação em coordenadas polares:

(a) $x^2 + y^2 = 4$
(b) $x^2 - y^2 = 4$
(c) $x^2 + y^2 - 2y = 0$
(d) $x^2 - 4y - 4 = 0$

5.2.2. Transformar a equação em coordenadas polares em uma equação em coordenadas retangulares:

(a) $r = \dfrac{2}{1 - 3\cos\theta}$
(b) $r = 4\,\text{sen}\,\theta$
(c) $r = 9\cos\theta$
(d) $r = \dfrac{3}{2 + \text{sen}\,\theta}$
(e) $r = \tan\theta$
(f) $r(a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta) - c = 0$

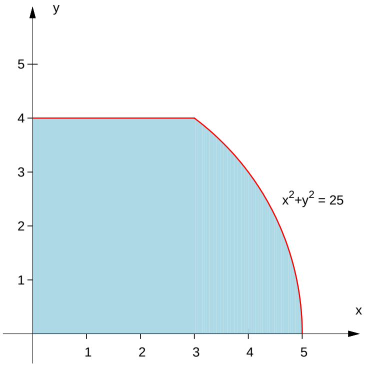
5.2.3. Identificar a cônica cuja equação em coordenadas polares é dada. Determine a excentricidade, a equação da diretriz, a distância da diretriz ao foco e as coordenadas polares de dois vértices:

(a) $r = \dfrac{5}{2 - 2\cos\theta}$
(b) $r = \dfrac{6}{3 + \text{sen}\,\theta}$
(c) $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$
(d) $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$

5.2.4. Determine o raio e e as coordenadas polares do centro da circunferência cuja equação em coordenadas polares é dada:

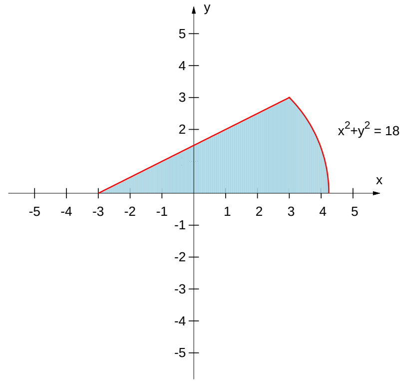
(a) $r = 4\cos\theta$
(b) $r = -3\,\text{sen}\,\theta$
(c) $r = \frac{3}{2}\cos\theta$
(d) $r = -\frac{4}{3}\,\text{sen}\,\theta$

5.2.5. Descreva as regiões a seguir usando coordenadas polares:



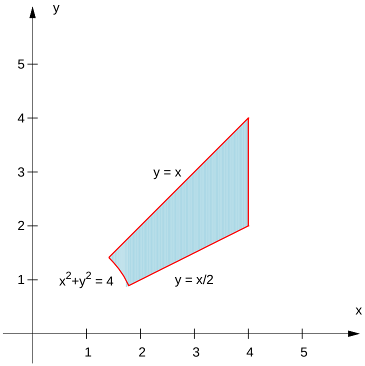
y
x
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
x^2+y^2 = 25

(a)



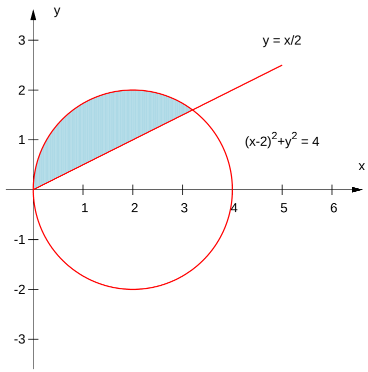
y
x
5
4
3
2
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x^2+y^2 = 18

(b)



y
x
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
y = x
x^2+y^2 = 4
y = x/2

(c)



y
x
3
2
1
-1
-2
-3
1
2
3
4
5
6
y = x/2
(x-2)^2+y^2 = 4

(d)

Exercícios Teóricos

5.2.6. A equação da trajetória de uma partícula lançada do ponto $P_0 = (0,0)$, com velocidade v_0, fazendo um ângulo α com o eixo x e sujeita apenas a ação da aceleração da gravidade g é dada por

$$y = (\tan\alpha)\,x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2.$$

Mostre que $x = (v_0\cos\alpha)\,t$ e $y = (v_0\operatorname{sen}\alpha)\,t - \frac{g}{2}\,t^2$ são equações paramétricas da trajetória da partícula.

5.2.7. Se o centro de uma circunferência que passa pelo polo é (a,α), mostre que sua equação em coordenadas polares é $r = 2a\cos(\theta - \alpha)$.

5.2.8. Se a cônica de equação $r = \dfrac{de}{1 - e\cos\theta}$ representa uma parábola, determine as coordenadas polares do seu vértice e a equação em coordenadas polares da reta diretriz.

5.2.9. Se a cônica de equação $r = \dfrac{de}{1 + e\cos\theta}$ representa uma elipse, mostre que o comprimento do seu eixo menor é $\dfrac{2de}{\sqrt{1-e^2}}$.

5.2.10. Mostre que a equação em coordenadas polares de uma elipse com um dos focos no polo, que tem eixo maior igual à $2a$ e excentricidade e é

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\theta}.$$

5.2.11. Considere uma cônica com excentricidade $e > 0$ (que não é uma circunferência), que tem um foco F no polo e a reta diretriz s é paralela ou perpendicular ou eixo polar, com $d = \operatorname{dist}(s, F)$. Seja $p = \frac{de^2}{1-e^2}$, se a reta s estiver à direita do foco F e $p = \frac{de^2}{e^2-1}$, se a reta s estiver à esquerda do foco F.

(a) Se a reta diretriz correspondente a F é perpendicular ao eixo polar e está **à direita** ou **à esquerda** do polo, então a equação cartesiana da cônica é

$$\frac{(x+p)^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{e^2}} = 1$$

(b) Se a reta diretriz correspondente a F é paralela ao eixo polar e está **acima** ou **abaixo** do polo, então a equação cartesiana da cônica é

$$\frac{x^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{e^2}} + \frac{(y+p)^2}{\frac{p^2}{e^2}} = 1$$

5.2.12. Mostre que um espelho elíptico, reflete na direção de um foco, os raios que incidem na elipse vindo do outro foco, seguindo os seguintes passos:

(a) Considere a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Usando o fato de que um ponto da elipse pode ser escrito na forma $P = (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$, para $t \in [0, 2\pi)$ e que a inclinação da reta tangente à elipse neste ponto é $\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos t}{a \operatorname{sen} t}$, mostre que a equação da reta tangente à elipse em P é

$$y = b \operatorname{sen} t - \frac{b\cos t}{a \operatorname{sen} t}(x - a\cos t), \quad \text{para } t \neq 0, \pi,$$

e que a equação da reta que passa por F_2 e é paralela ao raio que passa por F_1 depois de ser refletido em P é

$$y = \frac{b \operatorname{sen} t}{c + a\cos t}(x - c).$$

(b) Mostre que a interseção da reta tangente à elipse que passa por P e a reta que passa por F_2 e é paralela ao raio que passa por F_1 depois de ser refletido em P é o ponto

$$P_1 = \left(\frac{a(c \operatorname{sen}^2 t + a\cos t + c)}{a + c\cos t}, \frac{b \operatorname{sen} t(a - c\cos t)}{a + c\cos t} \right)$$

(c) Mostre que $\text{dist}(P, F_2) = \text{dist}(P_1, F_2) = a - c\cos t$. Logo o triângulo PF_2P_1 é isósceles e assim o ângulo de reflexão do raio que passa por F_1 depois de ser refletido em P, α_1, e o ângulo de incidência do raio que se reflete em P vindo de F_2, α_2, são iguais. Portanto, o raio que vem de F_2 e se reflete em P necessariamente passa por F_1 (veja a Figura 5.46).

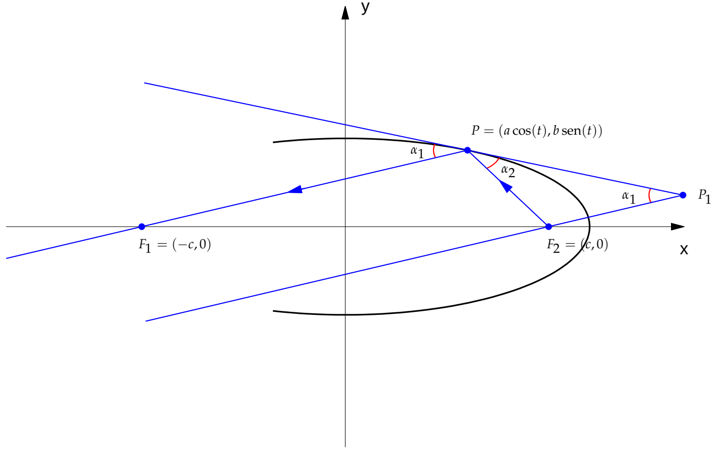


Figura 5.46 – Elipse refletindo, na direção de um foco, os raios que incidem na elipse vindo do outro foco

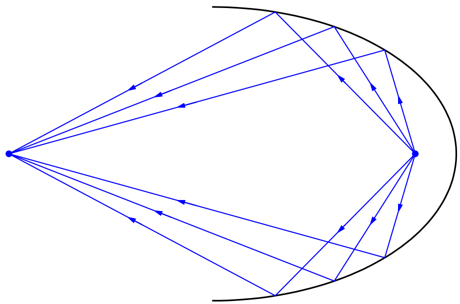


Figura 5.47 – Espelho elíptico refletindo, na direção de um foco, os raios que incidem vindo do outro foco

5.2.13. Mostre que um espelho hiperbólico, reflete na direção de um foco, os raios que incidem na hipérbole na direção do outro foco, seguindo os seguintes passos:

(a) Considere a hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Usando o fato de que um ponto do ramo esquerdo da hipérbole pode ser escrito na forma $P = (-a\sec t, b\tan t)$, para $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ e que a inclinação da reta tangente à hipérbole neste ponto é $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a \operatorname{sen} t}$, mostre que a equação da reta tangente à hipérbole em P é

$$y = b\tan t - \frac{b}{a \operatorname{sen} t}(x + a\sec t), \quad \text{para } t \neq 0,$$

e que a equação da reta que passa por F_2 e é paralela ao raio que incide na direção de F_1 e se reflete em P é

$$y = \frac{b\tan t}{c - a\sec t}(x - c).$$

(b) Mostre que a interseção da reta tangente à hipérbole que passa por P e a reta que passa por F_2 e é paralela ao raio que incide na direção de F_1 e se reflete em P é o ponto

$$P_1 = \left(\frac{a(2c\cos^2 t - a\cos t - c)}{\cos t(a\cos t - c)}, \frac{b \operatorname{sen} t(a\cos t + c)}{\cos t(a\cos t - c)} \right)$$

(c) Mostre que $\operatorname{dist}(P, F_2) = \operatorname{dist}(P_1, F_2) = a + c\sec t$. Logo o triângulo PF_2P_1 é isósceles e assim o ângulo de incidência do raio que incide na direção de F_1 e se reflete em P, α_1, e o ângulo de reflexão do raio que se reflete em P na direção de F_2, α_2, são iguais. Portanto, o raio que incide na direção de F_1 e se reflete em P necessariamente passa por F_2 (veja as Figuras 5.48 e 5.49)

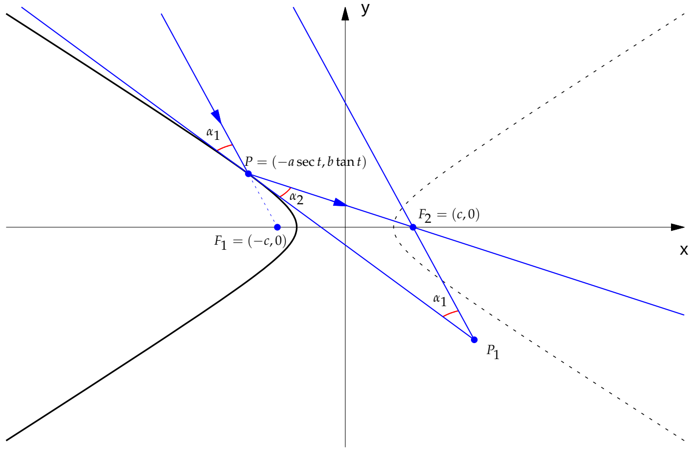


Figura 5.48 – Hipérbole refletindo, na direção de um foco, os raios que incidem na hipérbole na direção do outro foco

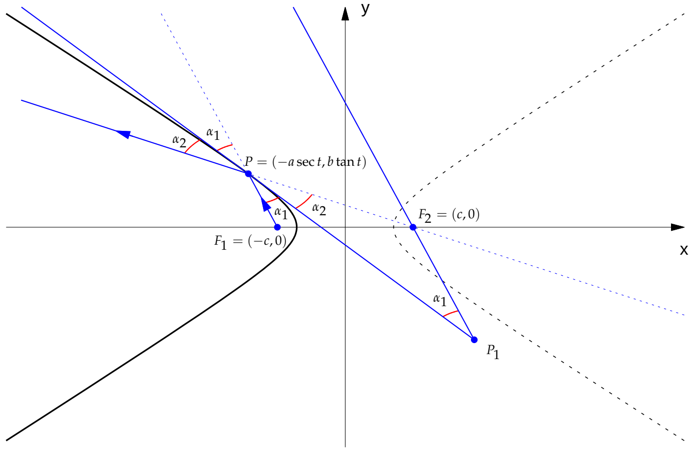


Figura 5.49 – Hipérbole refletindo, na direção de um foco, os raios que incidem na hipérbole na direção do outro foco

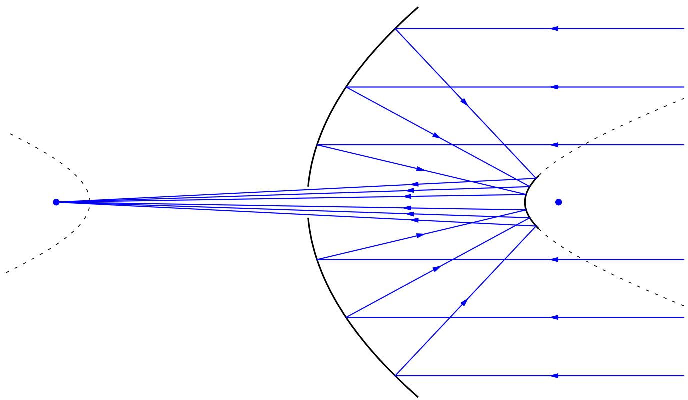


Figura 5.50 – Espelho maior parabólico refletindo na direção do foco, em seguida os raios são refletidos por um espelho hiperbólico na direção do outro foco da hipérbole

6

Superfícies e Curvas no Espaço

6.1 Quádricas

Nesta seção estudaremos as superfícies que podem ser representadas pelas **equações quadráticas** nas variáveis x, y e z, ou seja, da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

em que $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, com a, b, c, d, e, f não simultaneamente nulos. Vamos nos limitar neste capítulo ao estudo de casos especiais da equação acima.

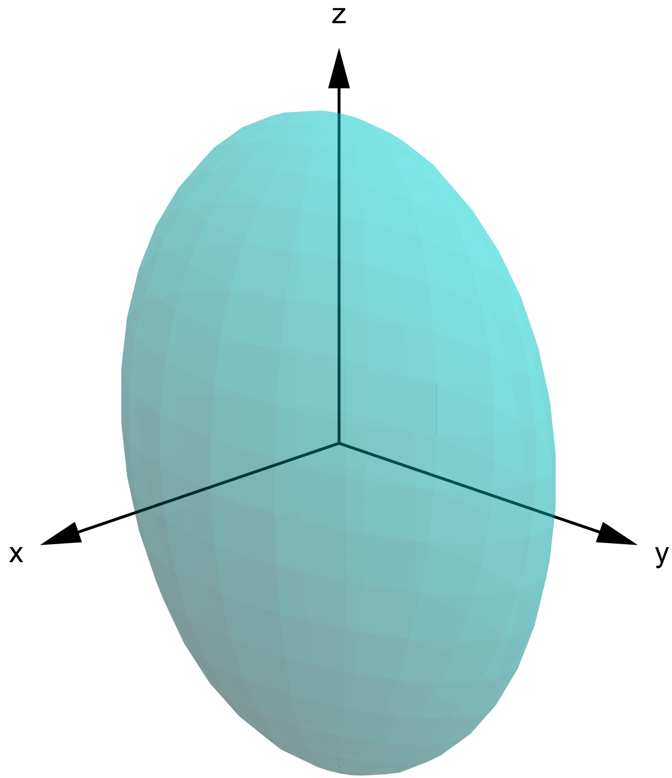


Figura 6.1 – Elipsoide de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

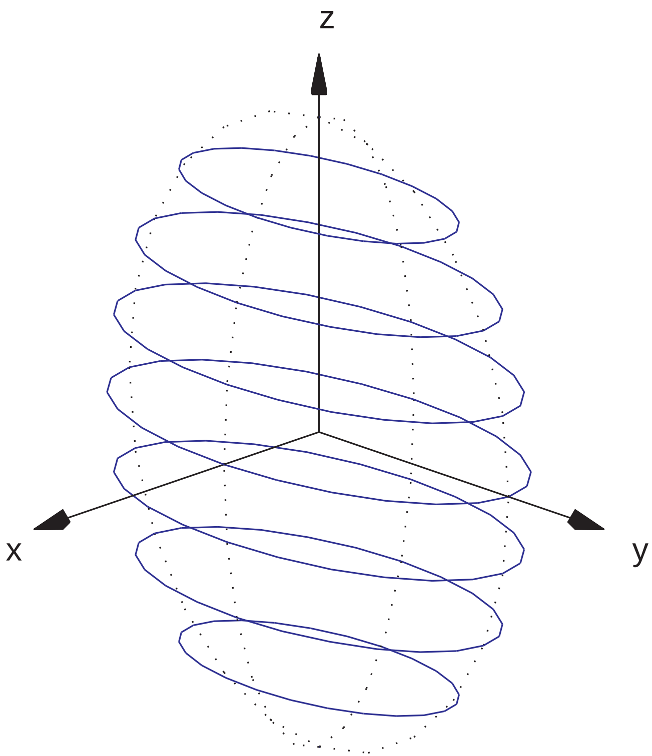


Figura 6.2 – Elipsoide e interseções com os planos $z = k$

6.1.1 Elipsoide

Um **elipsoide** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{6.1}$$

em que a, b e c são números reais positivos.
Observe que se o ponto (x, y, z) satisfaz (6.1), então o ponto simétrico em relação ao plano xy, $(x, y, -z)$, também satisfaz, por isso dizemos que o elipsoide (6.1) é simétrico em relação ao plano xy. Também $(x, -y, z)$ satisfaz (6.1), por isso dizemos que o elipsoide (6.1) é simétrico em relação ao plano xz. O mesmo acontece com $(-x, y, z)$, por isso dizemos que o elipsoide (6.1) é simétrico em relação ao plano yz. Se o ponto (x, y, z) satisfaz (6.1), então o ponto simétrico em relação ao eixo z, $(-x, -y, z)$, também satisfaz, por isso dizemos que o elipsoide (6.1) é simétrico em relação ao eixo z. O mesmo acontece com $(-x, y, -z)$, por isso dizemos que o elipsoide (6.1) é simétrico em relação ao eixo y. O mesmo acontece com $(x, -y, -z)$, por isso dizemos que o elipsoide (6.1) é simétrico em relação ao eixo x. Finalmente se o ponto (x, y, z) satisfaz (6.1), então o ponto simétrico em relação à origem, $(-x, -y, -z)$, também satisfaz, por isso dizemos que o elipsoide (6.1) é simétrico em relação à origem.
Se $|k| < c$, o plano $z = k$ intercepta o elipsoide (6.1) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, \quad z = k.$$

Observe que os eixos da elipse diminuem à medida que $|k|$ aumenta.
As interseções do elipsoide (6.1) com o plano $x = k$, para $|k| < a$ e com o plano $y = k$, para $|k| < b$, são também elipses. Se $a = b = c$, o elipsoide é uma **esfera** de raio $r = a = b = c$.

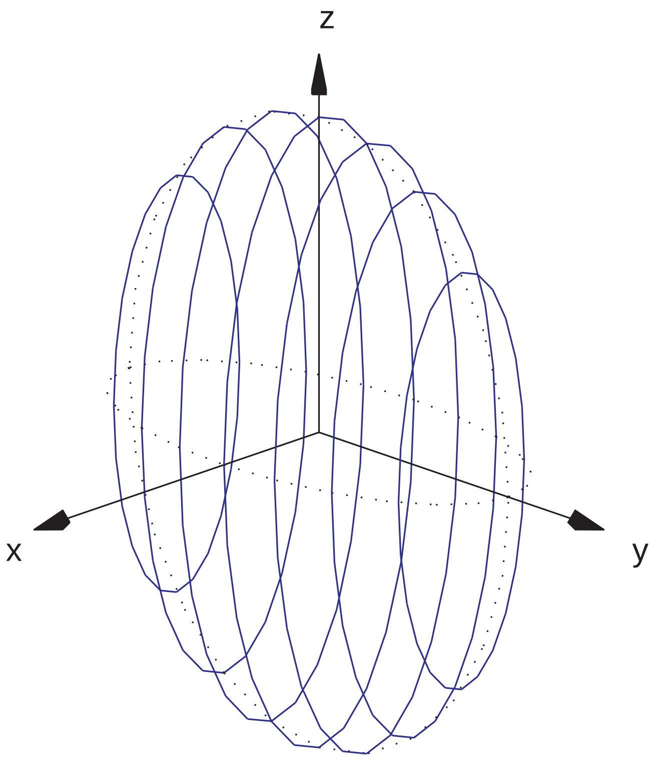


Figura 6.3 – Elipsoide e interseções com os planos $y = k$

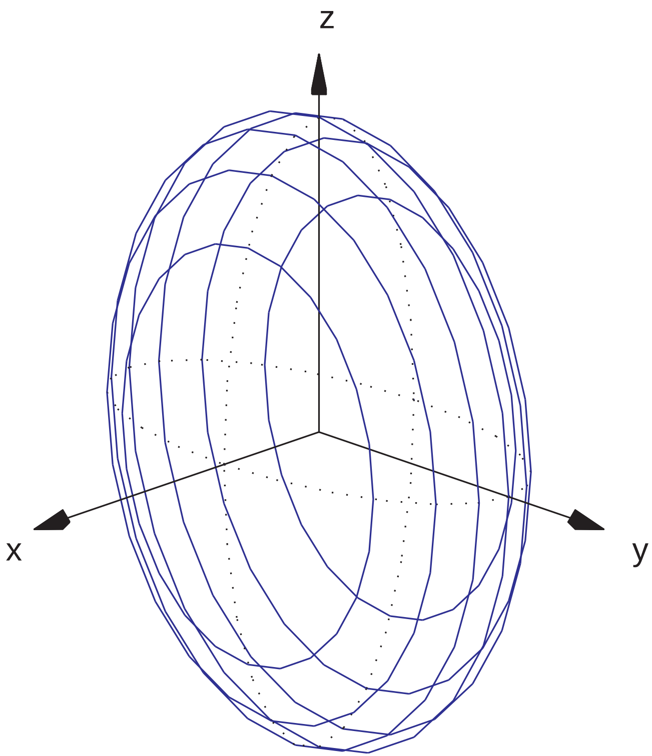


Figura 6.4 – Elipsoide e interseções com os planos $x = k$

6.1.2 Hiperboloide

Hiperboloide de Uma Folha

Um **hiperboloide de uma folha** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{6.2}$$

em que a, b e c são números reais positivos.
Observe que o hiperboloide de uma folha (6.2) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6.2), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.
O plano $z = k$ intercepta o hiperboloide de uma folha (6.2) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1, \quad z = k.$$

Observe que os eixos da elipse aumentam à medida que $|k|$ cresce.
O plano $y = k$ intercepta o hiperboloide de uma folha (6.2) segundo uma curva cuja equação é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}, \quad y = k.$$

Se $|k/b| \neq 1$, então a interseção é uma hipérbole e se $|k/b| = 1$, então a interseção é um par de retas concorrentes.
Considerações semelhantes são válidas para a interseção do hiperboloide de uma folha (6.2) com o plano $x = k$.
As equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

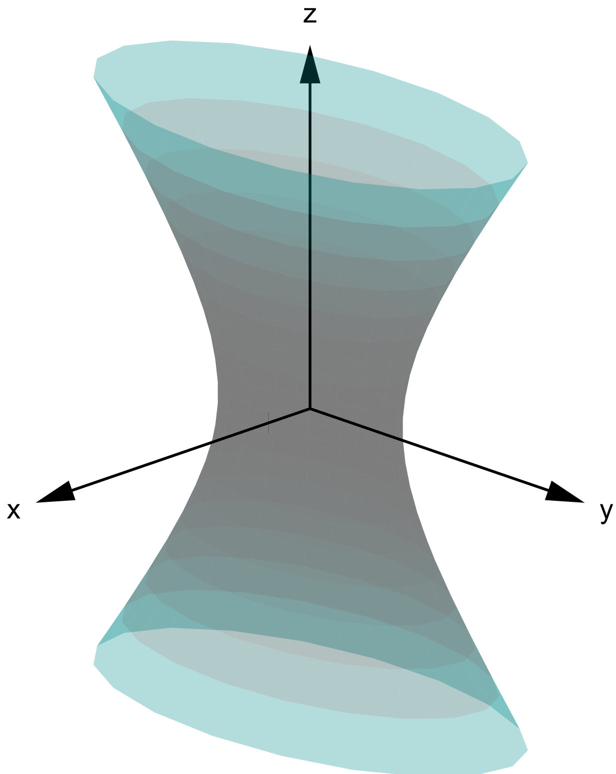


Figura 6.5 – Hiperboloide de uma folha de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

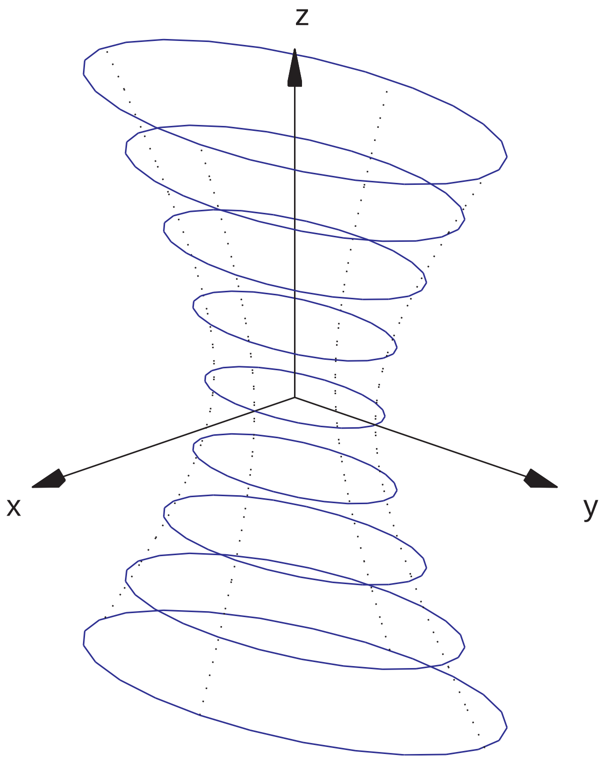


Figura 6.6 – Hiperboloide de uma folha e interseções com os planos $z = k$

e

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

também representam hiperboloides de uma folha.

Hiperboloide de Duas Folhas

Um **hiperboloide de duas folhas** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{6.3}$$

em que a, b e c são números reais positivos.

Observe que o hiperboloide de duas folhas (6.3) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6.3), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.

O plano $z = k$, para $|k| > c$, intercepta o hiperboloide de duas folhas (6.3) segundo a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{k^2}{c^2}-1\right)}=1, \quad z=k.$$

O plano $y = k$ intercepta o hiperboloide de duas folhas (6.3) segundo a hipérbole

$$-\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{k^2}{b^2}\right)}=1, \quad y=k.$$

A interseção do hiperboloide de duas folhas (6.3) com o plano $x = k$ é também uma hipérbole.

As equações

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

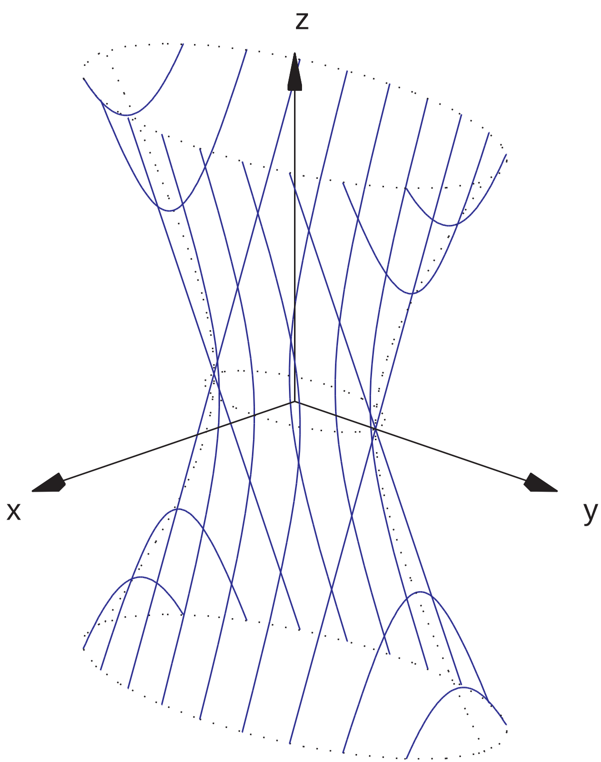


Figura 6.7 – Hiperboloide de uma folha e interseções com os planos $y = k$

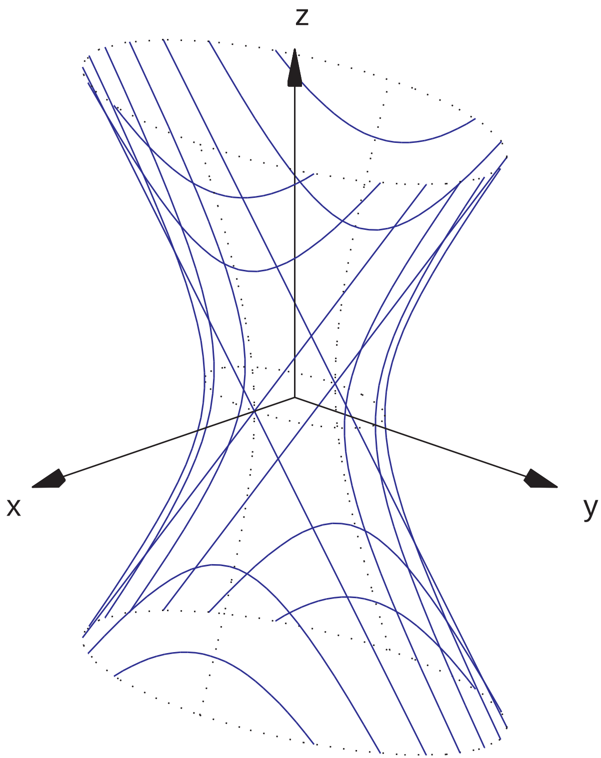


Figura 6.8 – Hiperboloide de uma folha e interseções com os planos $x = k$

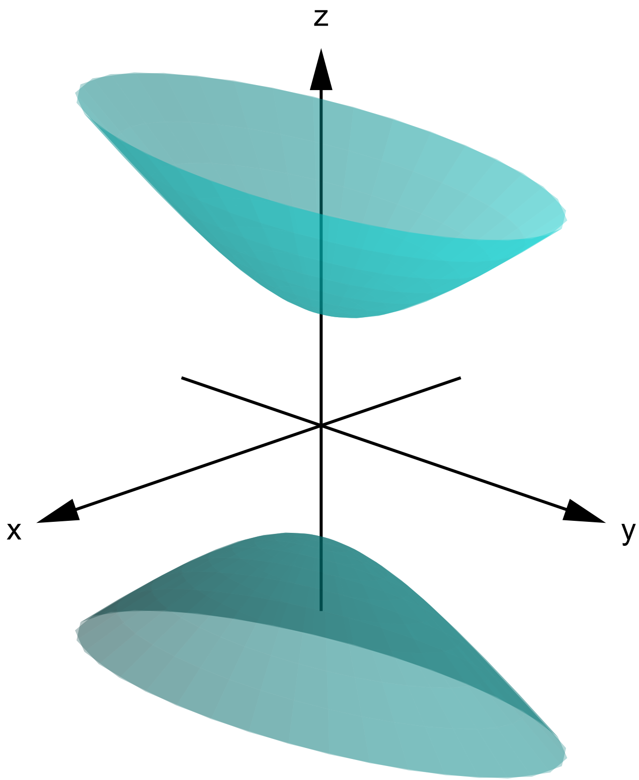


Figura 6.9 – Hiperboloide de duas folhas

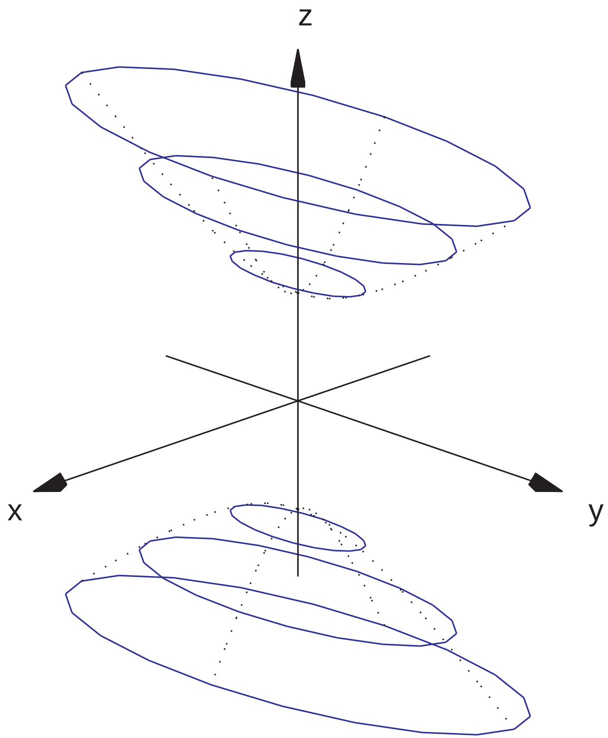


Figura 6.10 – Hiperboloide de duas folhas e interseções com os planos $z = k$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

também representam hiperboloides de duas folhas.

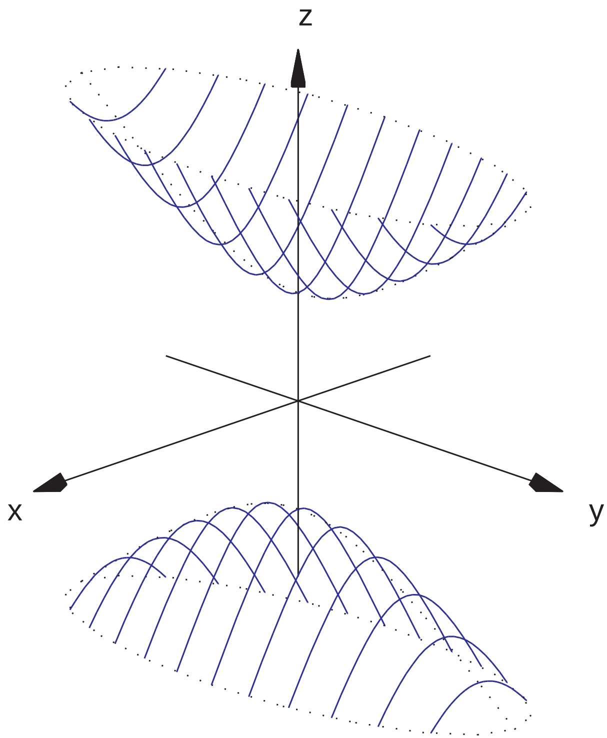


Figura 6.11 – Hiperboloide de duas folhas e interseções com os planos $y = k$

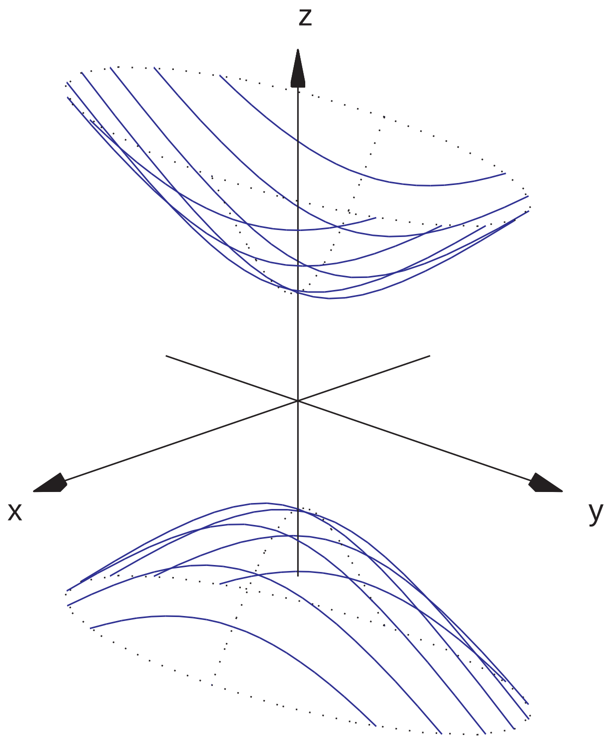


Figura 6.12 – Hiperboloide de duas folhas e interseções com os planos $x = k$

6.1.3 Paraboloide

Paraboloide Elíptico

Um **paraboloide elíptico** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{6.4}$$

em que a, b e c são números reais, sendo a e b positivos.
O paraboloide elíptico (6.4) é simétrico em relação aos planos xz e yz. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6.4), então $(x, -y, z)$ e $(-x, y, z)$ também satisfazem. Ele também é simétrico em relação ao eixo z, pois se (x, y, z) satisfaz (6.4), então $(-x, -y, z)$ também satisfaz.
A interseção do paraboloide elíptico (6.4) com o plano $z = k$, para k tal que $ck > 0$, é a elipse

$$\frac{x^2}{cka^2} + \frac{y^2}{ckb^2} = 1, \quad z = k.$$

A interseção do paraboloide elíptico (6.4) com plano $x = k$ é a parábola

$$z = \frac{k^2}{ca^2} + \frac{y^2}{cb^2}, \quad x = k.$$

A interseção do paraboloide elíptico (6.4) com plano $y = k$ também é uma parábola.
As equações

$$ax = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

e

$$by = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

também representam paraboloides elípticos.

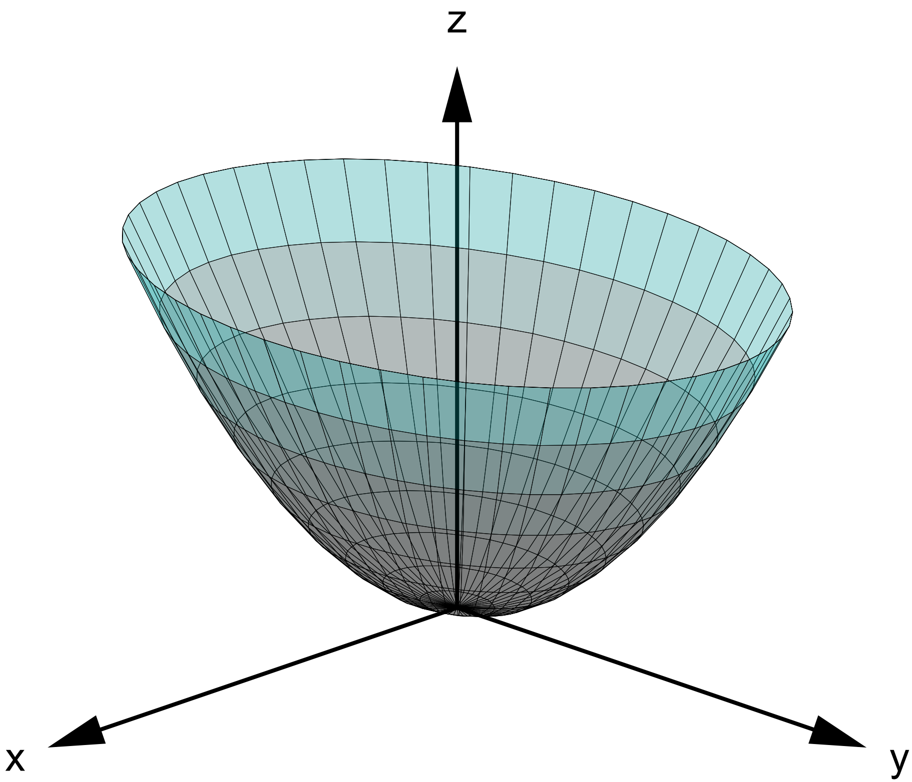


Figura 6.13 – Paraboloide elíptico de equação $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, para $c > 0$

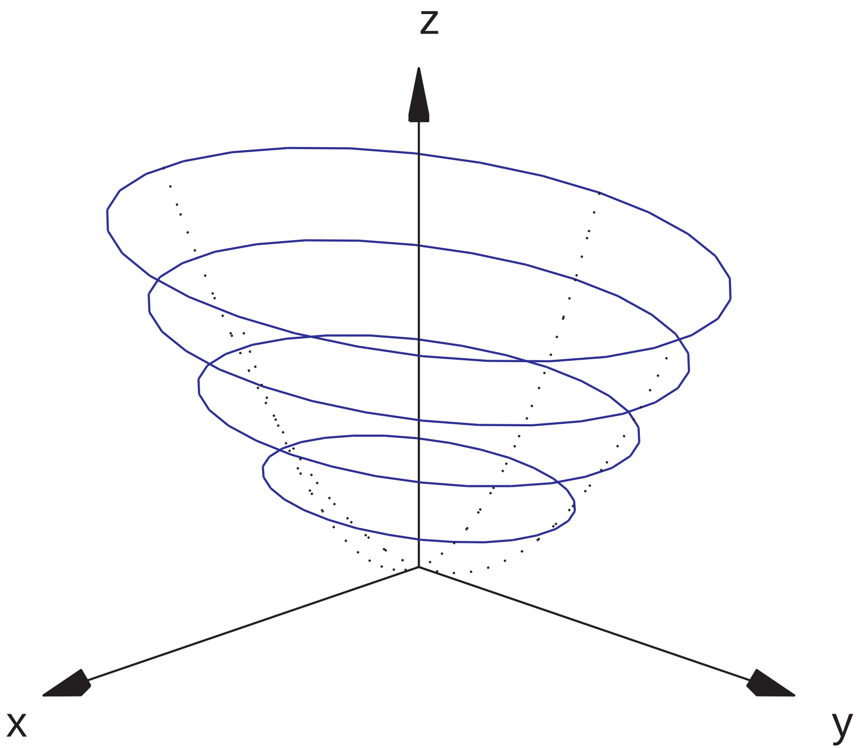


Figura 6.14 – Paraboloide elíptico e interseções com os planos $z = k$

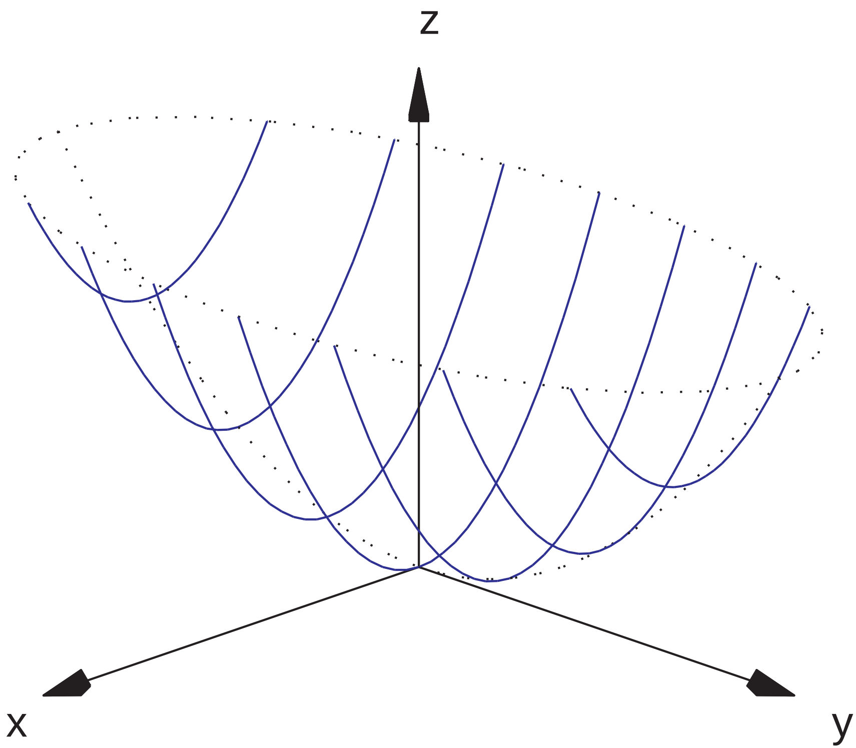


Figura 6.15 – Paraboloide elíptico e interseções com os planos $y = k$

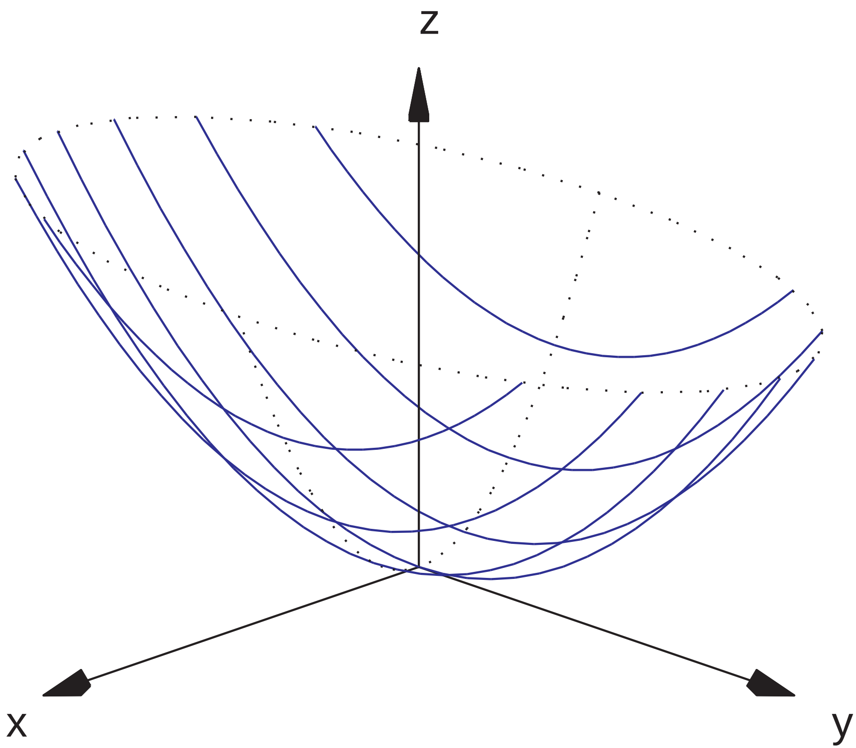


Figura 6.16 – Paraboloide elíptico e interseções com os planos $x = k$

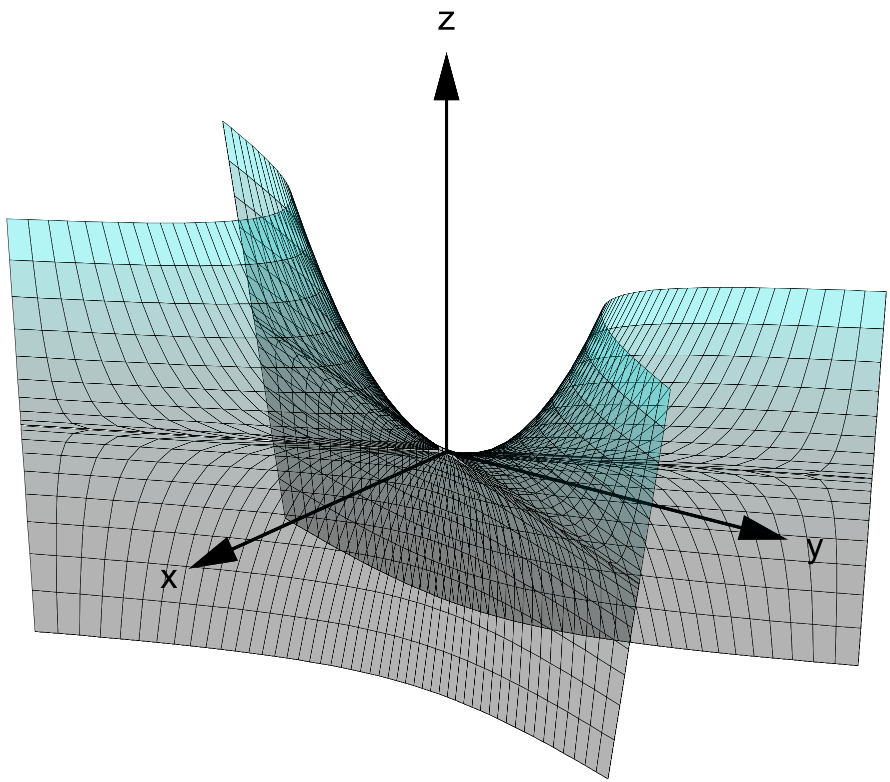


Figura 6.17 – Paraboloide hiperbólico de equação $cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, para $c < 0$

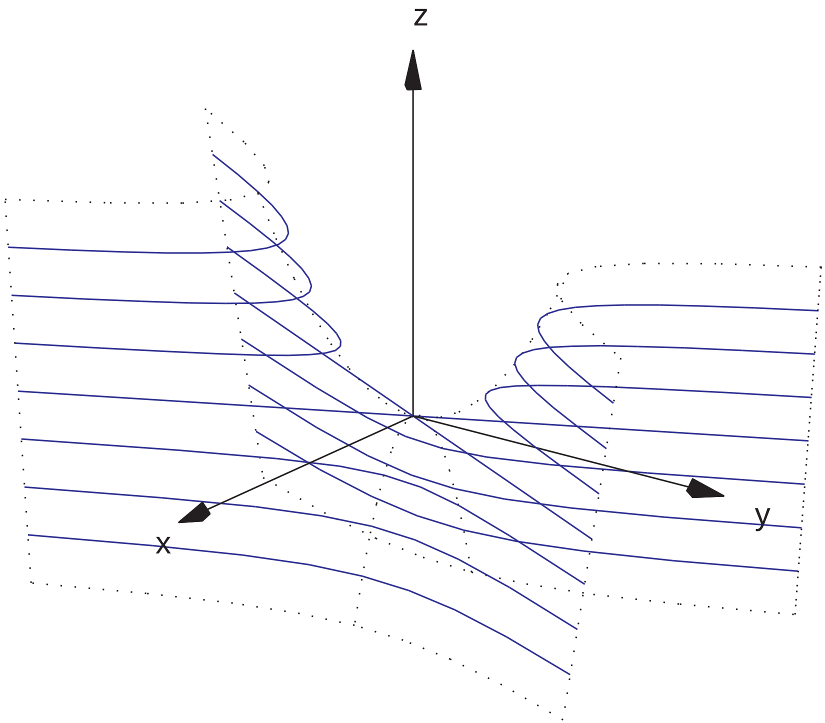


Figura 6.18 – Paraboloide hiperbólico e interseções com os planos $z = k$

Paraboloide Hiperbólico

Um **paraboloide hiperbólico** é um conjunto de pontos que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \tag{6.5}$$

em que a, b e c são números reais, sendo a e b positivos.
O paraboloide hiperbólico (6.5) é simétrico em relação aos planos xz e yz. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6.5), então $(x, -y, z)$ e $(-x, y, z)$ também satisfazem. Ele também é simétrico em relação ao eixo z, pois se (x, y, z) satisfaz (6.5), então $(-x, -y, z)$ também satisfaz.
A interseção do plano $z = k$ com o paraboloide hiperbólico (6.5) é dada por

$$\frac{x^2}{ca^2} - \frac{y^2}{cb^2} = k, \quad z = k,$$

que representa uma hipérbole, se $k \neq 0$ e um par de retas, se $k = 0$.
A interseção do paraboloide hiperbólico (6.5) com plano $y = k$ é a parábola

$$z = \frac{x^2}{ca^2} - \frac{k^2}{cb^2}, \quad y = k$$

que tem concavidade para cima se $c > 0$ e concavidade para baixo se $c < 0$.
A interseção do paraboloide hiperbólico com plano $x = k$ é a parábola

$$z = -\frac{y^2}{cb^2} + \frac{k^2}{ca^2}, \quad x = k$$

que tem concavidade para baixo se $c > 0$ e concavidade para cima se $c < 0$. O paraboloide hiperbólico é também chamado **sela**.
As equações

$$ax = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

e

$$by = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

também representam paraboloides hiperbólicos.

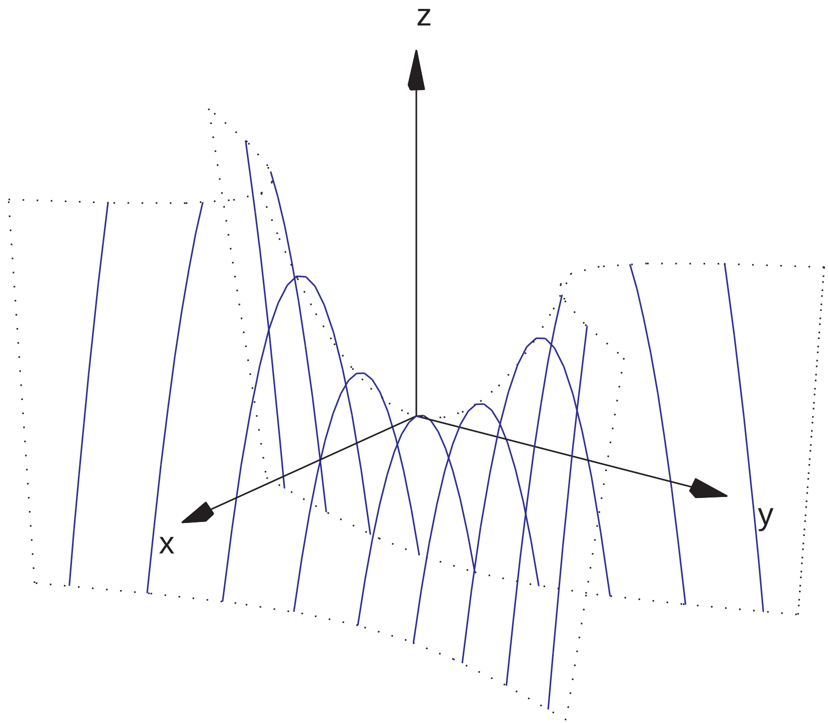


Figura 6.19 – Paraboloide hiperbólico e interseções com os planos $y = k$

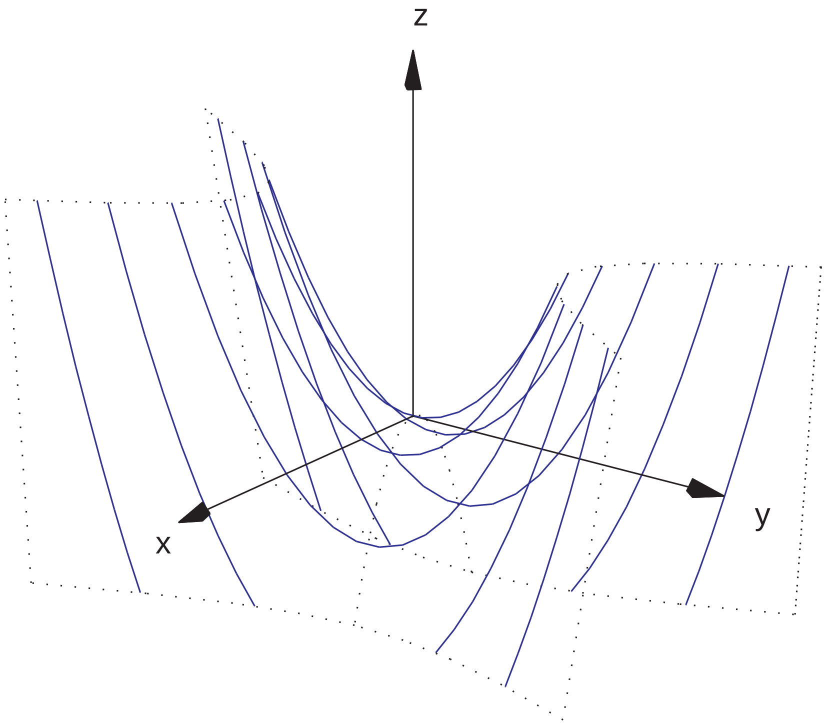


Figura 6.20 – Paraboloide hiperbólico e interseções com os planos $x = k$

6.1.4 Cone Elíptico

Um **cone elíptico** é um conjunto de pontos que satisfaz a equação

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tag{6.6}$$

em que a e b são números reais positivos, em algum sistema de coordenadas. Se $a = b$, o cone é chamado **cone circular**.

Observe que o cone elíptico (6.6) é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem. Pois, se (x, y, z) satisfaz (6.6), então $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ e $(-x, -y, -z)$ também satisfazem.

A interseção do cone elíptico (6.6) com o plano $z = k$, para $k \neq 0$, é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1, \quad z = k.$$

Observe que os eixos da elipse crescem à medida que $|k|$ aumenta.

Os planos xz e yz cortam o cone elíptico (6.6) segundo as retas

$$x = \pm az, \ y = 0 \quad \text{e} \quad y = \pm bz, \ x = 0,$$

respectivamente.

A interseção do cone elíptico (6.6) com o plano $y = k$, para $k \neq 0$, é a hipérbole

$$\frac{z^2}{k^2/b^2} - \frac{x^2}{a^2k^2/b^2} = 1, \quad y = k.$$

A interseção do cone elíptico (6.6) com o plano $x = k$, para $k \neq 0$, é a hipérbole

$$\frac{z^2}{k^2/a^2} - \frac{y^2}{b^2k^2/a^2} = 1, \quad x = k.$$

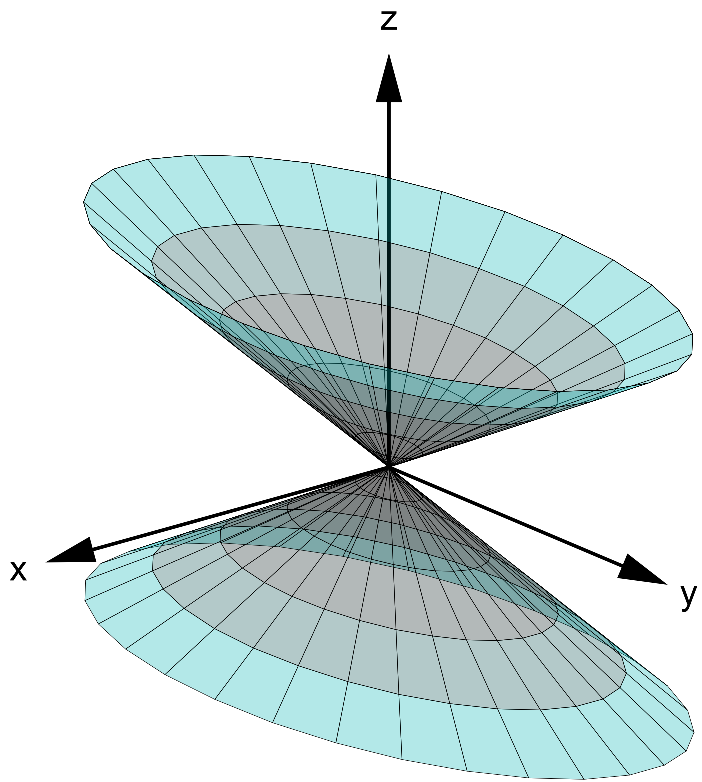


Figura 6.21 – Cone elíptico de equação $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

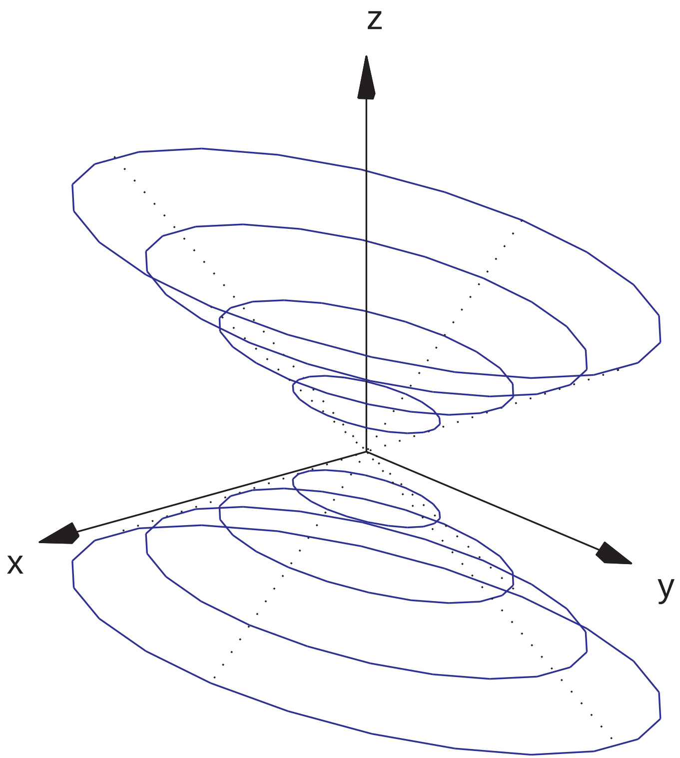


Figura 6.22 – Cone elíptico e interseções com os planos $z = k$

As equações

$$x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

também representam cones elípticos.

6.1.5 Cilindro Quádrico

Um **cilindro quádrico** é um conjunto de pontos do espaço, que em algum sistema de coordenadas satisfaz a equação

$$f(x, y) = 0 \tag{6.7}$$

em que $f(x, y) = 0$ é a equação de uma cônica no plano xy.

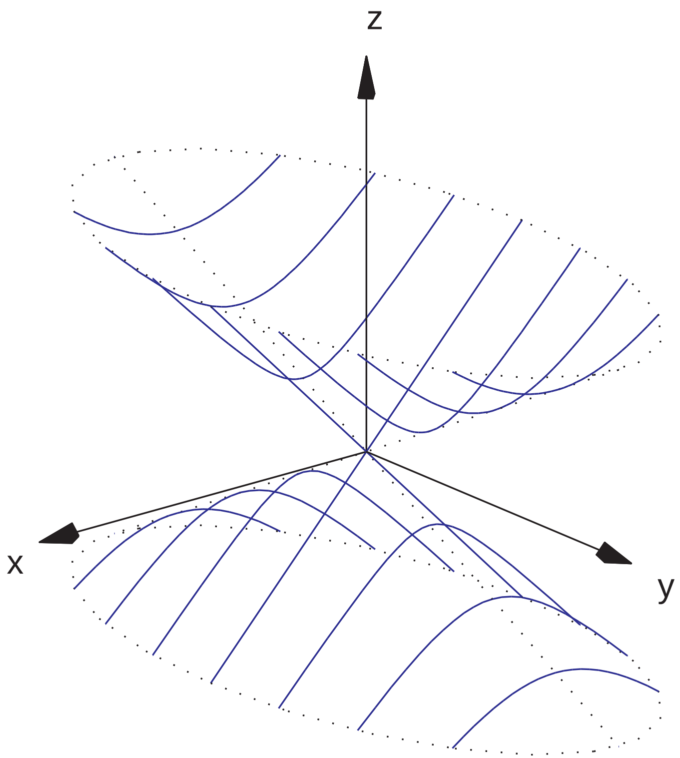


Figura 6.23 – Cone elíptico e interseções com os planos $y = k$

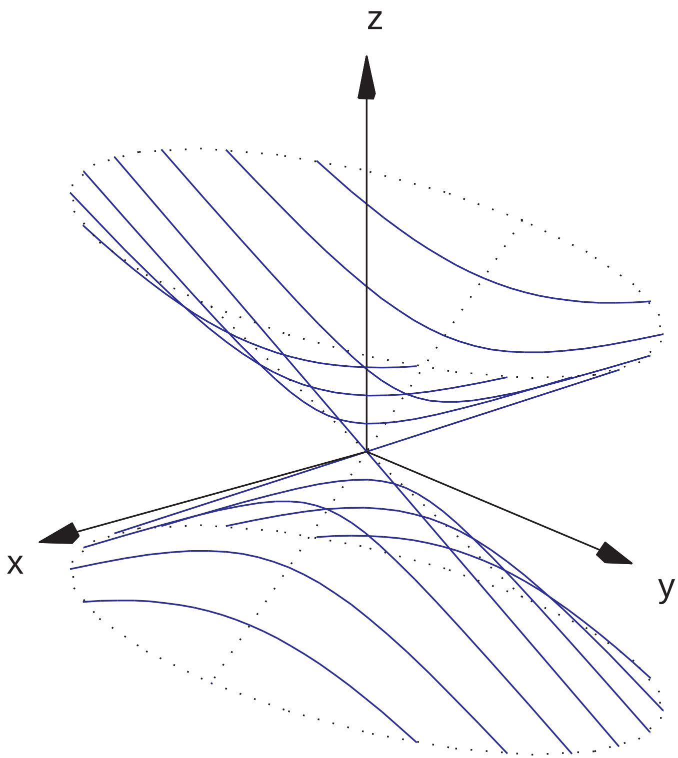


Figura 6.24 – Cone elíptico e interseções com os planos $x = k$

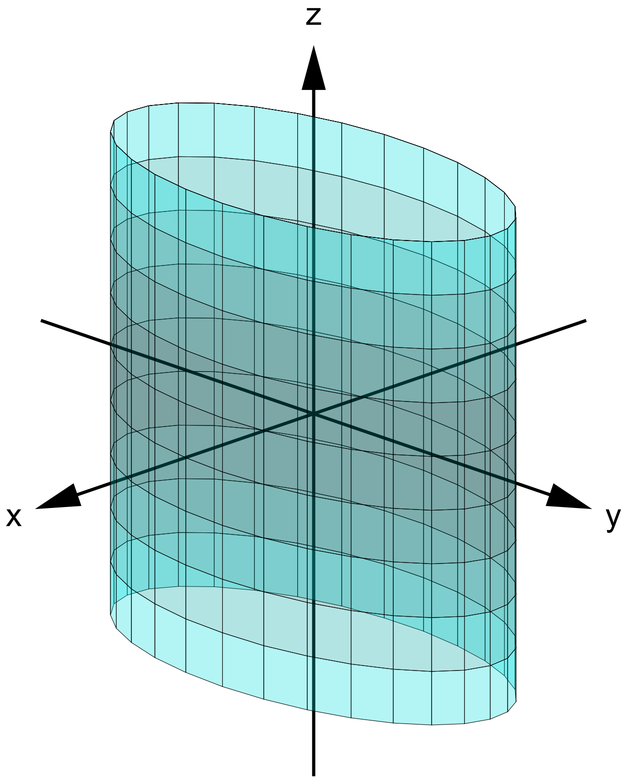


Figura 6.25 – Cilindro elíptico de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

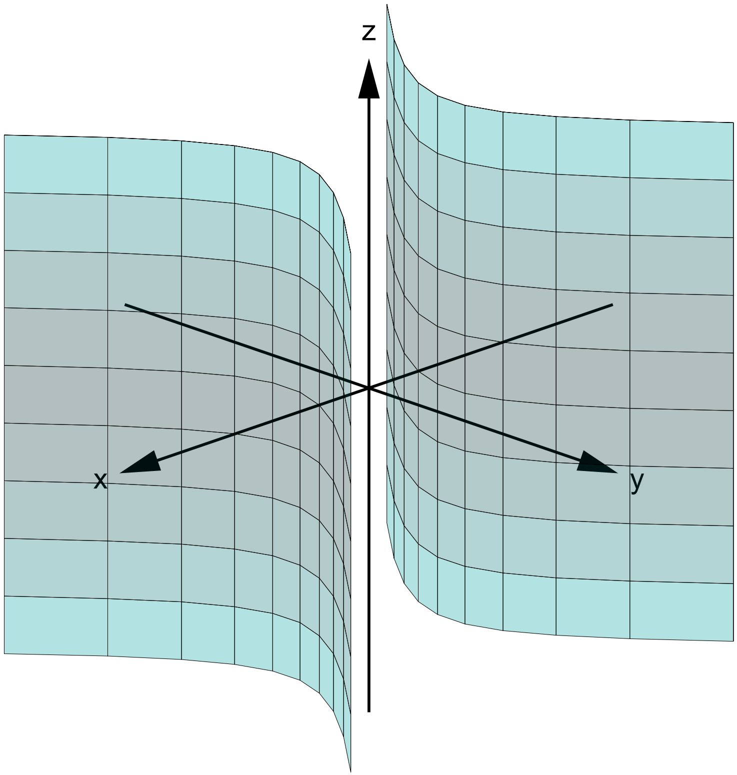


Figura 6.26 – Cilindro hiperbólico de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

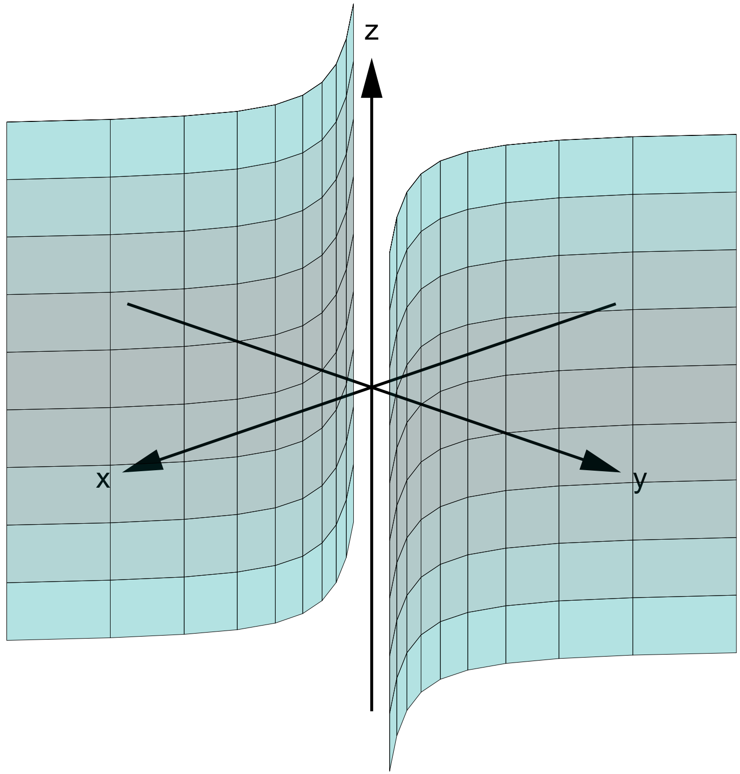


Figura 6.27 – Cilindro hiperbólico de equação $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

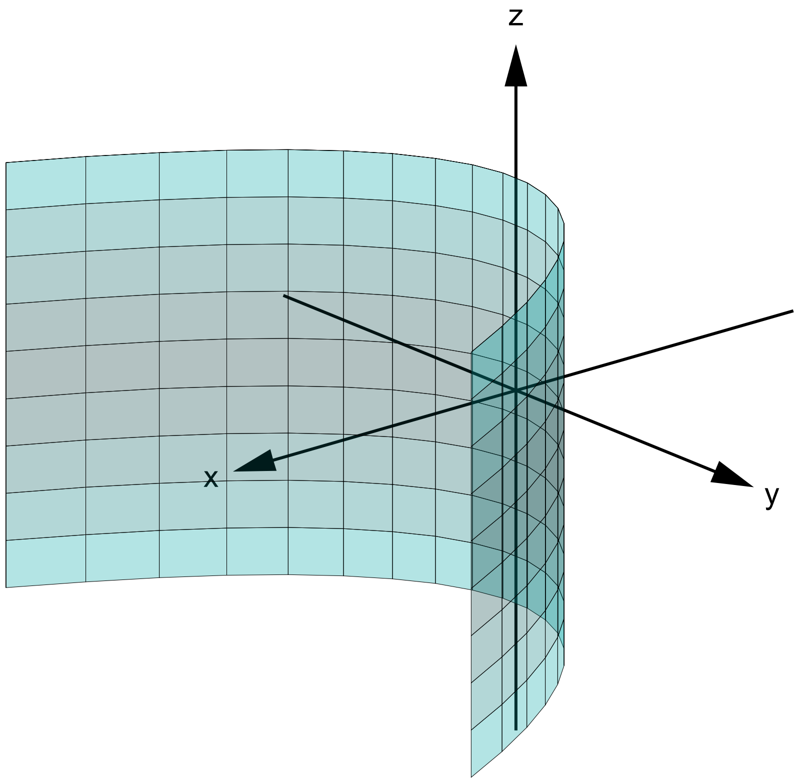


Figura 6.28 – Cilindro parabólico de equação $y^2 = 4px$, $p > 0$

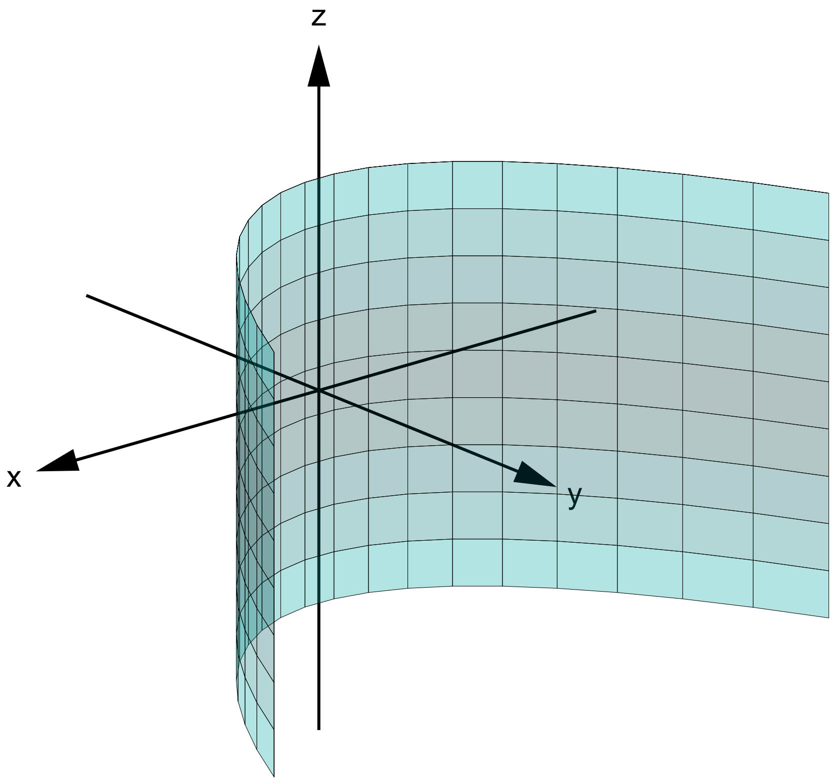


Figura 6.29 – Cilindro parabólico de equação $x^2 = 4py$, $p > 0$

Chamamos o cilindro quádrico de **cilindro elíptico**, se a cônica de equação $f(x,y) = 0$ é uma elipse. Por exemplo, a equação $x^2 + 2y^2 = 1$ representa uma elipse no plano, enquanto representa um cilindro elíptico no espaço. Chamamos o cilindro quádrico de **cilindro hiperbólico**, se a cônica de equação $f(x,y) = 0$ é uma hipérbole. Por exemplo, a equação $x^2 - 2y^2 = 1$ representa uma hipérbole no plano, enquanto representa um cilindro hiperbólico no espaço. Chamamos o cilindro quádrico de **cilindro parabólico**, se a cônica de equação $f(x,y) = 0$ é uma parábola. Por exemplo, a equação $x^2 = 4y$ representa uma parábola no plano, enquanto representa um cilindro parabólico no espaço.
A interseção do plano $z = k$ com o cilindro é a cônica que o originou, chamada **diretriz do cilindro**:

$$f(x,y) = 0, \quad z = k.$$

Se a equação $f(x,k) = 0$ tem m soluções ($m = 0, 1$ ou 2), então o plano $y = k$ intercepta a superfície segundo m retas

$$f(x,y) = 0, \quad y = k.$$

Considerações semelhantes são válidas para a interseção com o plano $x = k$.
As equações

$$g(x,z) = 0 \quad \text{e} \quad h(y,z) = 0$$

também representam cilindros quádricos desde que $g(x,z) = 0$ e $h(y,z) = 0$ sejam equações de cônicas nos planos xz e yz, respectivamente.

Exercícios Numéricos (respostas na página 589)

6.1.1. Reduzir cada uma das equações de forma a identificar a quádrica que ela representa e faça um esboço do seu gráfico:

(a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$

(b) $x^2 + y + z^2 = 0$

(c) $x^2 - 9y^2 = 9$

(d) $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$

6.1.2. Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes do plano $\pi : x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$. Que conjunto é este?

6.1.3. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos que eqüidistam das retas

$$r : (x, y, z) = (0, -1, 0) + t(1, 0, 0) \quad \text{e} \quad s : (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(0, 0, 1).$$

Que lugar geométrico é este?

6.1.4. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a soma das distâncias de P aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual à 6. Que lugar geométrico é este?

6.1.5. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que o módulo da diferença entre as as distâncias de $P = (x, y, z)$ aos dois pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual à 3. Que lugar geométrico é este?

6.2 Superfícies Cilíndricas, Cônicas e de Revolução

6.2.1 Superfícies Cilíndricas

Uma **superfície cilíndrica** é uma superfície que pode ser obtida quando uma reta, chamada **geratriz**, se move paralelamente passando por uma curva fixa, chamada **diretriz**.

Suponhamos que a curva diretriz da superfície cilíndrica $\mathcal{S}$ esteja no plano xy e tenha equação neste plano dada por

$$f(x, y) = 0 \tag{6.8}$$

e que as retas geratrizes sejam paralelas a um vetor que não é paralelo ao plano xy, digamos $V = (a, b, 1)$. Seja $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer sobre $\mathcal{S}$ e $P' = (x', y', 0)$ um ponto do plano xy que está na reta geratriz que passa por P. O ponto (x, y, z) pertence a $\mathcal{S}$ se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P'P}$ é paralelo a V e P' é um ponto da curva diretriz, ou seja,

$$\overrightarrow{P'P} = \lambda V \quad \text{e} \quad f(x', y') = 0,$$

que é equivalente a

$$(x - x', y - y', z) = \lambda(a, b, 1) \quad \text{e} \quad f(x', y') = 0.$$

Destas equações obtemos que $\lambda = z$, $x' = x - az$ e $y' = y - bz$. Assim, a equação da superfície cilíndrica $\mathcal{S}$ que tem curva diretriz no plano xy com equação (6.8) e retas geratrizes paralelas ao vetor $V = (a, b, 1)$ é

$$f(x - az, y - bz) = 0.$$

Resultados análogos são obtidos se a curva diretriz está situada nos planos coordenados yz e xz.

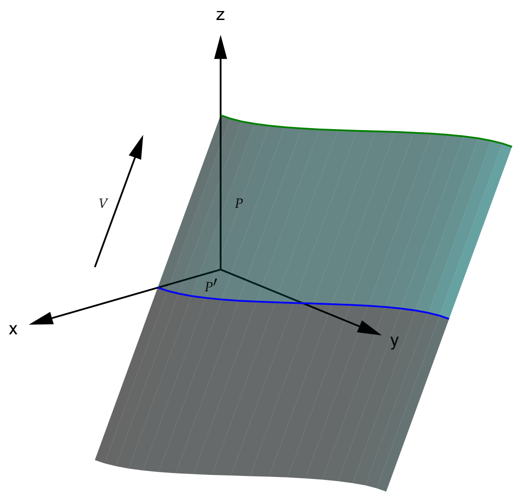


Figura 6.30 – Superfície cilíndrica

Proposição 6.1. *Considere uma superfície cilíndrica.*

(a) *Se a sua curva diretriz está no plano* $\boldsymbol{xy}$ *com equação neste plano dada por*

$$f(x, y) = 0$$

e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $V = (a, b, 1)$, *então a sua equação é*

$$f(x - az, y - bz) = 0.$$

(b) *Se a sua curva diretriz está no plano* $\boldsymbol{yz}$ *com equação neste plano dada por*

$$f(y, z) = 0$$

e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $V = (1, b, c)$, *então a sua equação é*

$$f(y - bx, z - cx) = 0.$$

(c) *Se a sua curva diretriz está no plano* $\boldsymbol{xz}$ *com equação neste plano dada por*

$$f(x, z) = 0$$

e as retas geratrizes são paralelas ao vetor $V = (a, 1, c)$, *então a sua equação é*

$$f(x - ay, z - cy) = 0.$$

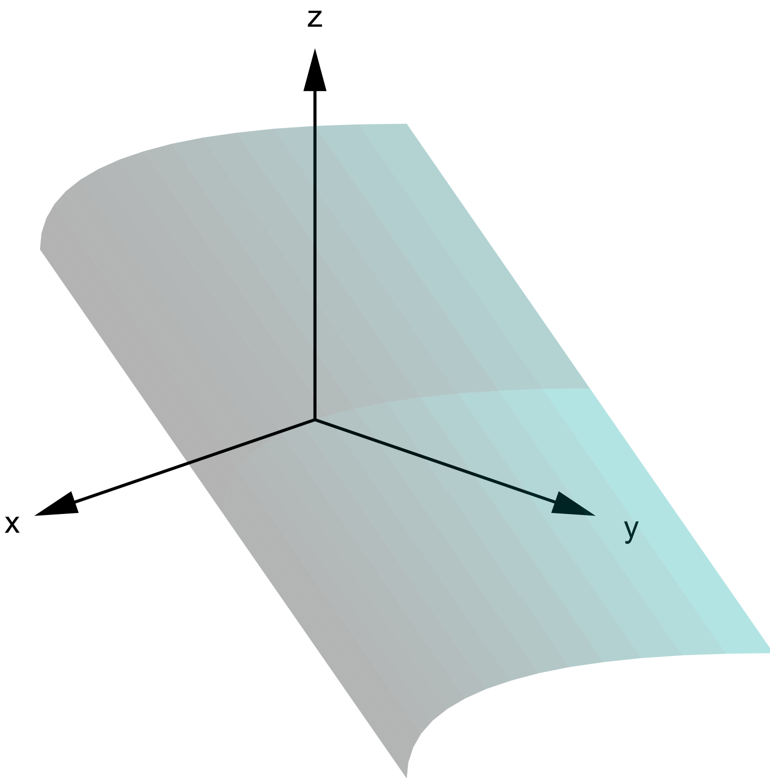


Figura 6.31 – Superfície cilíndrica com diretrizes paralelas ao vetor $W = (1, -2, 3)$ e curva geratriz $x^2 - 4y = 0$, $z = 0$

Exemplo 6.1. Vamos determinar a equação da superfície cilíndrica que tem como curva diretriz no plano xy a parábola de equação $x^2 - 4y = 0$ e retas diretrizes paralelas ao vetor $W = (1, -2, 3)$. Para obtermos um vetor que tem a 3ª componente igual à 1 multiplicamos o vetor W por $1/3$ obtendo o vetor $V = (1/3, -2/3, 1)$ que também é paralelo às retas geratrizes. A equação da superfície é então

$$(x - z/3)^2 - 4(y + 2z/3) = 0.$$

Consideremos o problema inverso, ou seja, uma superfície de equação

$$F(x, y, z) = 0$$

é uma superfície cilíndrica se puder ser escrita na forma

$$f(x - az, y - bz) = 0 \quad \text{ou} \quad f(y - bx, z - cx) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x - ay, z - cy) = 0.$$

Exemplo 6.2. Vamos mostrar que a superfície de equação

$$-3x^2 + 3y^2 + 2xz + 4yz + z^2 = 27$$

é uma superfície cilíndrica. Fazendo $z = 0$ obtemos a curva candidata a diretriz no plano xy

$$-3x^2 + 3y^2 = 27$$

Agora, substituindo-se x por $x - \alpha z$ e y por $y - \beta z$ na equação da candidata a curva diretriz obtemos

$$-3(x - \alpha z)^2 + 3(y - \beta z)^2 = -3x^2 + 3y^2 + 6\alpha xz - 6\beta yz + (-3\alpha^2 + 3\beta^2)z^2 = 27.$$

Comparando-se com a equação da superfície obtemos que

$$\alpha = 1/3 \quad \text{e} \quad \beta = -2/3$$

Portanto, a superfície é cilíndrica com retas geratrizes paralelas ao vetor $V = (1/3, -2/3, 1)$ e com curva diretriz $-3x^2 + 3y^2 = 27$.

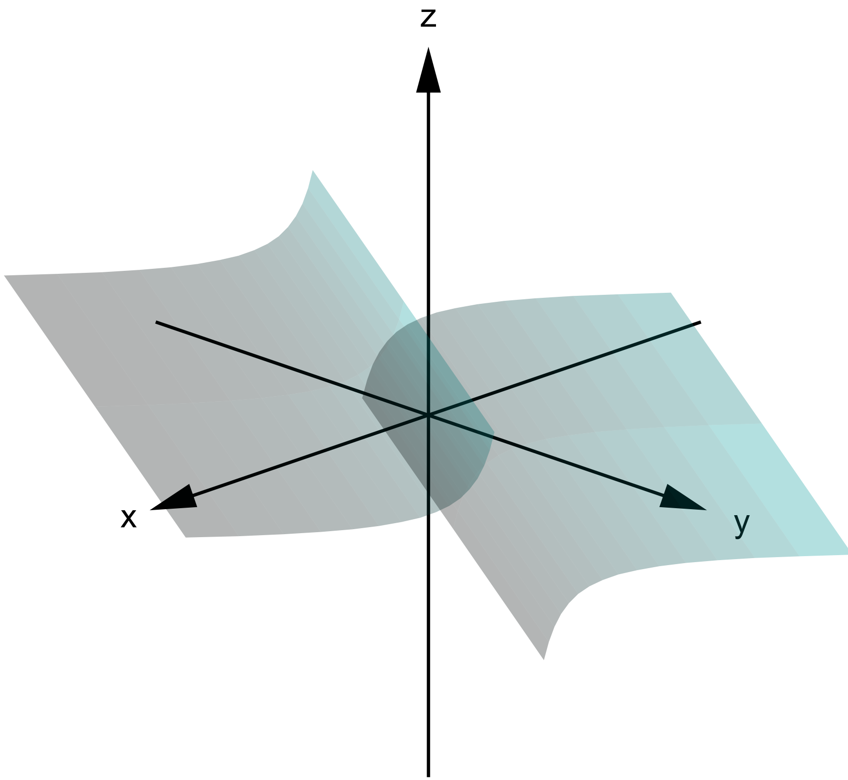


Figura 6.32 – Superfície cilíndrica de equação $-3x^2 + 3y^2 + 2xz + 4yz + z^2 = 27$

6.2.2 Superfícies Cônicas

Uma **superfície cônica** é uma superfície que pode ser obtida quando uma reta se move de maneira que sempre passa por uma curva fixa, chamada **diretriz**, e por um ponto fixo, chamado **vértice**, não situado no plano da geratriz.
Suponhamos que a curva diretriz da superfície cônica $\mathcal{S}$ esteja no plano $z = c$ e tenha equação neste plano dada por

$$f(x, y) = 0 \tag{6.9}$$

e que o vértice esteja na origem $O = (0, 0, 0)$. Seja $P = (x, y, z)$ uma ponto qualquer de $\mathcal{S}$ e $P' = (x', y', c)$ o ponto da curva diretriz situado na reta que une P à origem. O ponto P pertence a $\mathcal{S}$ se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{OP}$ é paralelo a $\overrightarrow{OP'}$ e P' é um ponto da curva diretriz, ou seja,

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OP'} \quad \text{e} \quad f(x', y') = 0,$$

que é equivalente a

$$(x, y, z) = \lambda(x', y', c) \quad \text{e} \quad f(x', y') = 0.$$

Destas equações obtemos que $\lambda = z/c$, $x' = cx/z$ e $y' = cy/z$. Assim, a equação da superfície cônica $\mathcal{S}$ que tem curva diretriz no plano $z = c$ com equação (6.9) e vértice na origem é

$$f(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}) = 0.$$

Resultados análogos são obtidos se a curva diretriz está situada nos planos $y = b$ e $x = a$.

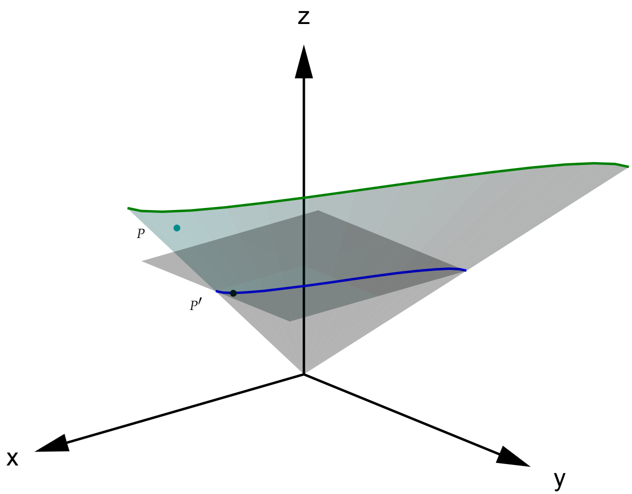


Figura 6.33 – Superfície cônica

Proposição 6.2. *Considere uma superfície cônica.*

(a) *Se a sua curva diretriz está no plano $z = c$ com equação neste plano dada por*

$$f(x,y) = 0$$

e o vértice está na origem, então a sua equação é

$$f(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}) = 0.$$

(b) *Se a sua curva diretriz está no plano $x = a$ com equação neste plano dada por*

$$f(y,z) = 0$$

e o vértice está na origem, então a sua equação é

$$f(\frac{ay}{x}, \frac{az}{x}) = 0.$$

(c) *Se a sua curva diretriz está no plano $y = b$ com equação neste plano dada por*

$$f(x,z) = 0$$

e o vértice está na origem, então a sua equação é

$$f(\frac{bx}{y}, \frac{bz}{y}) = 0.$$

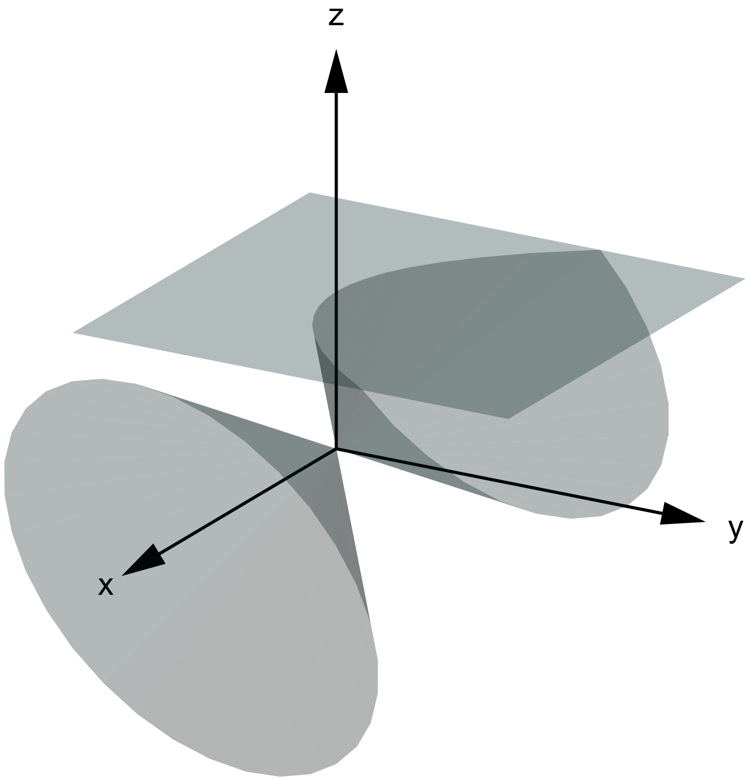


Figura 6.34 – Superfície cônica cuja curva diretriz é $x^2 - 2y = 0, z = 1$.

Exemplo 6.3. Considere a parábola situada no plano $z = 1$ de equação

$$x^2 = 2y.$$

A equação da superfície cônica cuja curva diretriz é esta parábola e com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ é obtida trocando-se x por x/z e y por y/z na equação acima. Ou seja,

$$(x/z)^2 = 2(y/z).$$

ou

$$x^2 = 2yz.$$

Consideremos o problema inverso, ou seja, uma superfície de equação

$$F(x, y, z) = 0$$

é uma superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ se sempre que um ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ pertence a ela, então a reta que passa pela origem e por P está contida na superfície. Ou seja, se um ponto $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ satisfaz a equação da superfície, então o ponto $P' = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ também satisfaz, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6.4. A superfície de equação

$$4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0,$$

é uma superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$, pois se (x, y, z) satisfaz a equação acima, então também $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Fazendo $z = 1$ obtemos a curva diretriz no plano $z = 1$ de equação

$$4x^2 - y^2 + 4 = 0,$$

que é uma hipérbole.

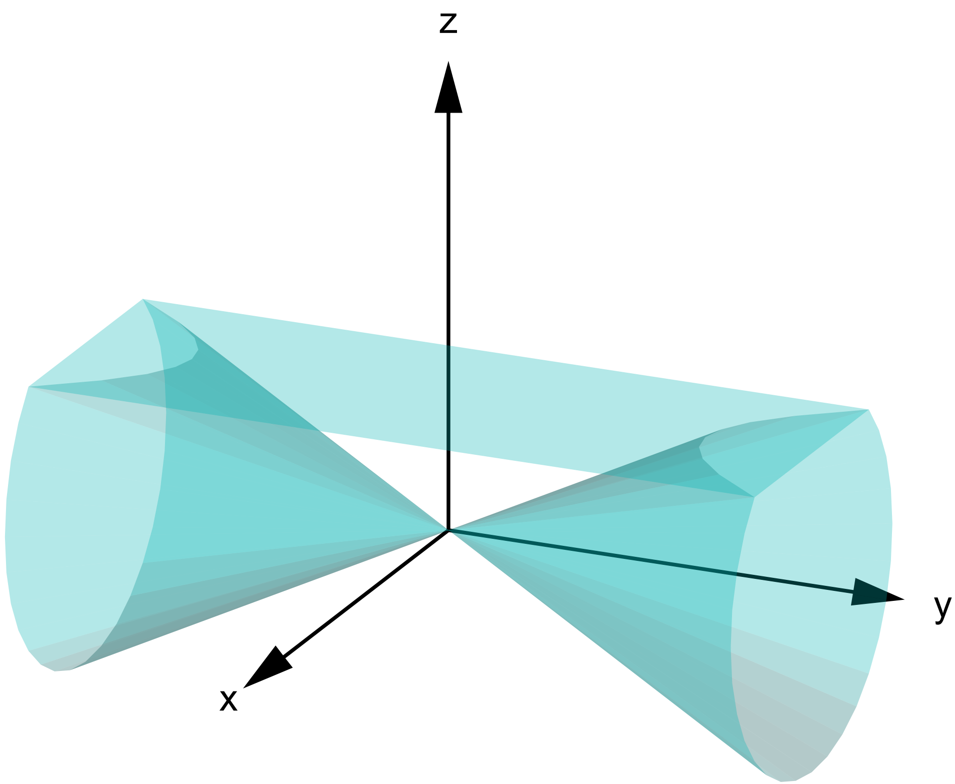


Figura 6.35 – Superfície cônica de equação $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$.

6.2.3 Superfícies de Revolução

Uma **superfície de revolução** é uma superfície que pode ser obtida pela rotação de uma curva plana, chamada **geratriz**, em torno de uma reta fixa, chamada **eixo (de revolução)**, no plano da referida curva. Cada ponto em cima da geratriz descreve uma circunferência em torno do eixo. Esta circunferência é chamada **paralelo** da superfície e cada posição da curva geratriz é chamada **seção meridiana**.
Se o eixo de revolução é o eixo z e uma curva geratriz que está situada no plano yz tem equação neste plano dada por

$$f(y,z) = 0, \tag{6.10}$$

então o paralelo que tem altura igual à z é uma circunferência de raio dado por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por outro lado, um dos pares (r,z) ou $(-r,z)$ satisfaz a equação (6.10), pois o paralelo intercepta o plano yz nos pontos $P' = (0,r,z)$ e $P'' = (0,-r,z)$. Assim, o ponto $P = (x,y,z)$ satisfaz a equação

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \quad \text{ou} \quad f(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{6.11}$$

Se uma curva geratriz que está situada no plano xz tem equação neste plano dada por

$$f(x,z) = 0, \tag{6.12}$$

então o paralelo que tem altura igual à z é uma circunferência de raio dado por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por outro lado, um dos pares (r,z) ou $(-r,z)$ satisfaz a equação (6.12), pois o paralelo intercepta o plano xz nos pontos $(r,0,z)$ e $(-r,0,z)$. Assim, o ponto (x,y,z) satisfaz a equação

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \quad \text{ou} \quad f(-\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{6.13}$$

Resultados análogos são obtidos quando o eixo de revolução é o eixo x e o eixo y.

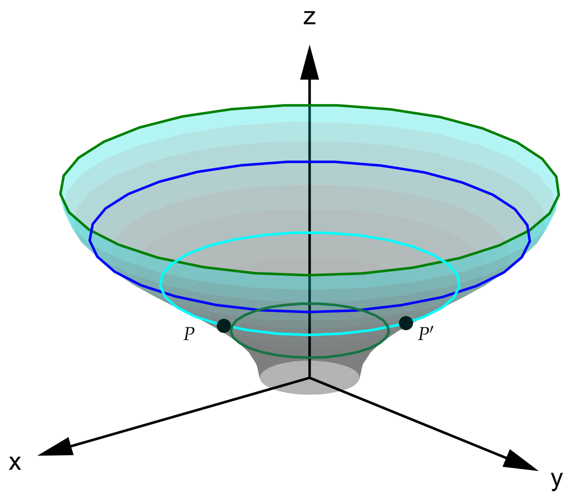


Figura 6.36 – Superfície de revolução em torno do eixo z

Proposição 6.3. *Considere uma superfície de revolução.*

(a) *Se o seu eixo de revolução é o eixo* $\boldsymbol{x}$ *e a curva geratriz está situada no plano* $\boldsymbol{xz}$ *com equação neste plano dada por* $f(x,z) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

Se a curva geratriz está situada no plano $\boldsymbol{xy}$ *com equação neste plano dada por* $f(x,y) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

(b) *Se o seu eixo de revolução é o eixo* $\boldsymbol{y}$ *e a curva geratriz está situada no plano* $\boldsymbol{yz}$ *com equação neste plano dada por* $f(y,z) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

Se a curva geratriz está situada no plano $\boldsymbol{xy}$ *com equação neste plano dada por* $f(x,y) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0.$$

(c) *Se o seu eixo de revolução é o eixo* $\boldsymbol{z}$ *e a curva geratriz está situada no plano* $\boldsymbol{yz}$ *com equação neste plano dada por* $f(y,z) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Se a curva geratriz está situada no plano $\boldsymbol{xz}$ *com equação neste plano dada por* $f(x,z) = 0$, *então a equação da superfície é*

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Exemplo 6.5. (a) Considere a elipse situada no plano xz de equação neste plano dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta elipse em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação de um elipsoide.

(b) Considere a hipérbole situada no plano xz de equação neste plano dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta hipérbole em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação de um hiperboloide de uma folha.

(c) Considere a hipérbole situada no plano xy de equação neste plano dada por

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

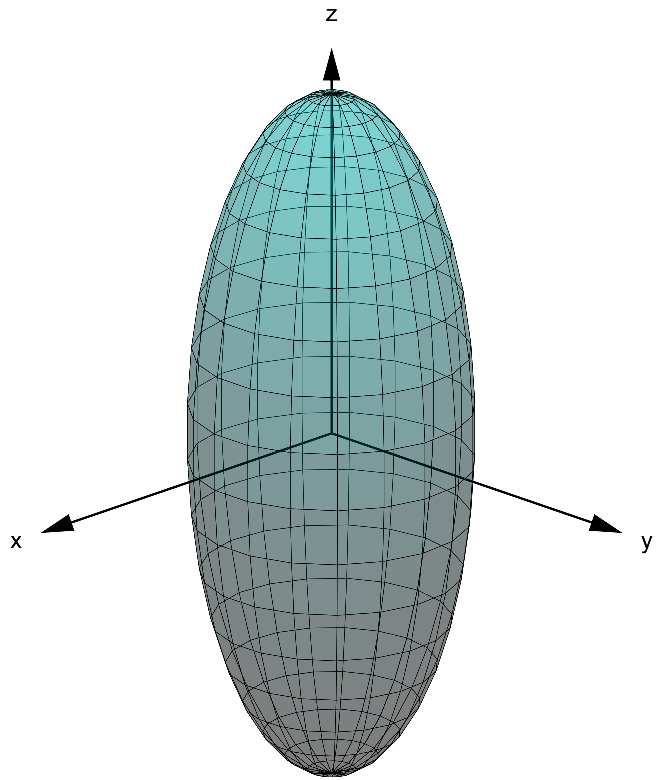


Figura 6.37 – Elipsoide de revolução em torno do eixo z

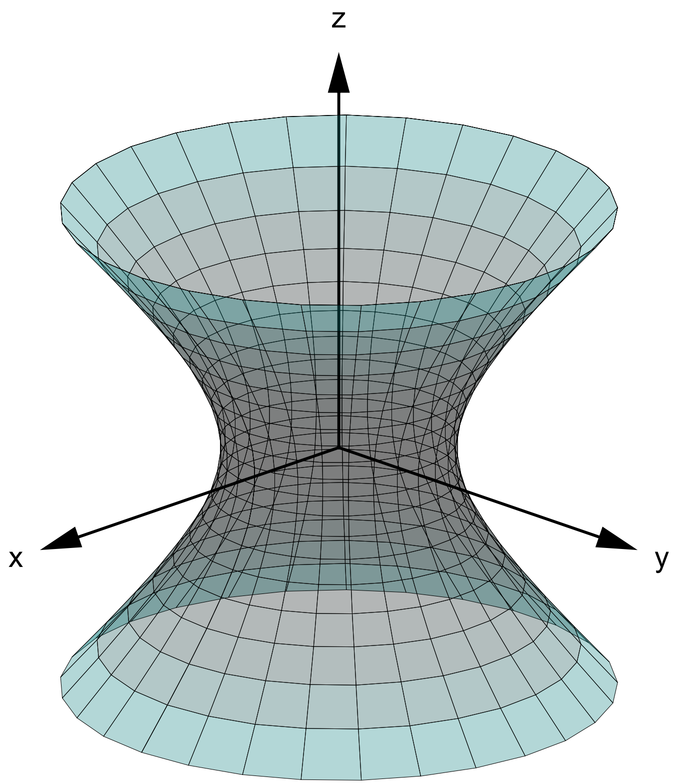


Figura 6.38 – Hiperboloide de uma folha de revolução em torno do eixo z

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta hipérbole em torno do eixo y é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação de um hiperboloide de duas folhas.

(d) Considere a parábola situada no plano xz de equação neste plano dada por

$$z = \frac{x^2}{a^2}$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta parábola em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$

que é a equação de um paraboloide elíptico.

(e) Considere a reta situada no plano xz de equação neste plano dada por

$$z = \frac{x}{a}.$$

A equação da superfície de revolução gerada pela rotação desta reta em torno do eixo z é obtida trocando-se x por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ na equação acima. Ou seja,

$$z = \frac{\pm\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

que é equivalente à equação

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$

que é a equação de um cone circular.

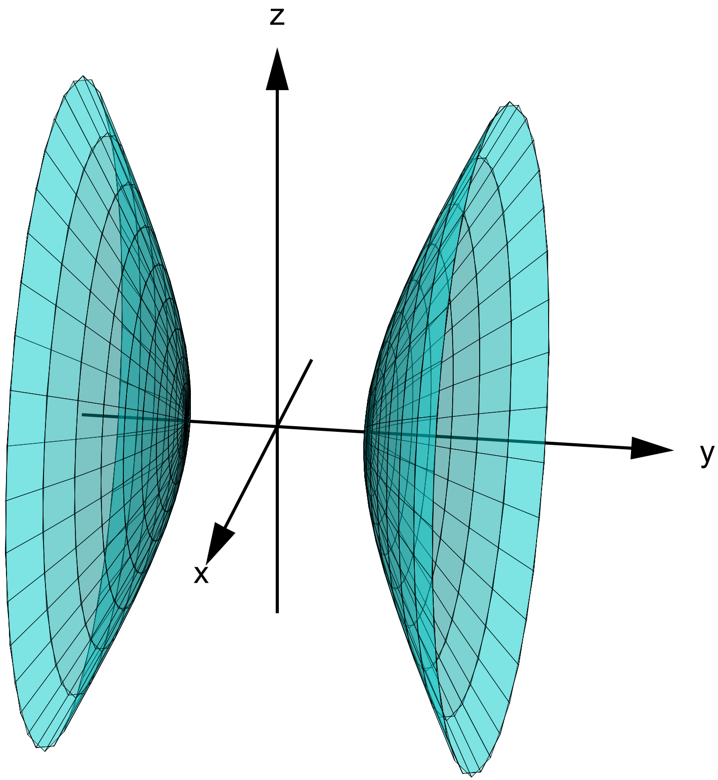


Figura 6.39 – Hiperboloide de duas folhas de revolução em torno do eixo y

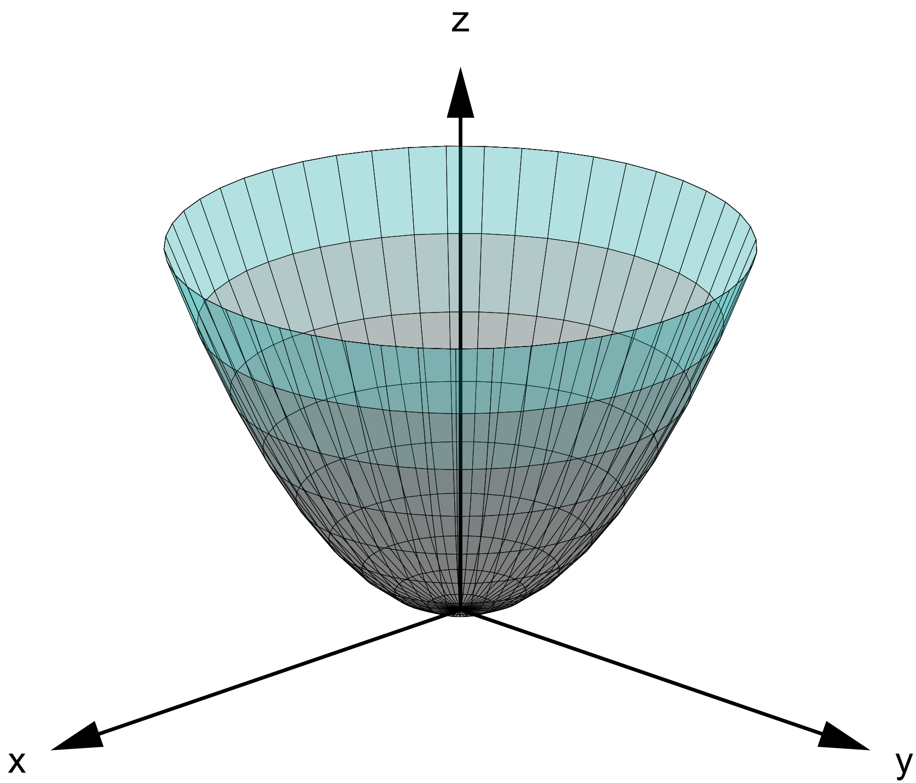


Figura 6.40 – Paraboloide elíptico de revolução em torno do eixo z

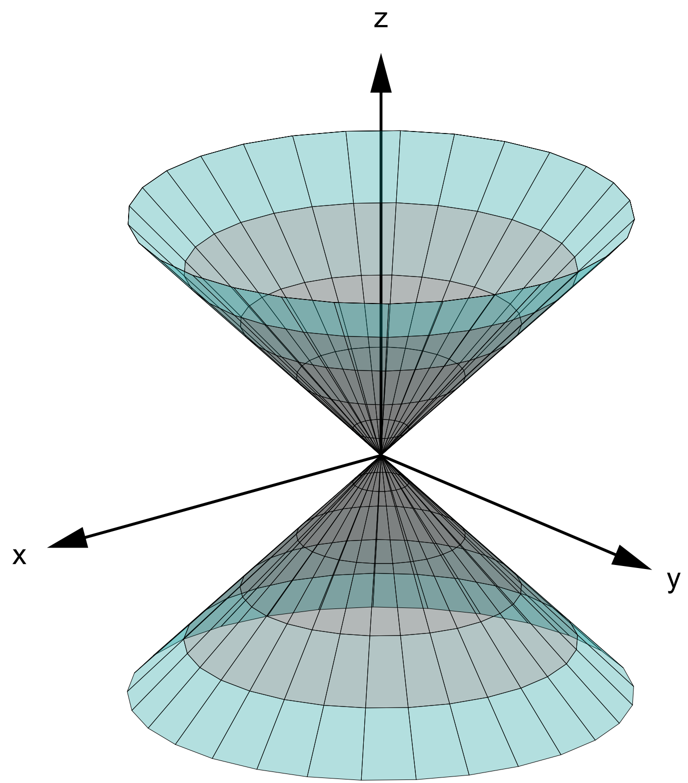


Figura 6.41 – Cone elíptico de revolução em torno do eixo z

Consideremos o problema inverso, ou seja, uma superfície de equação

$$F(x, y, z) = 0$$

é uma superfície de revolução em torno de um dos eixos coordenados se as intercessões da superfície com planos perpendiculares ao referido eixo são circunferências com centros no referido eixo.

Exemplo 6.6. A superfície de equação

$$x^2 + y^2 = (\cos(\pi z) - 3/2)^2$$

é de uma superfície de revolução, pois fazendo $z = k$ obtemos a equação de uma circunferência neste plano

$$x^2 + y^2 = (\cos(\pi k) - 3/2)^2$$

Exemplo 6.7. (a) Um elipsoide que tem dois dos seus parâmetros iguais é um elipsoide de revolução. Por exemplo,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

são equações de elipsoides de revolução. O primeiro, em torno do eixo z, o segundo, em torno do eixo x e o terceiro, em torno do eixo y.

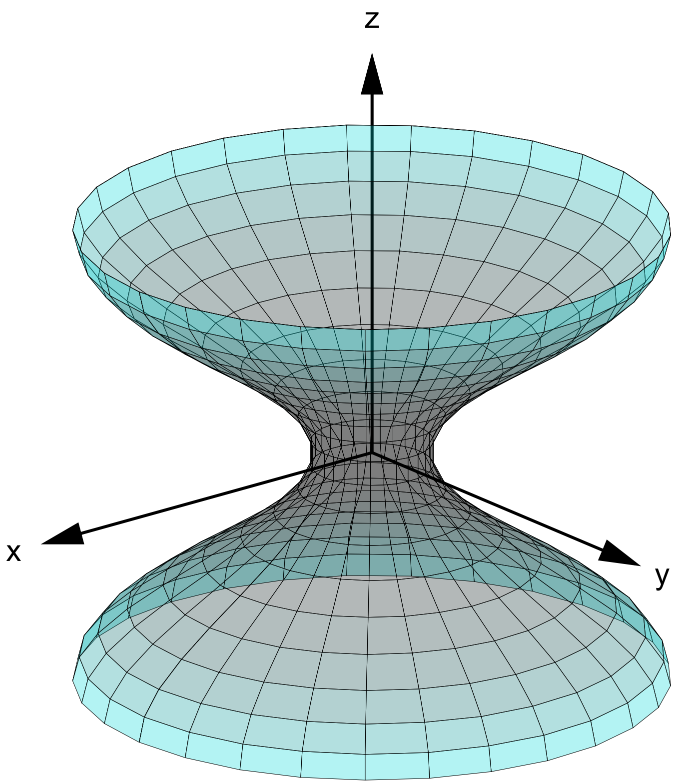


Figura 6.42 – Superfície de revolução em torno do eixo z de equação $x^2 + y^2 = (\cos(\pi z) - 3/2)^2$

(b) O hiperboloide de uma folha que tem os parâmetros iguais associados aos termos de sinal positivo é um hiperboloide uma folha de revolução. Por exemplo,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

são equações de hiperboloides de uma folha de revolução. O primeiro, em torno do eixo z, o segundo, em torno do eixo x e o terceiro, em torno do eixo y.

(c) O hiperboloide de duas folhas que tem os parâmetros iguais associados aos termos de sinal negativo é um hiperboloide duas folhas de revolução. Por exemplo,

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=1,$$

são equações de hiperboloides de duas folhas de revolução. O primeiro, em torno do eixo z, o segundo, em torno do eixo x e o terceiro, em torno do eixo y.

(d) O cone circular de equação

$$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2},$$

pode ser obtido pela rotação da reta situada no plano xz de equação $z=\frac{x}{a}$ em torno do eixo z.

Exercícios Numéricos

6.2.1. Dadas as equações da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes determine a equação da superfície cilíndrica

(a) $y^2 = 4x$, $z = 0$ e $V = (1, -1, 1)$

(b) $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ e $V = (2, 1, -1)$

(c) $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$ e $V = (0, 2, -1)$

(d) $4x^2 + z^2 + 4z = 0$, $y = 0$ e $V = (4, 1, 0)$

6.2.2. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cilíndrica e determine a equação da curva diretriz e um vetor paralelo às retas geratrizes

(a) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$

(b) $x^2 + y + 5z^2 + 2xz + 4yz - 4 = 0$

(c) $17x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$

(d) $xz + 2yz - 1 = 0$

6.2.3. Dadas as equações da curva diretriz determine a equação da superfície cônica que tem vértice na origem $O = (0, 0, 0)$.

(a) $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 2$

(b) $xz = 1$ e $y = 1$

(c) $y = x^2$ e $z = 2$

(d) $x^2 - 4z^2 = 4$ e $y = 3$

6.2.4. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície cônica com vértice na origem $O = (0, 0, 0)$ e determine a equação de uma curva diretriz

(a) $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 0$

(b) $4z^3 - x^2y = 0$

(c) $8y^4 - yz^3 = 0$

(d) $xy + xz + yz = 0$

6.2.5. Determine a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo especificado.

(a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ e $z = 0$ em torno do eixo y

(b) $x^2 - 2z^2 + 4z = 6$ e $y = 0$ em torno do eixo x

(c) $yz = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo z

(d) $z = e^x$ e $y = 0$ em torno do eixo z

6.2.6. Mostre que cada uma das equações representa uma superfície de revolução e determine o seu eixo de revolução e a equação de uma curva geratriz

(a) $x^2 + y^2 - z^3 = 0$

(b) $x^2 + z^2 = 4$

(c) $y^6 - x^2 - z^2 = 0$

(d) $x^2y^2 + x^2z^2 = 1$

Exercícios Teóricos

6.2.7. Mostre que conjunto dos pontos do espaço que satisfazem uma equação da forma

$$f(x,y) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x,z) = 0 \quad \text{ou} \quad f(y,z) = 0$$

representa uma superfície cilíndrica que tem retas geratrizes paralelas ao eixo cuja variável não aparece na equação. Equação esta que é também a equação da curva diretriz no plano coordenado correspondente às variáveis que aparecem na equação.

6.2.8. Mostre que a equação de uma superfície cônica com vértice num ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e curva diretriz situada no plano $z = c$ com equação $f(x,y) = 0$ é

$$f\left(x_0 + \frac{c - z_0}{z - z_0}(x - x_0), y_0 + \frac{c - z_0}{z - z_0}(y - y_0)\right) = 0.$$

6.3 Coordenadas Cilíndricas, Esféricas e Equações Paramétricas

6.3.1 Coordenadas Cilíndricas

Até agora vimos usando o chamado **sistema de coordenadas cartesianas**, em que um ponto no espaço é localizado em relação a três retas fixas perpendiculares entre si. Vamos definir um outro sistema de coordenadas chamado de **sistema de coordenadas cilíndricas** em que um ponto do espaço é localizado em relação a duas retas (usualmente o eixo z e o eixo x do sistema cartesiano) e um ponto (usualmente a origem O do sistema cartesiano).

No sistema de coordenadas cilíndricas um ponto no espaço é localizado da seguinte forma. Passa-se por P uma reta paralela ao eixo z. Seja P' o ponto em que esta reta intercepta o plano xy. Sejam (r, θ) as coordenadas polares de P' no plano xy. As coordenadas cilíndricas do ponto P são as coordenadas polares de P' juntamente com a terceira coordenada retangular, z, de P e são escritas na forma (r, θ, z).

Segue facilmente as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas cilíndricas.

Proposição 6.4. *Suponha que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares no plano* $\boldsymbol{xy}$ *coincidem com a origem e o eixo* $\boldsymbol{x}$ *do sistema de coordenadas cartesianas no plano* $\boldsymbol{xy}$*, respectivamente. Então a transformação entre os sistemas de coordenadas cilíndricas e o de coordenadas cartesianas podem ser realizadas pelas equações*

$$x = r\cos\theta \quad e \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad e \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad se \;\; x^2+y^2 \neq 0$$

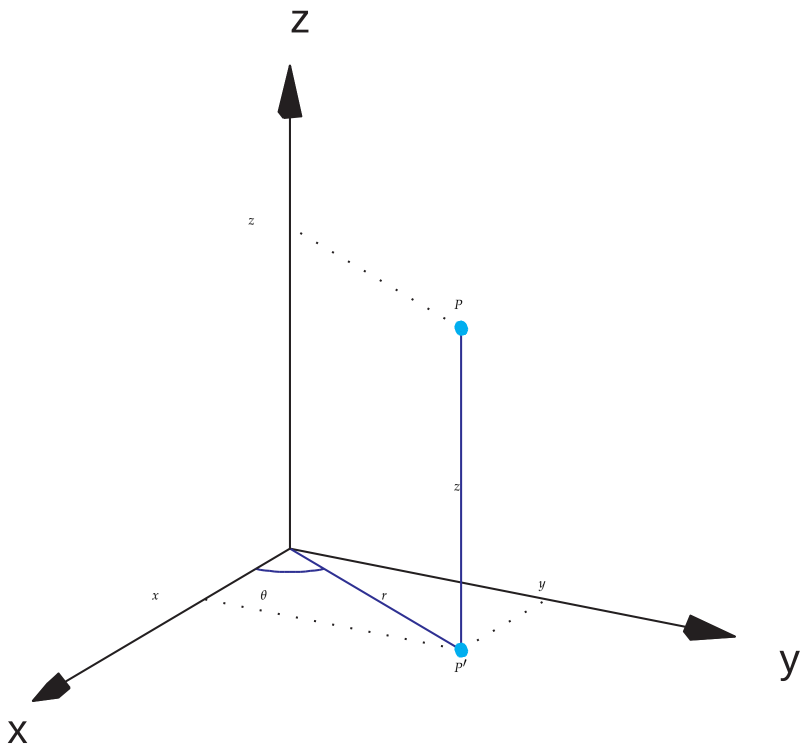


Figura 6.43 – Coordenadas cilíndricas e cartesianas de um ponto P no espaço

Exemplo 6.8. Vamos determinar a equação em coordenadas cilíndricas do paraboloide elíptico de equação

$$x^2 + y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r\cos\theta$ e y por $\operatorname{sen}\theta$ obtemos

$$r^2 = a^2 z.$$

Exemplo 6.9. Vamos determinar a equação em coordenadas cilíndricas do paraboloide hiperbólico de equação

$$y^2 - x^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r\cos\theta$ e y por $r\operatorname{sen}\theta$ obtemos

$$-r^2\cos 2\theta = a^2 z.$$

Exemplo 6.10. Vamos determinar a equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é

$$r = a\operatorname{sen}\theta.$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação por r obtemos

$$r^2 = ar\operatorname{sen}\theta.$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$ e $r\operatorname{sen}\theta = y$, então obtemos

$$x^2 + y^2 = ay,$$

que é a equação de um cilindro gerado pela circunferência no plano xy de equação em coordenadas polares é $r = a\operatorname{sen}\theta$, ou seja, uma circunferência com raio $a/2$ e centro no ponto cujas coordenadas cartesianas são $(0, a/2)$.

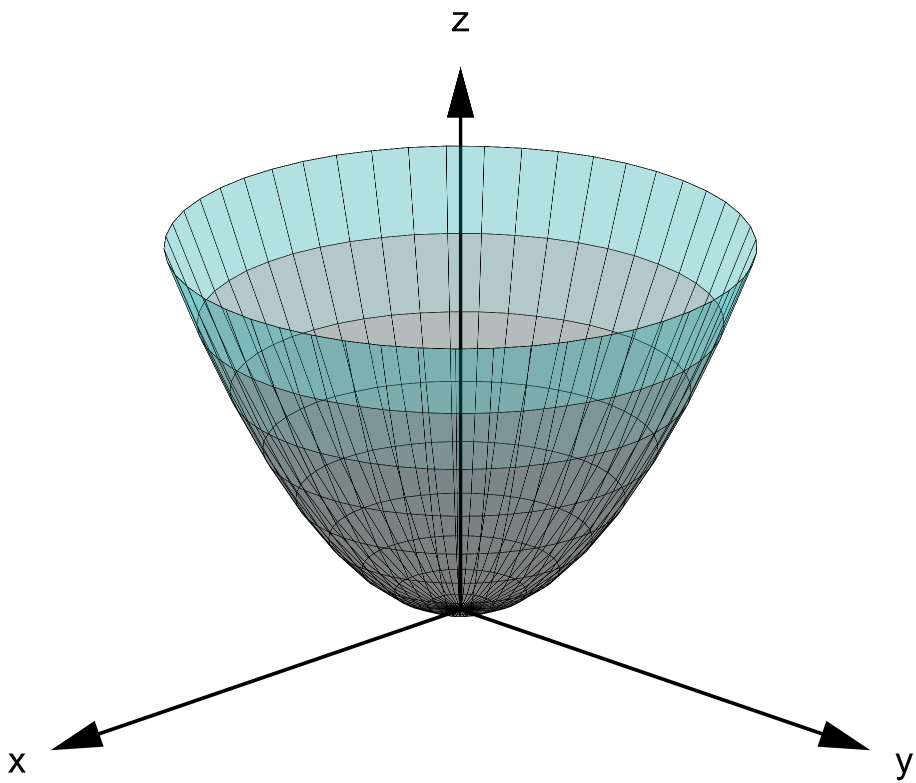


Figura 6.44 – Paraboloide elíptico de equação em coordenadas cilíndricas $r^2 = a^2 z$

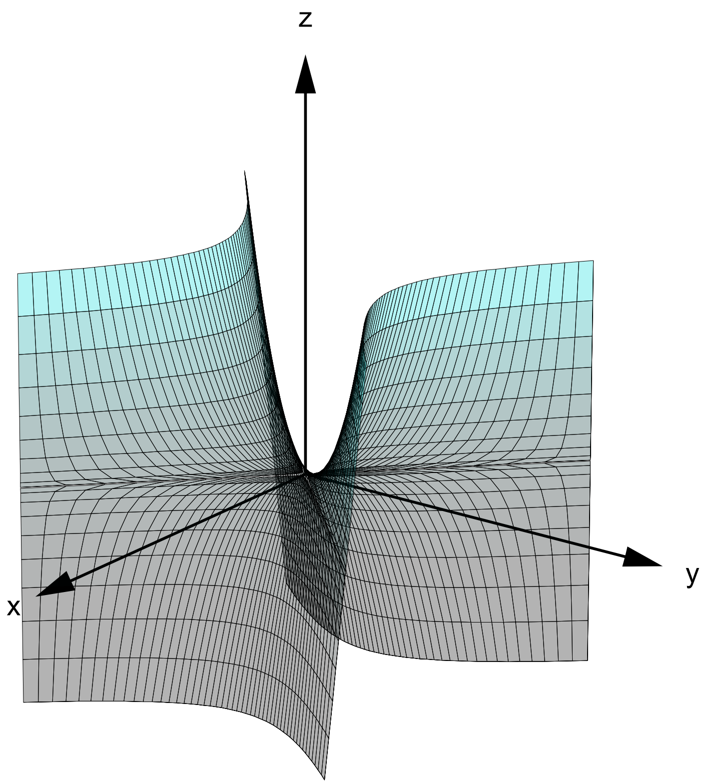


Figura 6.45 – Paraboloide hiperbólico de equação em coordenadas cilíndricas $r^2 \cos 2\theta = -a^2 z$

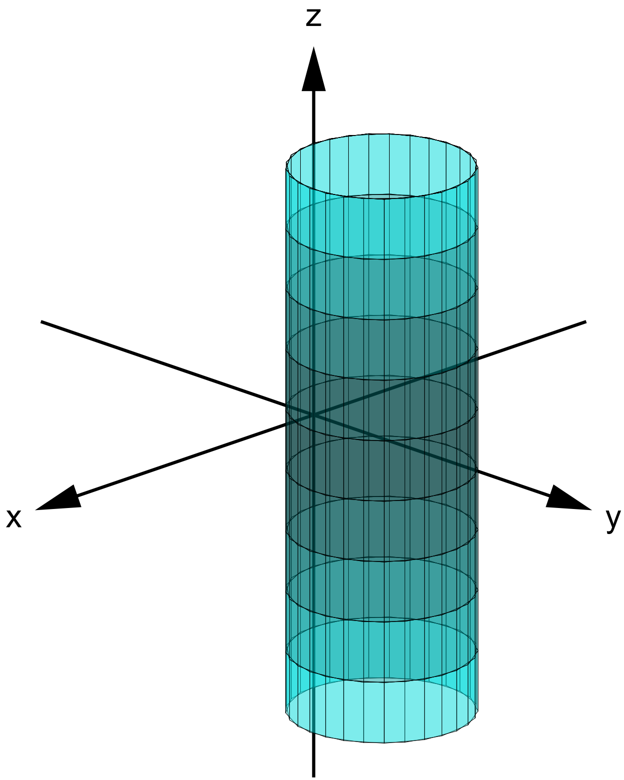


Figura 6.46 – Cilindro circular de equação em coordenadas cilíndricas $r = a \operatorname{sen} \theta$

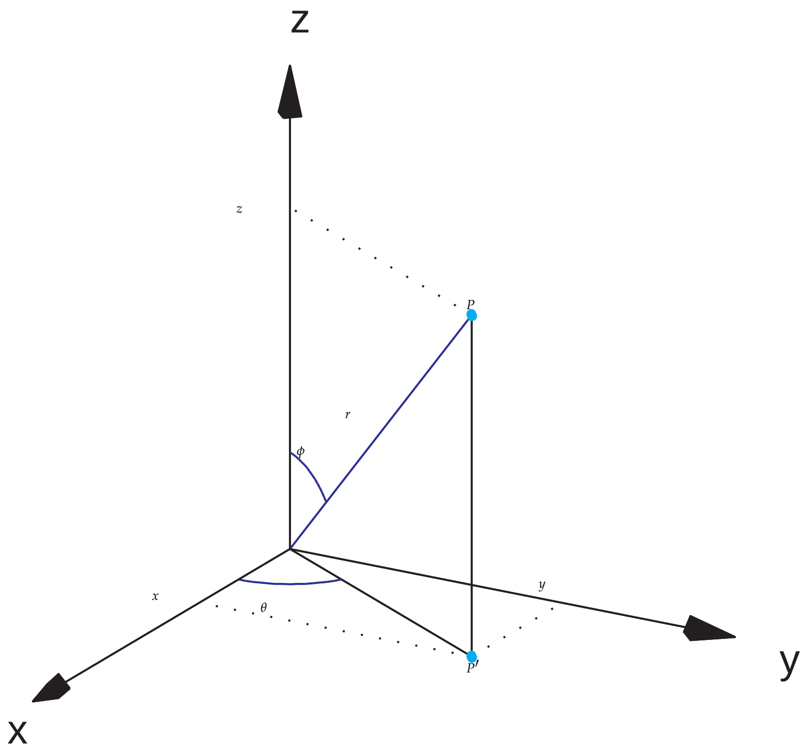


Figura 6.47 – Coordenadas esféricas e cartesianas de um ponto P no espaço

6.3.2 Coordenadas Esféricas

Vamos definir um outro sistema de coordenadas chamado de **sistema de coordenadas esféricas** em que um ponto do espaço é localizado em relação a duas retas (usualmente o eixo z e o eixo x do sistema cartesiano) e um ponto (usualmente a origem O do sistema cartesiano).

No sistema de coordenadas esféricas um ponto no espaço é localizado da seguinte forma. Passa-se por P uma reta paralela ao eixo z. Seja P' o ponto em que esta reta intercepta o plano xy. Seja θ a segunda coordenada polar de P' no plano xy. As coordenadas esféricas do ponto P são a distância de P à origem, $r = \mathrm{dist}(P, O)$, o ângulo, ϕ, entre os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e a segunda coordenada polar de P', θ. As coordenadas esféricas de um ponto P são escritas na forma (r, ϕ, θ).

Segue facilmente as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas esféricas.

Proposição 6.5. *Suponha que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares no plano* xy *coincidem com a origem e o eixo* x *do sistema de coordenadas cartesianas no plano* xy*, respectivamente. Então a transformação entre os sistemas de coordenadas esféricas e o de coordenadas cartesianas podem ser realizadas pelas equações*

$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \quad e \quad z = r\cos\phi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan\phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \ se\ z \neq 0, \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \ se\ z = 0,$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad e \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad se\ x^2 + y^2 \neq 0.$$

Exemplo 6.11. Vamos determinar a equação em coordenadas esféricas do paraboloide elíptico de equação

$$x^2 + y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, y por $r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$ e z por $r\cos\phi$ e dividindo por r obtemos

$$r \operatorname{sen}^2\phi = a^2 \cos\phi.$$

Exemplo 6.12. Vamos determinar a equação em coordenadas esféricas do paraboloide hiperbólico de equação

$$x^2 - y^2 = a^2 z.$$

Substituindo x por $r \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, y por $r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$ e z por $r\cos\phi$ e dividindo por r obtemos

$$r \operatorname{sen}^2\phi \cos 2\theta = a^2 \cos\phi.$$

Exemplo 6.13. Vamos determinar a equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é

$$r \operatorname{sen}\phi = a.$$

Elevando-se ao quadrado a equação acima obtemos

$$r^2 \operatorname{sen}^2\phi = a^2.$$

Substituindo-se $\operatorname{sen}^2\phi$ por $1 - \cos^2\phi$ obtemos

$$r^2 - r^2\cos^2\phi = a^2.$$

Como $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $r\cos\phi = z$, então obtemos

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

que é a equação de um cilindro circular.

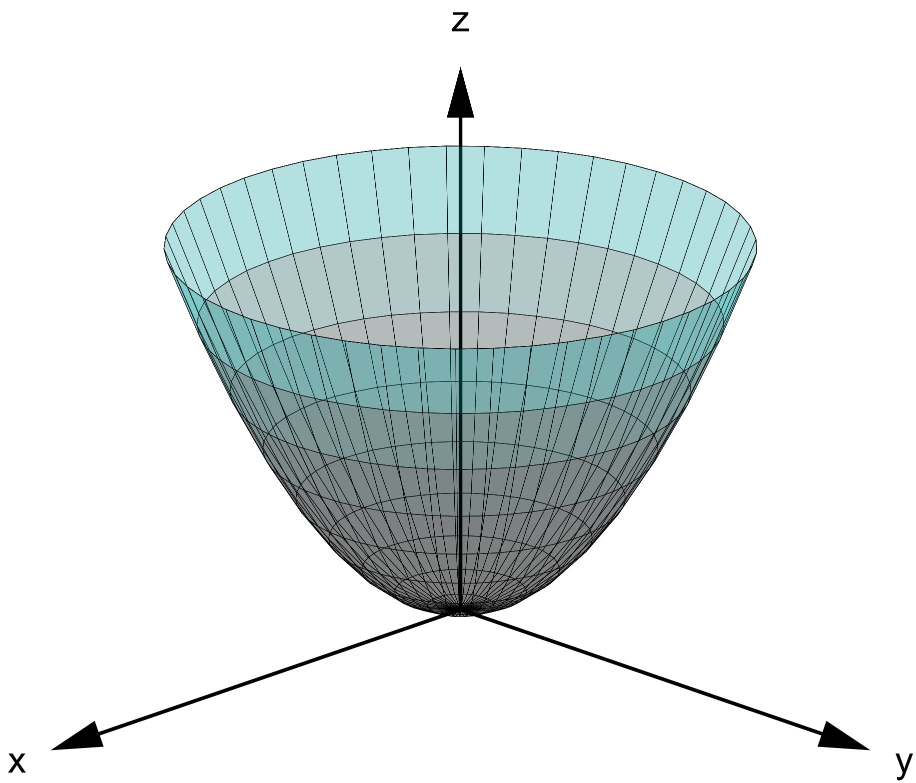


Figura 6.48 – Paraboloide elíptico de equação em coordenadas esféricas $r \operatorname{sen}^2 \phi = a^2 \cos \phi$

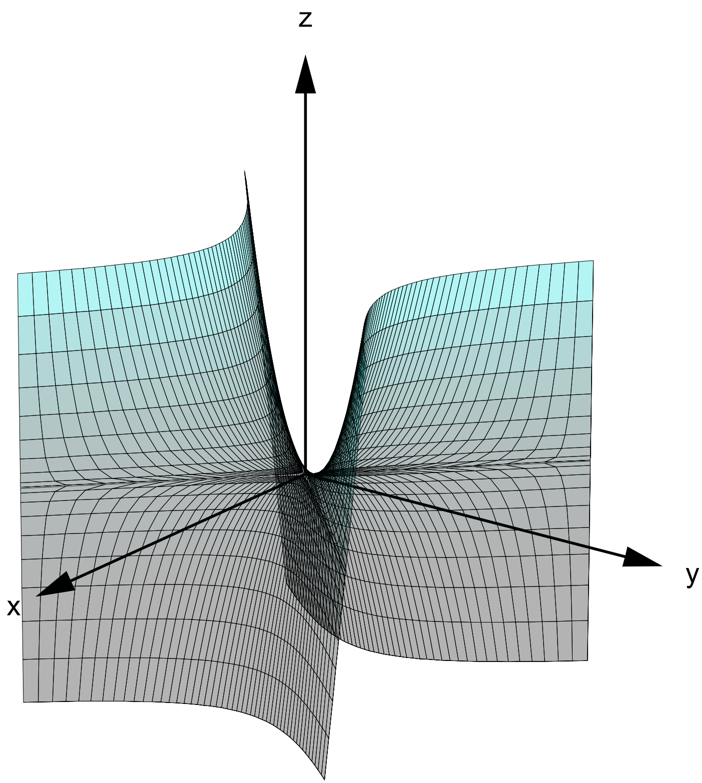


Figura 6.49 – Paraboloide hiperbólico de equação em coordenadas esféricas $r\,\mathrm{sen}^2\,\phi\cos 2\theta = a^2\cos\phi$

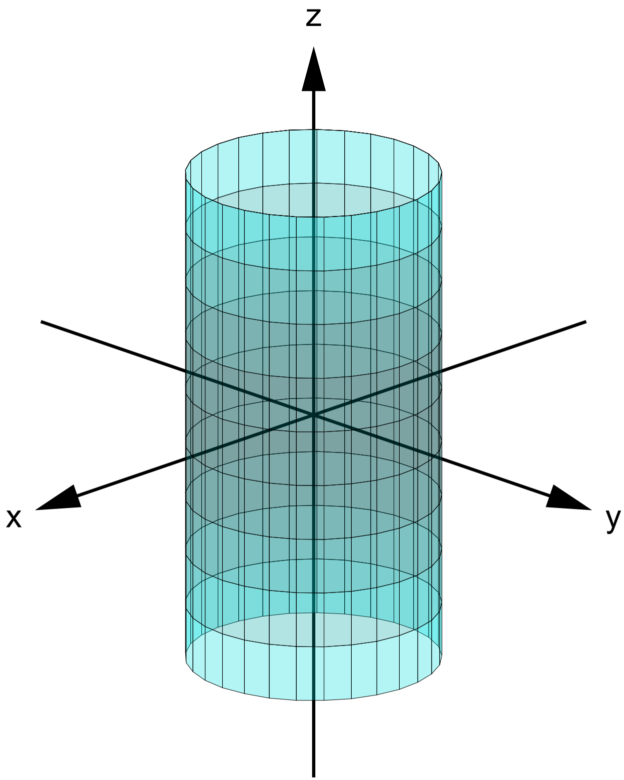


Figura 6.50 – Cilindro circular de equação em coordenadas esféricas $r \operatorname{sen} \phi = a$

6.3.3 Equações Paramétricas de Superfícies

Seja

$$F(x,y,z) = 0 \tag{6.14}$$

a equação de uma superfície $\mathcal{S}$ em coordenadas retangulares. Sejam x, y e z funções de um par de variáveis (s,t) numa região, $\mathcal{R}$, do plano, ou seja,

$$x = f(s,t), \quad y = g(s,t) \quad \text{e} \quad z = h(s,t), \quad \text{para todo } (s,t) \in \mathcal{R}. \tag{6.15}$$

Se para quaisquer $(s,t) \in \mathcal{R}$, os valores de x, y e z determinados pelas equações (6.15) satisfazem (6.14), então as equações (6.15) são chamadas **equações paramétricas da superfície** $\mathcal{S}$ e as variáveis independentes s e t são chamadas **parâmetros**. Dizemos também que as equações (6.15) formam uma **representação paramétrica da superfície** $\mathcal{S}$.

Exemplo 6.14. Seja a um número real positivo fixo. A esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{6.16}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a \operatorname{sen} s \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = a \cos s \tag{6.17}$$

para todo $s \in [0, \pi]$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado cada uma das equações (6.17) e somando os resultados obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 s \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 s \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 s \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2 s (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + a^2 \cos^2 s = a^2. \end{aligned}$$

A esfera definida por (6.16) pode também ser representada parametricamente por

$$x = s, \quad y = t \quad \text{e} \quad z = \sqrt{a^2 - s^2 - t^2}, \tag{6.18}$$

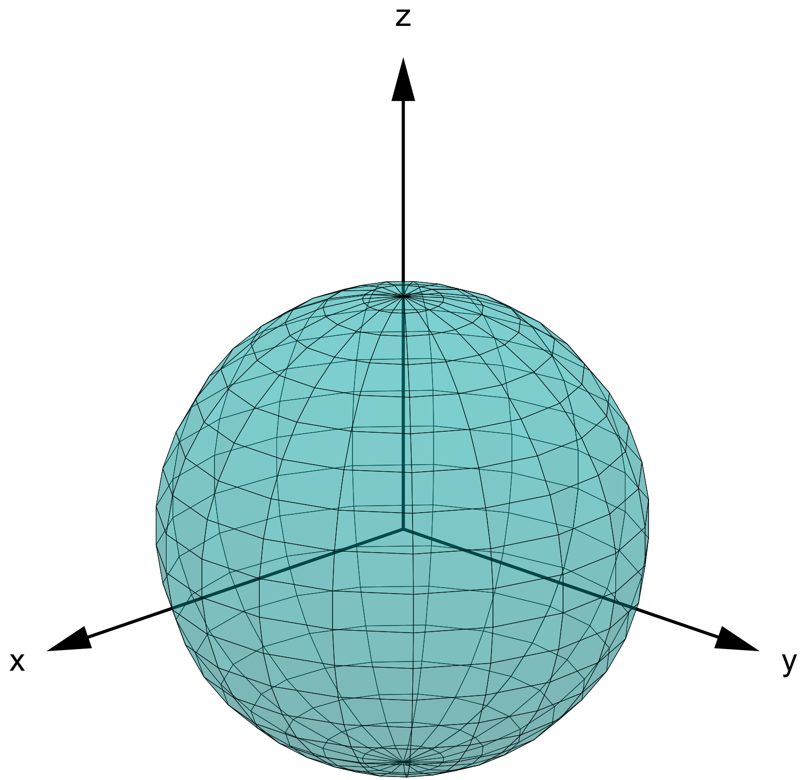


Figura 6.51 – Esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

para todo par (s,t) pertencente ao círculo de raio a. Ou ainda por

$$x = s, \quad y = t \quad \text{e} \quad z = -\sqrt{a^2 - s^2 - t^2}, \tag{6.19}$$

para todo par (s,t) pertencente ao círculo de raio a. Apenas que com (6.18) obtemos somente a parte de cima da esfera e com (6.19) obtemos somente a parte de baixo.

Exemplo 6.15. O elipsoide de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6.20}$$

pode ser representada parametricamente pelas equações

$$x = a \operatorname{sen} s \cos t, \quad y = b \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = c \cos s \tag{6.21}$$

para todo $s \in [0,\pi]$ e para todo $t \in [0,2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (6.21), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (6.21), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a terceira equação em (6.21) e somando os resultados obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \operatorname{sen}^2 s \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 s \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 s \\ &= \operatorname{sen}^2 s(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + \cos^2 s = 1. \end{aligned}$$

Exemplo 6.16. O hiperboloide de uma folha de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6.22}$$

pode ser representado parametricamente pelas equações

$$x = a \sec s \cos t, \quad y = b \sec s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = c \tan s, \tag{6.23}$$

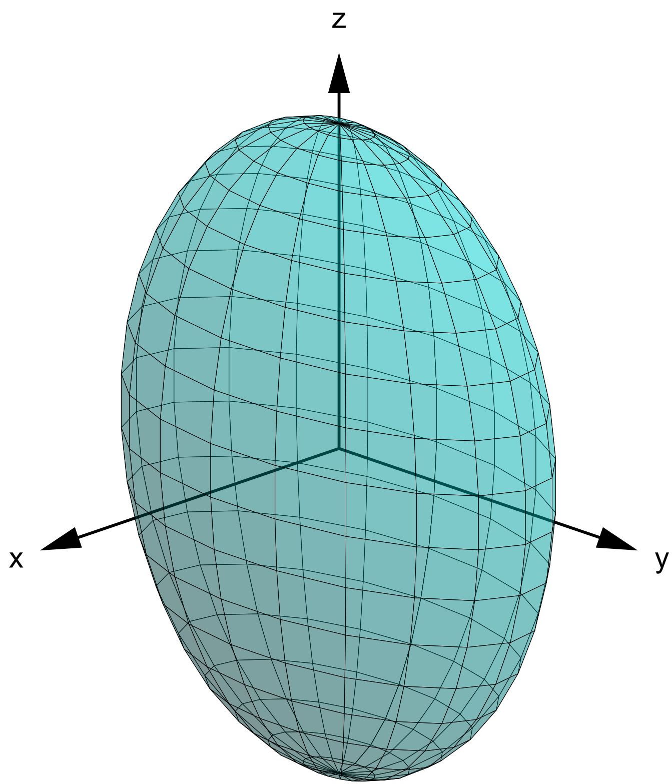


Figura 6.52 – Elipsoide

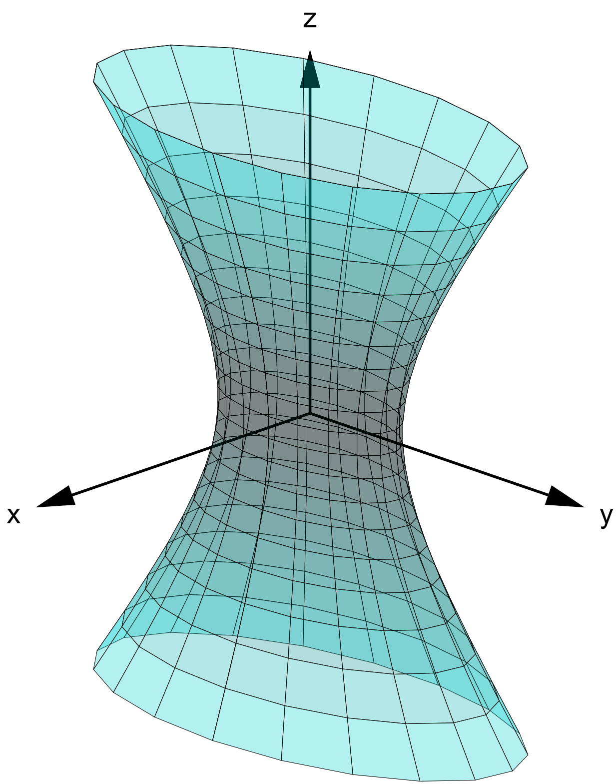


Figura 6.53 – Hiperboloide de uma folha

para todo $s \in [0, 2\pi]$, $s \neq \pi/2, 3\pi/2$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (6.23), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (6.23), somando os resultados e subtraindo do quadrado da terceira equação em (6.23) dividida por c^2 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \sec^2 s \cos^2 t + \sec^2 s \operatorname{sen}^2 t - \tan^2 s \\ &= \sec^2 s \,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) - \tan^2 s = 1. \end{aligned}$$

Usando as funções hiperbólicas, o hiperboloide de uma folha definido por (6.22) pode, também, ser representado parametricamente, por

$$x = a \cosh s \cos t, \quad y = b \cosh s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = c \operatorname{senh} s, \tag{6.24}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (6.24), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (6.24), somando os resultados e subtraindo do quadrado da terceira equação em (6.24) dividida por c^2 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \cosh^2 s \, \cos^2 t + \cosh^2 s \, \operatorname{sen}^2 t - \operatorname{senh}^2 s \\ &= \cosh^2 s \,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{senh}^2 s = 1. \end{aligned}$$

Exemplo 6.17. O paraboloide elíptico de equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{6.25}$$

pode ser representado parametricamente pelas equações

$$x = as \cos t, \quad y = bs \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = s^2, \tag{6.26}$$

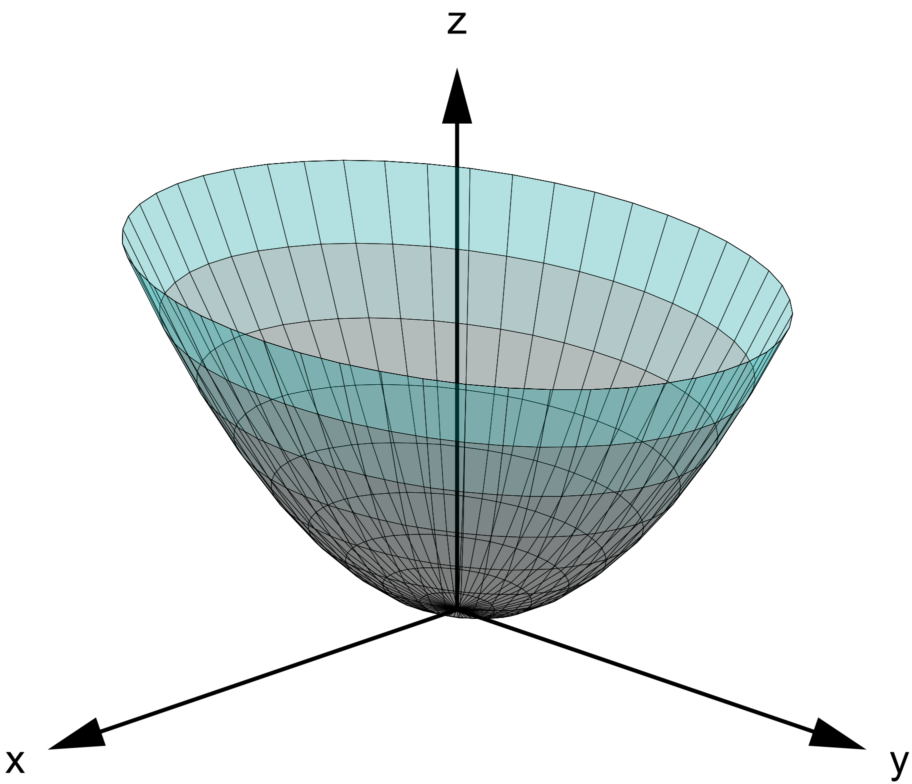


Figura 6.54 – Paraboloide elíptico

para todo $s \in [0, +\infty)$ e para todo $t \in [0, 2\pi]$. Pois elevando ao quadrado e dividindo por a^2 a primeira equação em (6.26), elevando ao quadrado e dividindo por b^2 a segunda equação em (6.26), somando os resultados e subtraindo da terceira equação em (6.26) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z &= s^2 \cos^2 t + s^2 \operatorname{sen}^2 t - s^2 \\ &= s^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) - s^2 = 0.\end{aligned}$$

6.3.4 Equações Paramétricas de Curvas no Espaço

Já estudamos a representação paramétrica de uma curva no plano. Este conceito pode ser estendido a curvas no espaço. Sejam x, y e z funções de uma variável t em um subconjunto, $\mathcal{I}$, do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ou seja,

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{e} \quad z = h(t), \quad \text{para todo } t \in \mathcal{I}. \tag{6.27}$$

Quando t assume todos os valores em $\mathcal{I}$, o ponto $P(t) = (f(t), g(t), g(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ descreve uma curva $\mathcal{C}$ no espaço. As equações (6.27) são chamadas **equações paramétricas** de $\mathcal{C}$. A representação paramétrica de curvas no espaço também tem um papel importante no traçado de curvas pelo computador. Já vimos um exemplo de representação paramétrica de curvas no espaço quando estudamos a reta no espaço.

Exemplo 6.18. Considere a curva parametrizada por

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = c\,t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Vamos eliminar t nas duas primeiras equações. Para isso elevamos ao quadrado as duas primeiras equações, dividimos a primeira por a^2, a segunda por b^2 e somamos obtendo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Portanto, a curva está contida em um cilindro elíptico. Esta curva é chamada **hélice**.

Exemplo 6.19. Vamos determinar uma parametrização para a curva obtida da interseção do cone de equação $x^2 + y^2 = z^2$ com o plano $y + z = \sqrt{2}$. Uma parametrização para o cone é

$$x = s\cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad z = s.$$

Vamos usar a equação do plano para eliminar s na parametrização do cone. Substituindo-se a parametrização do cone na equação do plano obtemos

$$s \operatorname{sen} t + s = \sqrt{2}.$$

Assim,

$$s = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} t + 1}.$$

Portanto,

$$x = \frac{\sqrt{2}\cos t}{\operatorname{sen} t + 1}, \quad y = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen} t + 1} \quad \text{e} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} t + 1}$$

para $t \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ é uma parametrização para a curva.

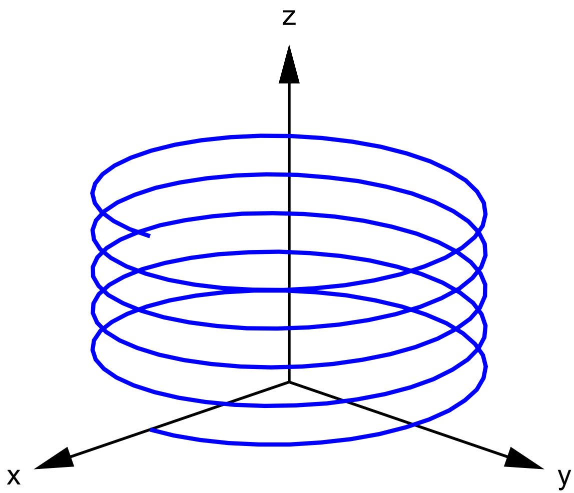


Figura 6.55 – Hélice

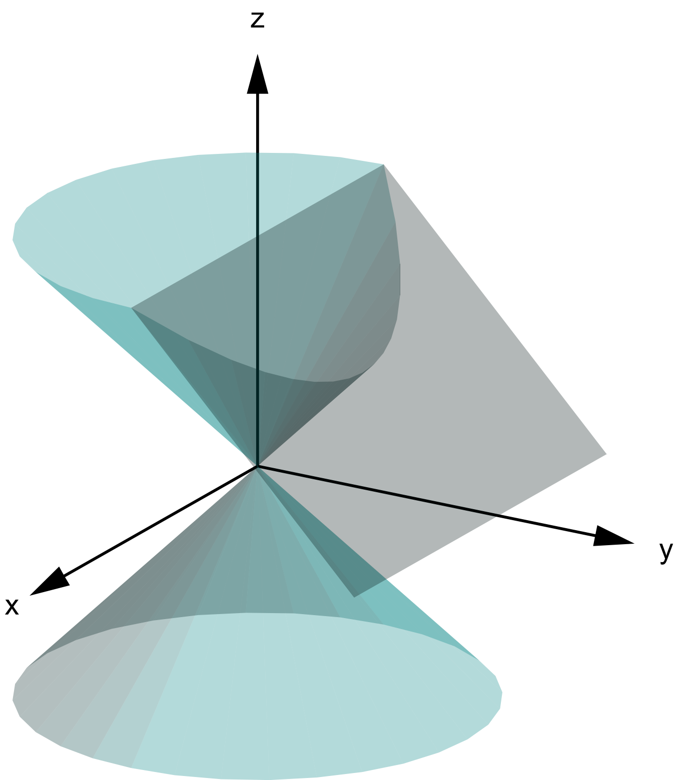


Figura 6.56 – Curva obtida pelo corte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ pelo plano $y - z = \sqrt{2}$

Exercícios Numéricos (respostas na página 598)

6.3.1. Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada

(a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$
(b) $x^2 - y^2 = 9$
(c) $x^2 - y^2 = 3z^2$
(d) $x^2 + y^2 = z^2$

6.3.2. Encontre uma equação em coordenadas esféricas da superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9z$
(b) $x^2 + y^2 = z^2$
(c) $x^2 + y^2 = 9$
(d) $x^2 + y^2 = 2z$

6.3.3. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é dada

(a) $r = 4$
(b) $r = 3\cos\theta$
(c) $r^2 \cos 2\theta = z^3$
(d) $z^2 \operatorname{sen}\theta = r^3$

6.3.4. Encontre uma equação em coordenadas cartesianas da superfície cuja equação em coordenadas esféricas é dada

(a) $\phi = \pi/4$
(b) $r = 9\sec\phi$
(c) $r = 2\tan\theta$
(d) $r = 6\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + 3\cos\phi$

6.3.5. Determine representações paramétricas para as seguintes superfícies:

(a) $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
(b) $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$
(c) $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$
(d) $f(x,y) = 0$
(e) $f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$
(f) $f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$
(g) $f(x - az, y - bz) = 0$.

6.3.6. Mostre que a cúbica retorcida

$$x = t, \quad y = t^2 \quad \text{e} \quad z = t^3$$

está contida no cilindro de equação $y = x^2$.

6.3.7. Mostre que a hélice cônica

$$x = t\cos t, \quad y = t\,\mathrm{sen}\,t \quad \text{e} \quad z = t$$

está contida no cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$.

6.3.8. Determine uma parametrização para a curva obtida da interseção do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$

7

Mudança de Coordenadas

7.1 Rotação e Translação

Se as coordenadas de um ponto P no espaço são (x, y, z), então as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$ também são (x, y, z) e então podemos escrever

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\
&= x(1, 0, 0) + y(0, y, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},
\end{aligned}$$

em que $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Ou seja, as coordenadas de um ponto P são iguais aos escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{OP}$ como uma combinação linear dos vetores canônicos. Assim, o ponto $O = (0, 0, 0)$ e os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ determinam um sistema de coordenadas ortogonal, $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Para resolver alguns problemas geométricos é necessário usarmos um segundo **sistema de coordenadas ortogonal** determinado por uma origem O' e por vetores U_1, U_2 e U_3 unitários e mutuamente ortogonais.* Por exemplo, se $O' = (2, 3/2, 3/2)$, $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$, $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ e $U_3 = (0, 0, 1) = \vec{k}$, então $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ determina um novo sistema de coordenadas: aquele com origem no ponto O', cujos eixos x', y' e z' são retas que passam por O' orientadas com os sentidos e direções de U_1, U_2 e U_3, respectivamente.

As coordenadas de um ponto P no sistema de coordenadas $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear dos vetores U_1, U_2 e U_3, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'U_1 + y'U_2 + z'U_3,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', U_1, U_2, U_3\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O', U_1, U_2, U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar inicialmente o caso em que $O = O'$. Assim, se $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, então $x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = \overrightarrow{OP}$ pode ser escrito como

$$[\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

*Em geral, um sistema de coordenadas (**não** necessariamente ortogonal) é definido por um ponto O' e três vetores V_1, V_2 e V_3 não coplanares (não necessariamente ortogonais e unitários) (veja o Exercício 7.1.6 na página 462).

Multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz $Q = [\, U_1\, U_2\, U_3\,]$, obtemos

$$\begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} [\, U_1\ U_2\ U_3\,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Mas, como U_1, U_2 e U_3 são unitários e mutuamente ortogonais, então

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} [\, U_1\ U_2\ U_3\,] = \begin{bmatrix} U_1^t U_1 & U_1^t U_2 & U_1^t U_3 \\ U_2^t U_1 & U_2^t U_2 & U_2^t U_3 \\ U_3^t U_1 & U_3^t U_2 & U_3^t U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 & U_1 \cdot U_3 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 & U_2 \cdot U_3 \\ U_3 \cdot U_1 & U_3 \cdot U_2 & U_3 \cdot U_3 \end{bmatrix} = I_3$$

Assim, a matriz $Q = [\, U_1\, U_2\, U_3\,]$ é invertível e $Q^{-1} = Q^t$. Desta forma as coordenadas de um ponto P no espaço em relação ao sistema $\{O, U_1, U_2, U_3\}$ estão bem definidas, ou seja, x', y' e z' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O,U_1,U_2,U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^t [P]_{\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}.$$

Também no plano temos o mesmo tipo de situação que é tratada de forma inteiramente análoga. As coordenadas de um ponto P no plano em relação a um sistema de coordenadas $\{O', U_1, U_2\}$, em que U_1 e U_2 são vetores unitários e ortogonais, é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear de U_1 e U_2, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x' U_1 + y' U_2,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', U_1, U_2\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O',U_1,U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar, também no plano, inicialmente o caso em que $O = O'$. Assim, se $\overrightarrow{OP} = (x, y)$, então $x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{OP}$ pode ser escrito como

$$[\, U_1\ U_2 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se à esquerda pela transposta da matriz $Q = [\, U_1\ U_2 \,]$, obtemos

$$\begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} [\, U_1\ U_2 \,] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Novamente, como U_1 e U_2 são unitários e mutuamente ortogonais, então

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} [\, U_1\ U_2 \,] = \begin{bmatrix} U_1^t U_1 & U_1^t U_2 \\ U_2^t U_1 & U_2^t U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 \end{bmatrix} = I_2$$

Assim, a matriz $Q = [\, U_1\ U_2 \,]$ é invertível e $Q^{-1} = Q^t$. Desta forma as coordenadas de um ponto P no plano em relação a um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ estão bem definidas, ou seja, x' e y' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O,U_1,U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q^t [P]_{\{O,E_1,E_2\}},$$

em que $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$. Observe que, tanto no caso do plano quanto no caso do espaço, a matriz Q satisfaz, $Q^{-1} = Q^t$. Uma matriz que satisfaz esta propriedade é chamada **matriz ortogonal**.

Exemplo 7.1. Considere o sistema de coordenadas no plano em que $O' = O$ e $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. Se $P = (2, 4)$, vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP},$$

ou

$$x'(\sqrt{3}/2, 1/2) + y'(-1/2, \sqrt{3}/2) = (2, 4)$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} (\sqrt{3}/2)x' & - & (1/2)y' = 2 \\ (1/2)x' & + & (\sqrt{3}/2)y' = 4 \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

em que $Q = [\ U_1\ U_2\ ]$ com U_1 e U_2 escritos como matrizes colunas. Como

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = I_2,$$

então as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O,U_1,U2\}} = Q^t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.2. Considere o mesmo sistema de coordenadas do exemplo anterior, mas agora seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x'U_1 + y'U_2 = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP},$$

ou

$$x'(\sqrt{3}/2, 1/2) + y'(-1/2, \sqrt{3}/2) = (x, y)$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear nas variáveis x' e y'

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ou

$$Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

em que $Q = [\; U_1 \; U_2 \;]$ com U_1 e U_2 escritos como matrizes colunas. Como $Q^t Q = I_2$, então as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O,U_1,U2\}} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}\,x + y)/2 \\ (-x + \sqrt{3}\,y)/2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.3. Vamos agora considerar um problema inverso àqueles apresentados nos exemplos anteriores. Suponha que sejam válidas as seguintes equações

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' & + & \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' & - & \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases},$$

ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

entre as coordenadas $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ de um ponto P em relação a um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ e as coordenadas de P, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, em relação ao sistema de coordenadas original $\{O, E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$. Queremos determinar quais são os vetores U_1 e U_2.

Os vetores U_1 e U_2 da nova base possuem coordenadas $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente, em relação ao novo sistema de coordenadas, $\{O, U_1, U_2\}$. Pois, $U_1 = 1\,U_1 + 0\,U_2$ e $U_2 = 0\,U_1 + 1\,U_2$. Queremos saber quais as coordenadas destes vetores em relação ao sistema de coordenadas original, $\{O, E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$. Logo,

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ U_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ou seja, U_1 e U_2 são as colunas da matriz $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

7.1.1 Rotação

Suponha que o novo sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2\}$ seja obtido do sistema original $\{O, E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$ por uma rotação de um ângulo θ. Observando a Figura 7.4, obtemos

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ U_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de P em relação ao novo sistema de coordenadas. Para isto temos que encontrar x' e y' tais que

$$x' U_1 + y' U_2 = \overrightarrow{OP}\,.$$

A equação acima é equivalente ao sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcl}(\cos\theta)x' & - & (\operatorname{sen}\theta)y' = x\\ (\operatorname{sen}\theta)x' & + & (\cos\theta)y' = y\end{array}\right. \tag{7.1}$$

ou

$$R_\theta X = P,$$

em que $R_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$. A solução é dada por

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = R_\theta^{-1}P = R_\theta^t P = \begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

O sistema de coordenadas que aparece nos dois primeiros exemplos desta seção podem ser obtidos por uma rotação de um ângulo $\theta = \pi/6$ em relação ao sistema original.
A matriz R_θ é chamada **matriz de rotação**.

7.1.2 Translação

Vamos considerar, agora, o caso em que $O' \neq O$, ou seja, em que ocorre uma **translação** dos eixos coordenados.
Observando a Figura 7.5, obtemos

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}\ . \tag{7.2}$$

Assim, se $\overrightarrow{OO'} = (h,k)$, então

$$\overrightarrow{O'P} = (x',y') = (x,y) - (h,k) = (x-h, y-k)$$

Logo, as coordenadas de P em relação ao novo sistema são dadas por

$$[P]_{\{O',E_1,E_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-h \\ y-k \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

O eixo x$'$ tem equação $y' = 0$, ou seja, $y = k$ e o eixo y$'$, $x' = 0$, ou seja, $x = h$.

Exercícios Numéricos (respostas na página 601)

7.1.1. Encontre as coordenadas do ponto P com relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S}$, nos seguintes casos:

(a) $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ e $P = (1, 3)$;

(b) $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$ e $P = (2, -1, 2)$;

7.1.2. Encontre o ponto P, se as coordenadas de P em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S}$, $[P]_\mathcal{S}$, são:

(a) $[P]_\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{S} = \{O, (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$.

(b) $[P]_\mathcal{S} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, em que $\mathcal{S} = \{O, (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$;

7.1.3. Sejam $[P]_\mathcal{R} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ as coordenadas de um ponto P em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $[P]_\mathcal{S} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{S} = \{O, U_1, U_2, U_3\}$. Suponha que temos a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Quais são os vetores U_1, U_2 e U_3?

7.1.4. Determine qual a rotação do plano em que as coordenadas do ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$ são $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$.

Exercícios Teóricos

7.1.5. Mostre que $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$.

7.1.6. Definimos coordenadas de pontos no espaço em relação a um sistema de coordenadas por um ponto O' e três vetores não coplanares V_1, V_2 e V_3 da mesma forma como fizemos quando os vetores são unitários e mutuamente ortogonais. As coordenadas de um ponto P no sistema de coordenadas $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos $\overrightarrow{O'P}$ como combinação linear dos vetores V_1, V_2 e V_3, ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'V_1 + y'V_2 + z'V_3,$$

então as coordenadas de P no sistema $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ são dadas por

$$[P]_{\{O',V_1,V_2,V_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Assim, se $\overrightarrow{O'P} = (x, y, z)$, então $x'V_1 + y'V_2 + z'V_3 = \overrightarrow{O'P}$ pode ser escrito como

$$[\ V_1\ V_2\ V_3\ ] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a matriz $Q = [\ V_1\ V_2\ V_3\ ]$ é invertível.

(b) Mostre que as coordenadas de um ponto P no espaço em relação ao sistema $\{O', V_1, V_2, V_3\}$ estão bem definidas, ou seja, x', y' e z' estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O',V_1,V_2,V_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^{-1}[P]_{\{O',\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}.$$

7.2 Identificação de Cônicas

Vamos determinar um ângulo θ tal que uma rotação de θ elimina o termo xy na equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7.4}$$

transformando-a em

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0. \tag{7.5}$$

Ou seja, fazendo a mudança de coordenadas em (7.4) dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

para um ângulo θ adequado, obtemos a equação (7.5).
A equação (7.4) pode ser escrita na forma

$$X^t AX + K\,X + f = 0, \tag{7.7}$$

em que $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Fazendo a mudança de coordenadas dada por (7.6) (ou seja, $X = R_\theta X'$, em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$) em (7.7) obtemos a equação

$$X'^t BX' + K'\,X' + f = 0,$$

em que $B = \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} = R_\theta^t A R_\theta$ e $K' = \begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = KR_\theta$. Agora, como a inversa de R_θ é R_θ^t, então a matriz identidade $I_2 = R_\theta^t R_\theta$ e daí podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_2) &= \det(R_\theta^t A R_\theta - \lambda I_2) = \det(R_\theta^t A R_\theta - \lambda R_\theta^t R_\theta) \\ &= \det(R_\theta^t (A - \lambda I_2) R_\theta) = \det(R_\theta^t)\det(A - \lambda I_2)\det(R_\theta) \\ &= \det(A - \lambda I_2). \end{aligned}$$

Assim, escolhido θ de forma que $b' = 0$,[†] obtemos que

$$\det(A - \lambda I_2) = \det(B - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 \\ 0 & c' - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - a')(\lambda - c').$$

Logo, os coeficientes a' e c' são as raízes da equação de 2º grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{7.8}$$

Vamos, agora, determinar o ângulo θ. Observe que a matriz R_θ é tal que

$$B = R_\theta^t A R_\theta.$$

Multiplicando-se à esquerda pela matriz R_θ, obtemos

$$R_\theta B = A R_\theta.$$

Por um lado,

$$AR_\theta = A \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \left[A \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \; A \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right],$$

por outro lado

$$R_\theta B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix} = \left[a' \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \; c' \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right]$$

Como $R_\theta B = AR_\theta$, então segue-se das das duas últimas equações acima que $U_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$ é tal que

$$AU_1 = a' U_1$$

[†]Deixamos como exercício a verificação de que sempre existe um ângulo θ tal que a mudança de coordenadas dada por $X = R_\theta X'$ é tal que $b' = 0$

Mas, esta equação pode ser escrita como

$$AU_1 = a' I_2 U_1$$

ou

$$(A - a' I_2)U_1 = \bar{0}.$$

Logo, U_1 é uma solução de norma igual à 1 do sistema linear

$$(A - a' I_2)X = \bar{0}$$

e $U_2 = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ é obtido de U_1 trocando-se as componentes de posição e depois o sinal da 1ª componente.

Portanto, com a mudança de coordenadas dada por $X = R_\theta X'$, em que $R_\theta = [\, U_1 \; U_2 \,]$, a equação (7.4) se transforma em (7.5). Os vetores U_1 e U_2 dão a direção e o sentido dos novos eixos `x'` e `y'`.

Vamos resumir no próximo resultado o que acabamos de provar.

Teorema 7.1. *Considere a equação*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{7.9}$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Então por uma rotação do sistema de coordenadas, ou seja, por um mudança de coordenadas da forma

$$X = R_\theta X'\,,$$

em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *e* $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ *a equação (7.9) pode sempre ser transformada em*

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0\,,$$

em que a', c' são raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{bmatrix}.$$

Mais ainda, $U_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$ *é uma solução de norma igual à 1 do sistema linear*

$$\begin{bmatrix} a-a' & b/2 \\ b/2 & c-a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.4. Vamos eliminar o termo xy na equação

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0 \tag{7.10}$$

através de uma rotação. Esta equação pode ser escrita da forma

$$X^t AX - 36 = 0,$$

em que $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$. Pelo que vimos, a' e c' são as raízes da equação

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Assim, podemos tomar $a' = 4$ e $c' = 9$. Para determinarmos os vetores U_1 e U_2 e por conseguinte o ângulo θ temos que resolver o sistema linear

$$(A - 4I_2)X = \bar{0}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que tem solução geral

$$\mathbb{W}_1 = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(2\alpha, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$, então podemos tomar os vetores

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) \\ U_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) \end{aligned}$$

para caracterizar os novos eixos. Portanto, a mudança de coordenadas dada pela rotação de $\theta = \arccos(2/\sqrt{5})$ aplicada na equação (7.10) fornece a equação

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36,$$

que é a equação de uma elipse.
Para fazer o esboço do gráfico, em primeiro lugar temos traçar os eixos x′ e y′. O eixo x′ passa pela origem, é paralelo e possui o mesmo sentido do vetor U_1 e o eixo y′ passa pela origem, é paralelo e possui o mesmo sentido que U_2 (Figura 7.6).

Exemplo 7.5. Considere a cônica cuja equação é dada por

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0. \tag{7.11}$$

Vamos eliminar o termo xy através de uma rotação. Os coeficientes a, b e c são os mesmos do exemplo anterior. Pelo exemplo anterior, $a' = 4$ e $c' = 9$ e os vetores U_1 e U_2 que dão a direção e o sentido dos novos eixos são dados por

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) \\ U_2 &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) \end{aligned}$$

O coeficiente $f' = f$ e os coeficientes d' e e' são dados por

$$K' = \begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = KR_\theta = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} R_\theta = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a mudança de coordenadas dada pela rotação de $\theta = \arccos(2/\sqrt{5})$ aplicada na equação (7.11) fornece a equação

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0.$$

Ou ainda,

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') + 4 = 0$$

Completando os quadrados, obtemos

$$4[(x'^2 - 2x' + 1) - 1] + 9[(y'^2 - 4y' + 4) - 4] + 4 = 0$$

ou

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 - 36 = 0.$$

Fazendo mais uma mudança de variáveis

$$x'' = x' - 1 \text{ e} \qquad (7.12)$$
$$y'' = y' - 2 \qquad (7.13)$$

obtemos

$$4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0$$

ou

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

que é a equação de uma elipse cujo esboço é mostrado na Figura 7.7. Para fazer o esboço do gráfico, em primeiro lugar temos que traçar os eixos x'' e y'', que por sua vez são translações dos eixos x' e y'. O eixo x' tem a direção e o sentido do vetor U_1. O eixo y' tem a direção e o sentido do vetor U_2. O eixo x'' tem equação $y'' = 0$. Usando a equação (7.12) obtemos $y' = 2$. O eixo y'' tem equação $x'' = 0$. Usando a equação (7.13) obtemos $x' = 1$.

Deixamos como exercício para o leitor a demonstração do seguinte resultado que classifica o conjunto solução de todas as equações de segundo grau em duas variáveis.

Teorema 7.2. *Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a equação*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Sejam a' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

(a) *O produto* $a'c' = ac - b^2/4$.

(b) *Se* $a'c' > 0$, *então* $\mathcal{C}$ *é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.*

(c) *Se* $a'c' < 0$, *então* $\mathcal{C}$ *é uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes.*

(d) *Se* $a'c' = 0$, *então* $\mathcal{C}$ *é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.*

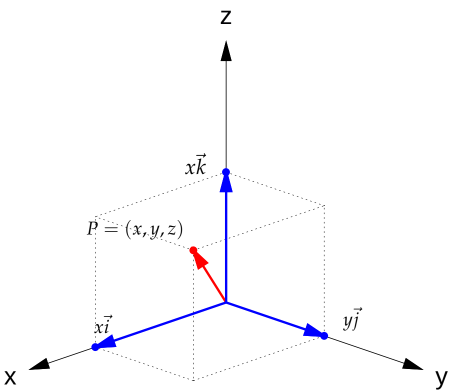


Figura 7.1 – $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

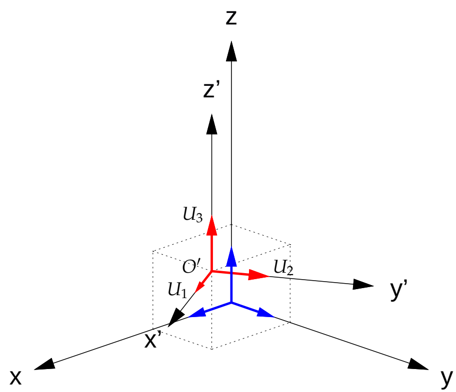


Figura 7.2 – Dois sistemas de coordenadas ortogonais $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $\{O', U_1, U_2, U_3\}$

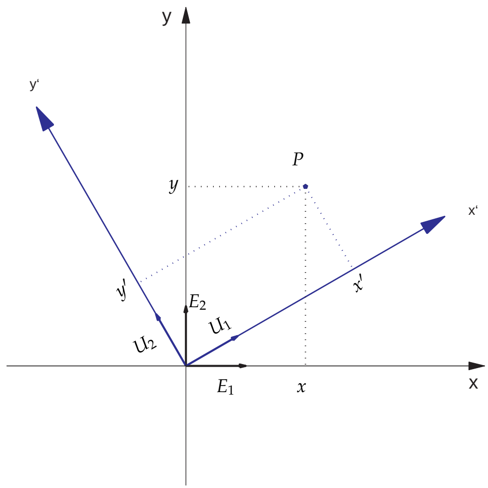


Figura 7.3 – Coordenadas de um ponto P em dois sistemas

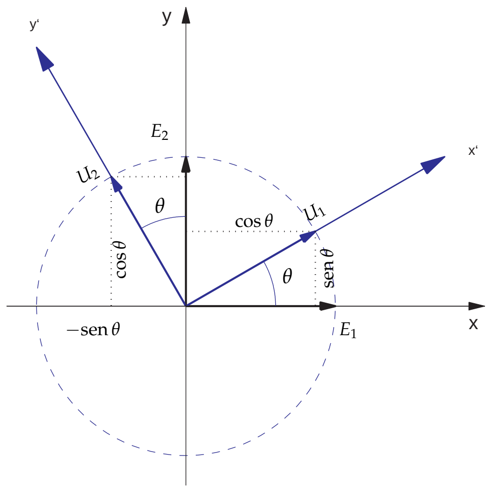


Figura 7.4 – Rotação de um ângulo θ

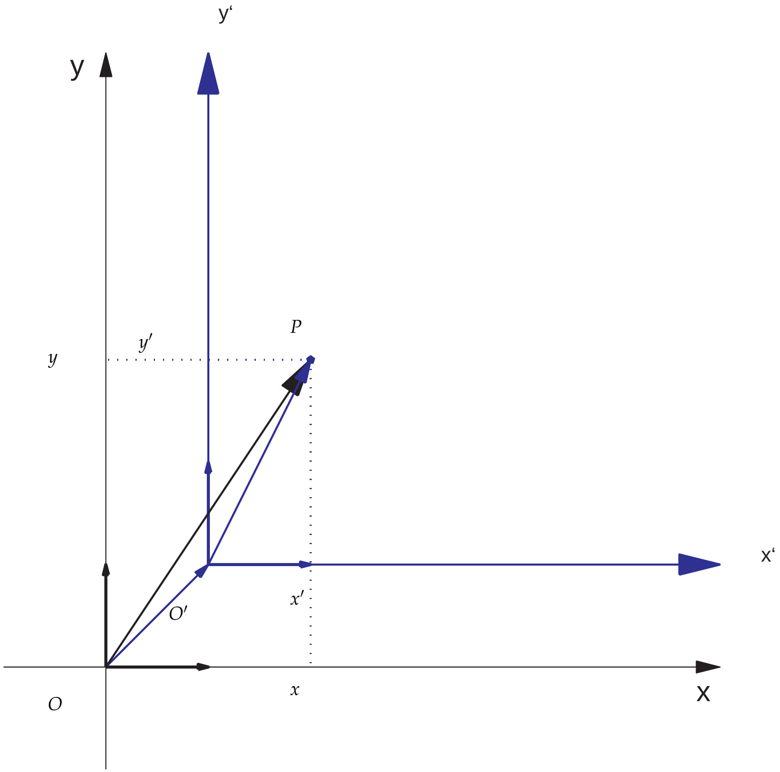


Figura 7.5 – Coordenadas de um ponto P em dois sistemas (translação)

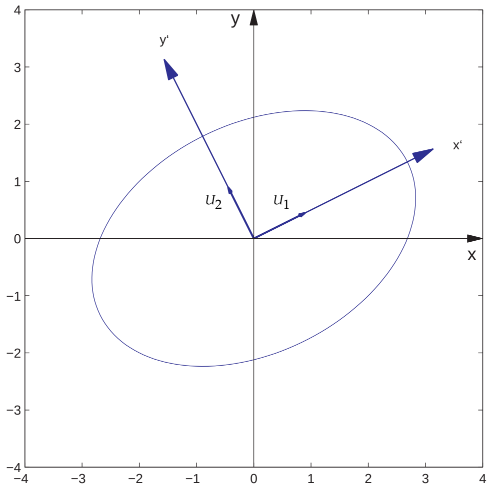


Figura 7.6 – Elipse do Exemplo 7.4

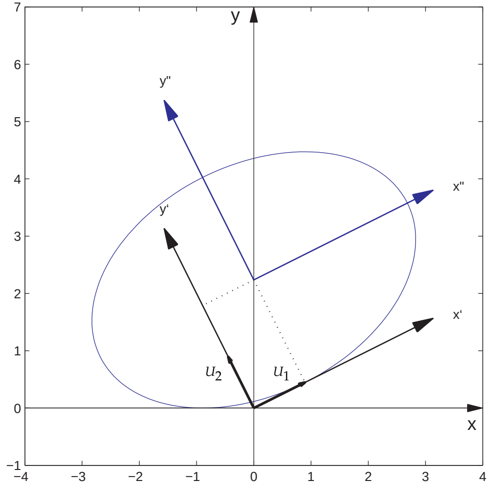
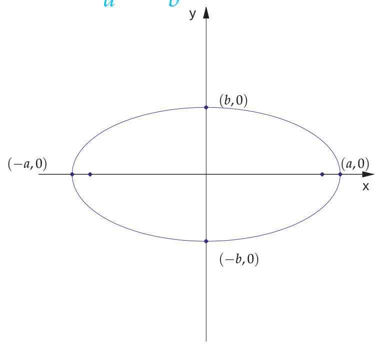


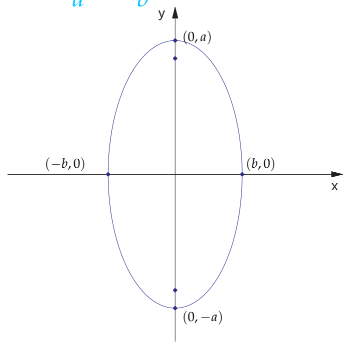
Figura 7.7 – Elipse do Exemplo 7.5

Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a > b$$

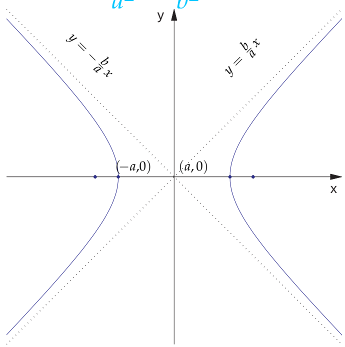


$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \; a > b$$

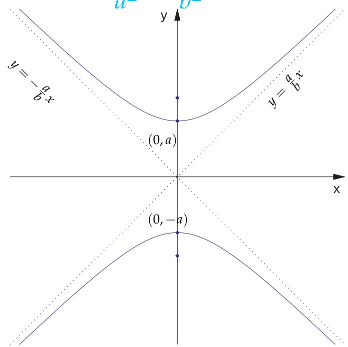


Hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



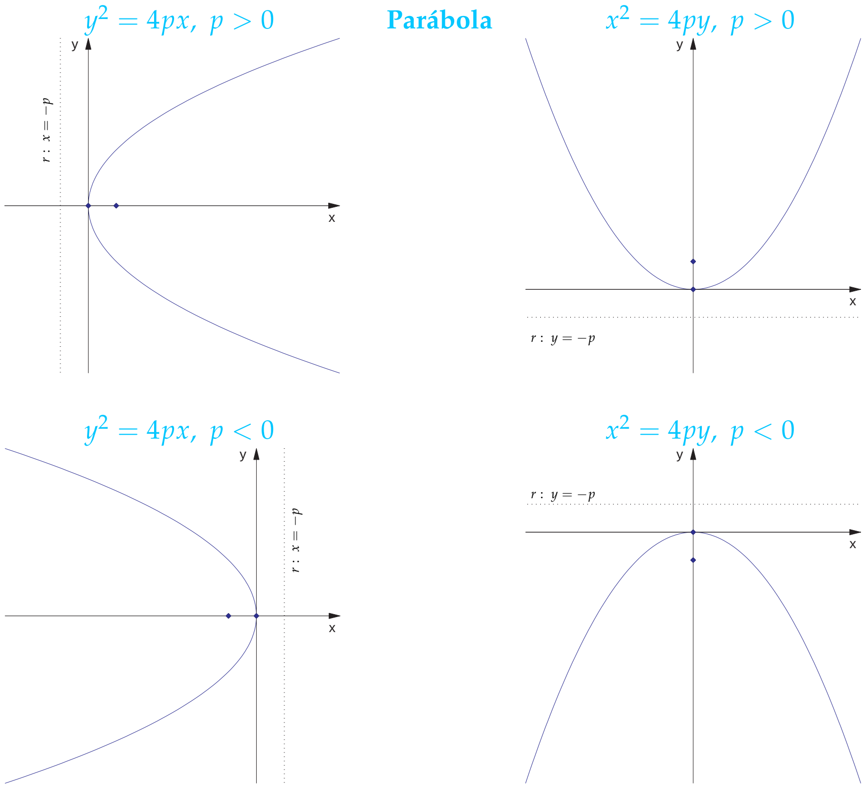


Figura 7.8 – Cônicas não degeneradas com equações na forma padrão

Exercícios Numéricos (respostas na página 603)

Identifique a cônica, ache a equação no último sistema de coordenadas utilizado e faça um esboço do gráfico.

7.2.1. $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$;

7.2.2. $3x^2 - 8xy - 12y^2 + 81 = 0$;

7.2.3. $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$;

7.2.4. $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 132 = 0$;

7.2.5. $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$;

7.2.6. $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}x + 10\sqrt{10}y + 90 = 0$;

7.2.7. $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 30\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 82 = 0$;

7.2.8. $5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}x = 36$;

7.2.9. $6x^2 + 9y^2 - 4xy - 4\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y = 5$;

7.2.10. $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$;

7.2.11. $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}x - 31\sqrt{2}y + 70 = 0$;

Exercícios usando o MATLAB®

Comandos do pacote GAAL:

`>> subst(expr,[x;y],[a;b])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x,y` por `a,b`, respectivamente.

`>> elipse(a,b)` desenha a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

`>> elipse(a,b,[U1 U2])` desenha a elipse $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> elipse(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a elipse $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbx(a,b)` desenha a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

`>> hiperbx(a,b,[U1 U2])` desenha a hipérbole $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbx(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a hipérbole $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperby(a,b)` desenha a hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

`>> hiperby(a,b,[U1 U2])` desenha a hipérbole $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperby(a,b,[U1 U2],X0)` desenha a hipérbole $\frac{y''^2}{a^2} - \frac{x''^2}{b^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> parabx(p)` desenha a parábola $y^2 = 4px$.

`>> parabx(p,[U1 U2])` desenha a parábola $y'^2 = 4px'$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> parabx(p,[U1 U2],X0)` desenha a parábola $y''^2 = 4px''$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e por `X0`.

`>> paraby(p)` desenha a parábola $x^2 = 4py$.

`>> paraby(p,[U1 U2])` desenha a parábola $x'^2 = 4py'$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> paraby(p,[U1 U2],X0)` desenha a parábola $x''^2 = 4py''$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e por `X0`.

7.2.12. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**

Exercícios Teóricos

7.2.13. Considere o polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$, em que $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $p(\lambda)$ tem somente raízes reais.

(b) Mostre que se $b \neq 0$, então as raízes são distintas, ou seja, $a' \neq c'$.

(c) Sejam a' e c' raízes distintas de $p(\lambda)$. Mostre que se X_1 é solução de $(A - a'I_2)X = \bar{0}$ e X_2 é solução de $(A - c'I_2)X = \bar{0}$, então X_1 e X_2 são ortogonais. (Sugestão: Mostre que $a'X_1 \cdot X_2 = c'X_1 \cdot X_2$)

(d) Mostre que se $X = (x, y)$ é ortogonal a $V = (v_1, v_2)$ com $||X|| = ||V||$, então $X = (-v_2, v_1)$ ou $X = (v_2, -v_1)$.

(e) Mostre que sempre existe um ângulo θ tal que $R_\theta^t A R_\theta = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix}$ e portanto tal que a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$ transforma (7.4) em (7.5 na página 463.

7.2.14. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Sejam a' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $a'c' = ac - b^2/4 = p(0) = \det \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

(b) Mostre que se $a'c' > 0$, então $\mathcal{C}$ é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

(c) Mostre que se $a'c' < 0$, então $\mathcal{C}$ é uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes.

(d) Mostre que se $a'c' = 0$, então $\mathcal{C}$ é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

7.3 Identificação de Quádricas

Vamos determinar uma mudança de coordenadas que elimina os termos xy, xz e yz na equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0, \tag{7.14}$$

transformando-a em

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z + j = 0. \tag{7.15}$$

Ou seja, fazendo uma mudança de coordenadas em (7.14) dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \tag{7.16}$$

em que $Q = [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,]$, para vetores U_1, U_2 e U_3 unitários e ortogonais, escolhidos adequadamente, obtemos a equação (7.15).
A equação (7.14) pode ser escrita na forma

$$X^t A X + K\, X + j = 0, \tag{7.17}$$

em que $A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$, $K = [\, g \;\; h \;\; i \,]$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Fazendo a mudança de coordenadas dada por (7.16) (ou seja, $X = QX'$, em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$) em (7.17) obtemos a equação

$$X'^t B X' + K'\, X' + j = 0,$$

em que $B = \begin{bmatrix} a' & d'/2 & e'/2 \\ d'/2 & b' & f'/2 \\ e'/2 & f'/2 & c' \end{bmatrix} = Q^t A Q$ e $K' = \begin{bmatrix} g' & h' & i' \end{bmatrix} = KQ$. Agora, como a inversa de Q é Q^t, então a matriz identidade $I_2 = Q^t Q$ e daí podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_3) &= \det(Q^t A Q - \lambda I_3) = \det(Q^t A Q - \lambda Q^t Q) \\ &= \det(Q^t (A - \lambda I_3) Q) = \det(Q^t) \det(A - \lambda I_3) \det(Q) \\ &= \det(A - \lambda I_3). \end{aligned}$$

Assim, escolhida a matriz Q de forma que

$$d' = e' = f' = 0,$$

‡ obtemos que

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det(B - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b' - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & c' - \lambda \end{bmatrix} \\ &= -(\lambda - a')(\lambda - b')(\lambda - c'). \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes a', b' e c' são as raízes da equação de 2º grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b - \lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{7.18}$$

Vamos, agora, determinar a matriz Q. Observe que a matriz Q é tal que

$$B = Q^t A Q.$$

‡Pode-se mostrar que sempre existe uma matriz Q tal que a mudança de coordenadas dada por $X' = QX$ é tal que $d' = e' = f' = 0$. Deixamos como exercício a prova da existência de uma tal matriz Q no caso em que $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ tem três raízes reais distintas. A demonstração do caso geral pode ser encontrada por exemplo em [21].

Multiplicando-se à esquerda pela matriz Q, obtemos

$$QB = AQ.$$

Por um lado,

$$AQ = A\,[\,U_1\;U_2\;U_3\,] = [\,AU_1\;AU_2\;AU_3\,]\,,$$

por outro lado

$$QB = [\,U_1\;U_2\;U_3\,]\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} = [\,a'U_1\;b'U_2\;c'U_3\,]$$

Assim, U_1, U_2 e U_3 satisfazem as equações

$$AU_1 = a'U_1, \quad AU_2 = b'U_2 \quad \text{e} \quad AU_3 = c'U_3.$$

A 1ª equação pode ser escrita como

$$AU_1 = a'I_3U_1$$

ou

$$(A - a'I_3)U_1 = \bar{0}.$$

Logo, U_1 é uma solução de norma igual à 1 do sistema linear

$$(A - a'I_3)X = \bar{0}.$$

Analogamente, U_2 é uma solução de norma igual à 1 do sistema linear

$$(A - b'I_3)X = \bar{0},$$

que seja ortogonal a U_1. Análogo também é o caso do terceiro vetor U_3. Mas como já temos dois vetores ortogonais U_1 e U_2, então U_3 pode ser tomado igual ao produto vetorial de U_1 por U_2,

$$U_3 = U_1 \times U_2.$$

Portanto, com a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$, para $Q = [\ U_1\ U_2\ U_3\ ]$, a equação (7.14) se transforma na equação (7.15). Os vetores U_1, U_2 e U_3 dão a direção e o sentido dos novos eixos `x'`, `y'` e `z'`.

Vamos resumir no próximo resultado o que acabamos de provar.

Teorema 7.3. *Considere a equação*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0, \qquad (7.19)$$

com $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, sendo a, b, c, d, e e f não simultaneamente nulos. Então por uma mudança de coordenadas tal que

$$X = QX',$$

em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *e* $Q = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix}$ *a equação (7.19) pode sempre ser transformada em*

$$a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + g'x' + h'y' + i'z + j = 0,$$

em que a', b', c' são raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-\lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-\lambda \end{bmatrix}.$$

Mais ainda, U_1 é uma solução de norma igual à 1 do sistema linear

$$\begin{bmatrix} a-a' & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-a' & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-a' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

U_2 é uma solução de norma igual à 1 do sistema linear

$$\begin{bmatrix} a-b' & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-b' & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$U_3 = U_1 \times U_2.$$

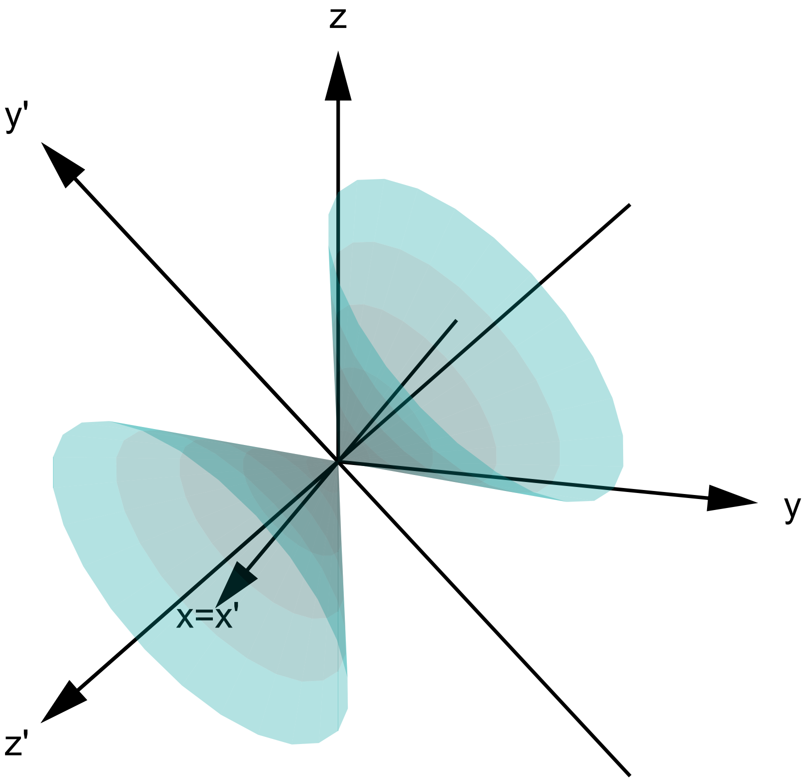


Figura 7.9 – Cone circular do Exemplo 7.6

Exemplo 7.6. Considere a quádrica de equação

$$x^2 = 2yz \tag{7.20}$$

Esta equação pode ser escrita como

$$X^t AX = 0,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As raízes de

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\lambda^2 - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$$

são $a' = b' = 1$ e $c' = -1$.
A forma escalonada reduzida de

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução geral de $(A - I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\beta, -\alpha, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

Agora, $(\alpha, -\beta, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, -1, 1)$. Assim, toda solução do sistema é combinação linear de $V_1 = (1, 0, 0)$ e $V_2 = (0, -1, 1)$.

Como $a' = b'$ teremos que encontrar dois vetores U_1 e U_2 unitários e ortogonais que são solução de $(A - I_3)X = \bar{0}$. Os vetores V_1 e V_2 já são ortogonais e assim podemos tomar

$$\begin{aligned}
U_1 &= \left(\frac{1}{||V_1||}\right) V_1 = V_1 = (1,0,0) \\
U_2 &= \left(\frac{1}{||V_2||}\right) V_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\
U_3 &= U_1 \times U_2 = \left(0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, com a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$, para $Q = [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,]$, a equação (7.20) se transforma em

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0,$$

ou

$$x'^2 + y'^2 = z'^2,$$

que é a equação de um cone circular no novo sistema de coordenadas.

Exemplo 7.7. Considere a quádrica de equação

$$7x^2 + 10y^2 + 7z^2 - 4xy + 2xz - 4yz - 6 = 0. \tag{7.21}$$

Esta equação pode ser escrita como

$$X^t A X - 6 = 0,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

As raízes de

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (7-\lambda)^2(10-\lambda) + 8 - (10-\lambda) - 8(7-\lambda) \\ &= (10-\lambda)[(7-\lambda)^2 - 1] - 8(6-\lambda) \\ &= (10-\lambda)(6-\lambda)(8-\lambda) - 8(6-\lambda) = (6-\lambda)^2(12-\lambda) \end{aligned}$$

são $a' = b' = 6$ e $c' = 12$.

A forma escalonada reduzida de

$$A - 6I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução geral de $(A - 6I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(-\alpha + 2\beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

Agora, $(-\alpha + 2\beta, \beta, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1) + \beta(2, 1, 0)$. Assim, toda solução do sistema é combinação linear de $V_1 = (-1, 0, 1)$ e $V_2 = (2, 1, 0)$.

Como $a' = b'$ teremos que encontrar dois vetores U_1 e U_2 unitários e ortogonais que são solução de $(A - 6I_3)X = \bar{0}$. O vetor

$$W_2 = V_2 - \text{proj}_{V_1} V_2 = (1, 1, 1)$$

é ortogonal a V_1 e assim podemos tomar

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(\frac{1}{||V_1||}\right) V_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \\ U_2 &= \left(\frac{1}{||W_2||}\right) W_2 = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) \\ U_3 &= U_1 \times U_2 = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}). \end{aligned}$$

Portanto, com a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$, para $Q = [\, U_1 \; U_2 \; U_3 \,]$, a equação (7.21) se transforma em

$$6x'^2 + 6y'^2 + 12z'^2 = 6 \quad \text{ou} \quad x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{1/2} = 1,$$

que é a equação de um elipsoide de revolução no novo sistema de coordenadas.

Deixamos como exercício para o leitor a demonstração do seguinte resultado que classifica o conjunto solução de todas as equações de segundo grau em três variáveis.

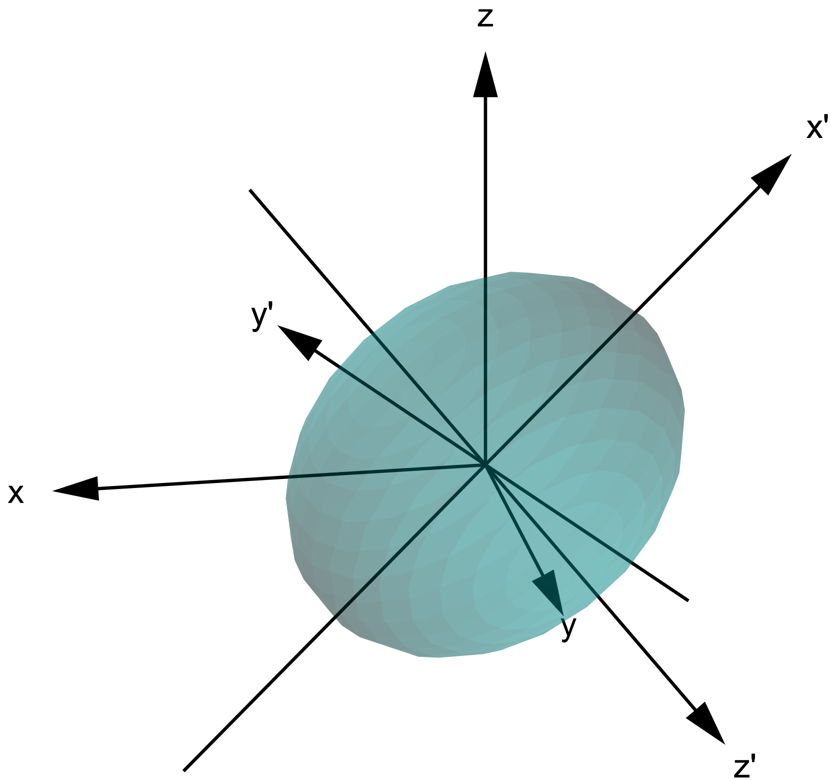


Figura 7.10 – Elipsoide de revolução do Exemplo 7.7

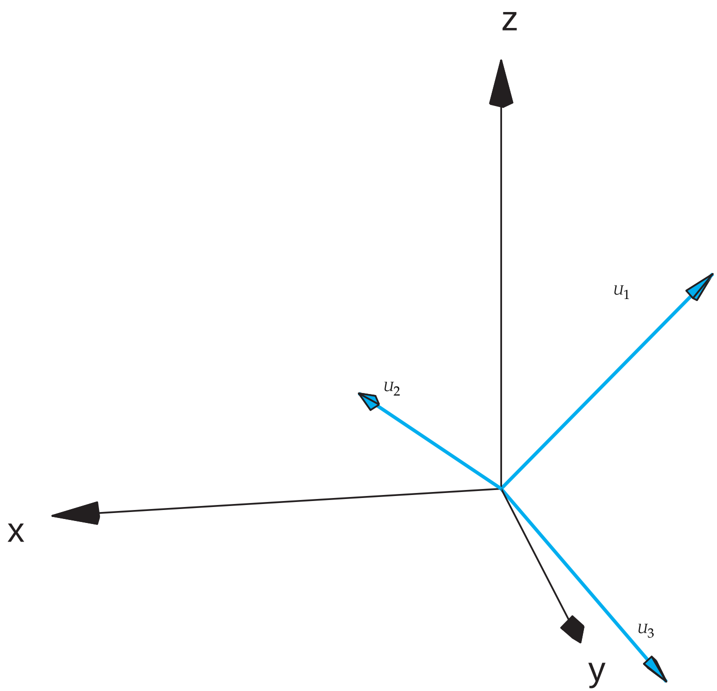


Figura 7.11 – Novo sistema de coordenadas do Exemplo 7.7

Teorema 7.4. *Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem a equação*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

com $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, sendo a, b, c, d, e e f não simultaneamente nulos. Sejam a', b' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-\lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-\lambda \end{bmatrix}.$$

(a) *Se a', b' e c' tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é um elipsoide, um ponto ou o conjunto vazio.*

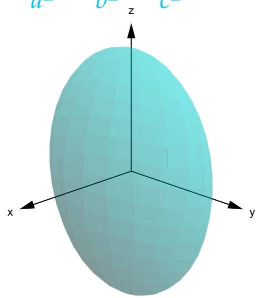
(b) *Se a', b' e c' forem não nulos e não tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é uma hiperboloide de uma folha, de duas folhas, ou um cone elíptico.*

(c) *Se apenas um entre a', b' e c' for nulo, então $\mathcal{S}$ é um paraboloide elíptico, hiperbólico, um cilindro elíptico, hiperbólico, dois planos concorrentes, uma reta ou o conjunto vazio.*

(d) *Se exatamente dois entre a', b' e c' forem nulos, então $\mathcal{S}$ é um cilindro parabólico, um par de planos paralelos ou um plano.*

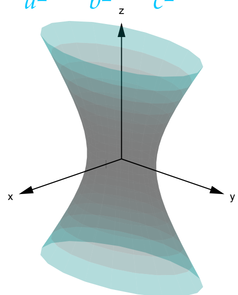
Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



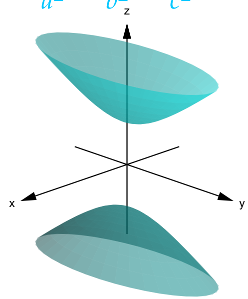
Hiperboloide de Uma Folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloide de Duas Folhas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



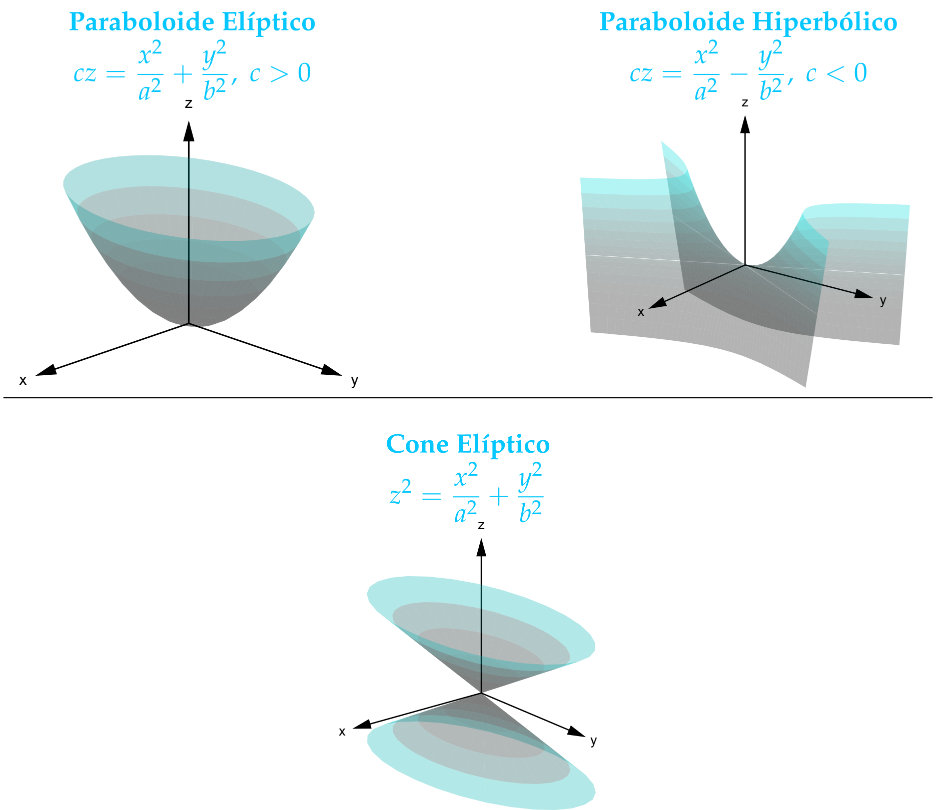


Figura 7.12 – Algumas Quádricas não degeneradas com equações na forma padrão

Exercícios Numéricos (respostas na página 633)

Identifique a quádrica, ache a equação no último sistema de coordenadas utilizado e faça um esboço do gráfico.

7.3.1. $2x^2 + 30y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$;

7.3.2. $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$;

7.3.3. $2xy + z = 0$;

7.3.4. $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = 9$;

7.3.5. $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$;

Exercícios usando o MATLAB®

Comandos do pacote GAAL:

`>> subst(expr,[x;y;z],[a;b;c])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x,y,z` por `a,b,c`, respectivamente.

`>> elipso(a,b,c)` desenha o elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> elipso(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o elipsoide $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> elipso(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o elipsoide $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo1x(a,b,c)` desenha o hiperboloide de uma folha $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo1x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperboloide de uma folha $-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbo1x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperboloide de uma folha $-\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo1y(a,b,c)` desenha o hiperboloide de uma folha $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo1y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperboloide de uma folha $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> hiperbo1y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperboloide de uma folha $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo1z(a,b,c)` desenha o hiperboloide de uma folha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo1z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperboloide de uma folha $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1`,`U2` e `U3`.

`>> hiperbo1z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperboloide de uma folha $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1`,`U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo2x(a,b,c)` desenha o hiperboloide de duas folhas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo2x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperboloide de duas folhas $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1`,`U2` e `U3`.

`>> hiperbo2x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperboloide de duas folhas $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1`,`U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo2y(a,b,c)` desenha o hiperboloide de duas folhas $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> hiperbo2y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperboloide de duas folhas $-\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> hiperbo2y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperboloide de duas folhas $-\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> hiperbo2z(a,b,c)` desenha o hiperboloide de duas folhas $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

`>> hiperbo2z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o hiperboloide de duas folhas $-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> hiperbo2z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o hiperboloide de duas folhas $-\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo1x(a,b,c)` desenha o paraboloide elíptico $ax=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

`>> parabo1x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o paraboloide elíptico $ax'=\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

`>> parabo1x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o paraboloide elíptico $ax''=\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo1y(a,b,c)` desenha o paraboloide elíptico $by=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

`>> parabo1y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o paraboloide elíptico $by'=\frac{x'^2}{a^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo1y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o paraboloide elíptico $by''=\frac{x''^2}{a^2}+\frac{z''^2}{c^2}=1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo1z(a,b,c)` desenha o paraboloide elíptico $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

`>> parabo1z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o paraboloide elíptico $cz' = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo1z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o paraboloide elíptico $cz'' = \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2}$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo2x(a,b,c)` desenha o paraboloide hiperbólico $ax = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> parabo2x(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o paraboloide hiperbólico $ax' = \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo2x(a,b,[U1 U2 U3],X0)` desenha o paraboloide hiperbólico $ax'' = \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo2y(a,b,c)` desenha o paraboloide hiperbólico $by = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

`>> parabo2y(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o paraboloide hiperbólico $by' = \frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo2y(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o paraboloide hiperbólico $by'' = \frac{x''^2}{a^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

`>> parabo2z(a,b,c)` desenha o paraboloide hiperbólico $cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

`>> parabo2z(a,b,c,[U1 U2 U3])` desenha o paraboloide hiperbólico $cz' = \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}$, em que x' e y' são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1,U2` e `U3`.

`>> parabo2z(a,b,c,[U1 U2 U3],X0)` desenha o paraboloide hiperbólico $cz'' = \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2}$, em que x'' e y'' são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1,U2` e `U3` e pelo ponto `X0`.

7.3.6. Use o MATLAB® para resolver os **Exercícios Numéricos**.

Exercícios Teóricos

7.3.7. Considere o polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$, em que

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}.$$

(a) Sejam α e β raízes reais distintas de $p(\lambda)$. Mostre que se X_1 é solução de $(A - \alpha I_2)X = \bar{0}$ e X_2 é solução de $(A - \beta I_2)X = \bar{0}$, então X_1 e X_2 são ortogonais. (Sugestão: Mostre que $\alpha X_1 \cdot X_2 = \beta X_1 \cdot X_2$)

(b) Mostre que se $p(\lambda)$ tem raízes reais distintas, então sempre existe uma matriz Q tal que

$$Q^t A Q = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}$$

e portanto tal que a mudança de coordenadas dada por $X = QX'$ transforma (7.14) em (7.15 na página 482.

7.3.8. Mostre que a superfície cônica cuja geratriz é uma parábola $y^2 = 4px$ em um plano $z = k$ é um cone elíptico.

7.3.9. Mostre que a interseção de um plano $by + cz + d = 0$, em que $b^2 + c^2 = 1$, com o cone $x^2 + y^2 = z^2$ é uma cônica que pode ser uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. (Sugestão: mude para um sistema de coordenadas $\{O, U_1, U_2, U_3\}$ tal que $U_1 = \vec{i} = (1,0,0)$, $U_2 = (0,b,c)$ e $U_3 = (0,-c,b)$)

7.3.10. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem a equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

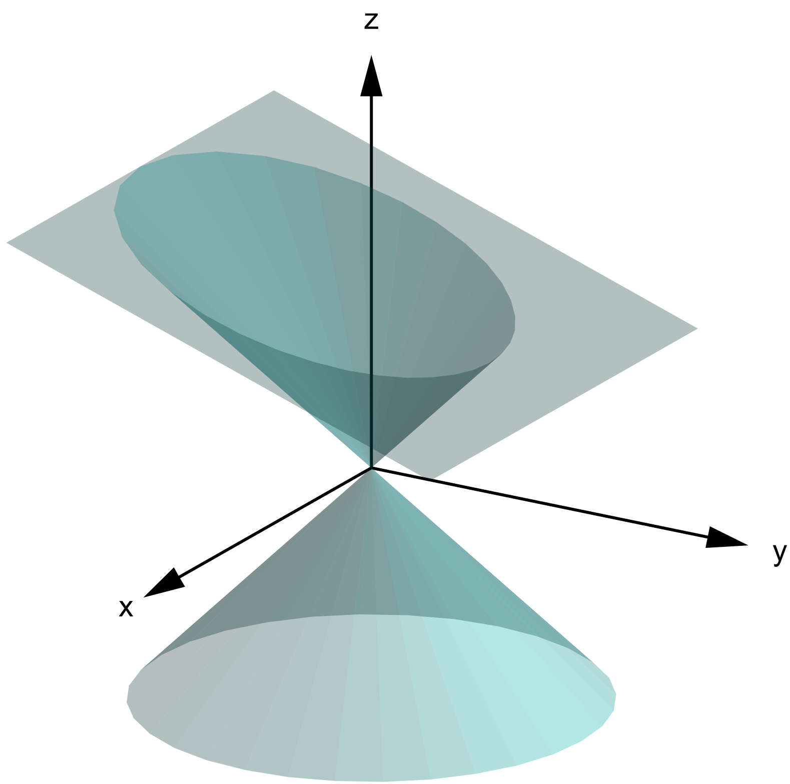


Figura 7.13 – Elipse obtida seccionando-se o cone $x^2 + y^2 = z^2$ com um plano $by + cz + d = 0$

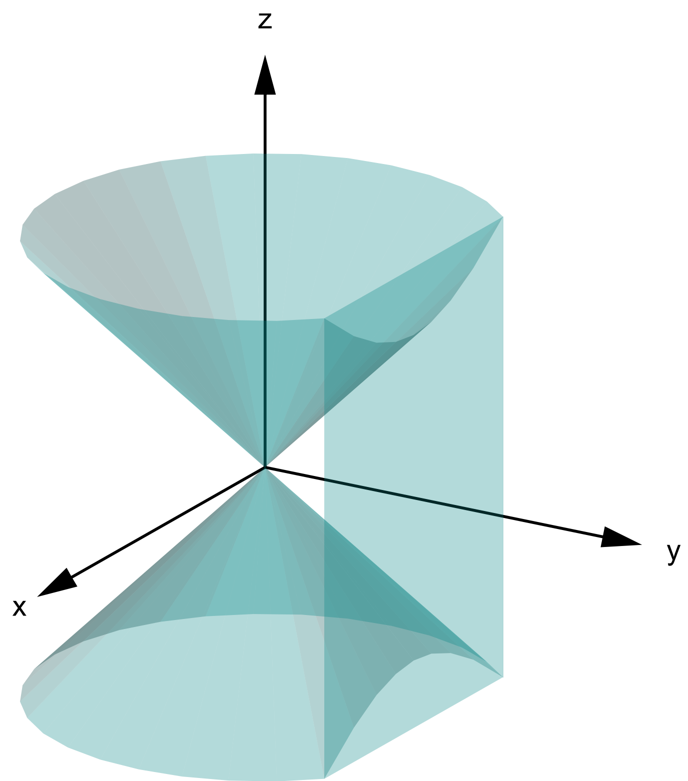


Figura 7.14 – Hipérbole obtida seccionando-se o cone $x^2 + y^2 = z^2$ com um plano $by + cz + d = 0$

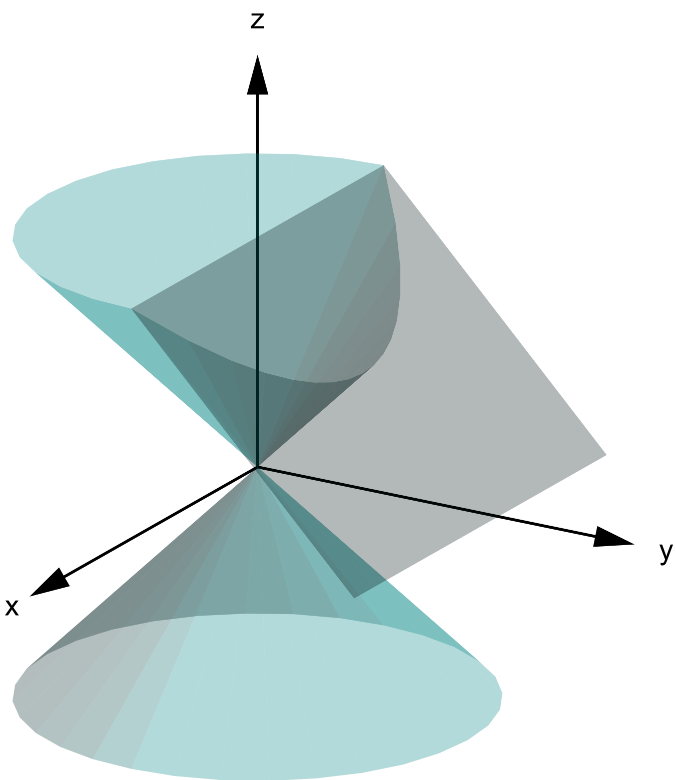


Figura 7.15 – Parábola obtida seccionando-se o cone $x^2 + y^2 = z^2$ com um plano $by + cz + d = 0$

com $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, sendo a, b, c, d, e e f não simultaneamente nulos. Sejam a', b' e c' raízes de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & d/2 & e/2 \\ d/2 & b-\lambda & f/2 \\ e/2 & f/2 & c-\lambda \end{bmatrix}.$$

Mostre que

(a) Se a', b' e c' tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é um elipsoide, um ponto ou o conjunto vazio.

(b) Se a', b' e c' forem não nulos e não tiverem mesmo sinal, então $\mathcal{S}$ é uma hiperboloide de uma folha, de duas folhas, ou um cone elíptico.

(c) Se apenas um entre a', b' e c' for nulo, então $\mathcal{S}$ é um paraboloide elíptico, hiperbólico, um cilindro elíptico, hiperbólico, dois planos concorrentes, uma reta ou o conjunto vazio.

(d) Se exatamente dois entre a', b' e c' forem nulos, então $\mathcal{S}$ é um cilindro parabólico, um par de planos paralelos ou um plano.

7.3.11. Mostre que a interseção de um cone circular com plano que não passa pelo seu vértice é uma cônica seguindo os seguintes passos:

(a) Considere dois sistemas de coordenadas $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $\mathcal{S} = \{O, \vec{i}, U_2, U_3\}$, em que $U_2 = (0, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $U_3 = (0, -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, ou seja, o sistema $\mathcal{S}$ é obtido do sistema $\mathcal{R}$ por uma rotação do ângulo θ em torno do eixo x. Mostre que é válida a seguinte relação entre as coordenadas, (x', y', z'), em relação ao sistema $\mathcal{S}$ e (x, y, z), em relação ao sistema $\mathcal{R}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ (\cos\theta)y + (\operatorname{sen}\theta)z \\ -(\operatorname{sen}\theta)y + (\cos\theta)z \end{bmatrix}.$$

(b) Mostre que o cone circular de equação

$$x'^2 + y'^2 = z'^2$$

no sistema $\mathcal{S}$ tem equação

$$x^2 + (\cos 2\theta)y^2 + (2\,\mathrm{sen}\,2\theta)yz - (\cos 2\theta)z^2 = 0$$

no sistema $\mathcal{R}$.

(c) Mostre que a interseção do cone com o plano $z = 1$ é a cônica no plano de equação

$$x^2 + (\cos 2\theta)y^2 + (2\,\mathrm{sen}\,2\theta)y = \cos 2\theta$$

(d) Mostre que se $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$, então a cônica é a parábola no plano de equação

$$x^2 \pm 2y = 0.$$

(e) Mostre que se $\theta \neq \pm\frac{\pi}{4}$, então a cônica no plano tem equação

$$\frac{x^2}{\sec 2\theta} + \frac{(y + \tan 2\theta)^2}{\sec^2 2\theta} = 1,$$

que é uma elipse se $|\theta| < \frac{\pi}{4}$ e uma hipérbole se $\frac{\pi}{4} < |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$.

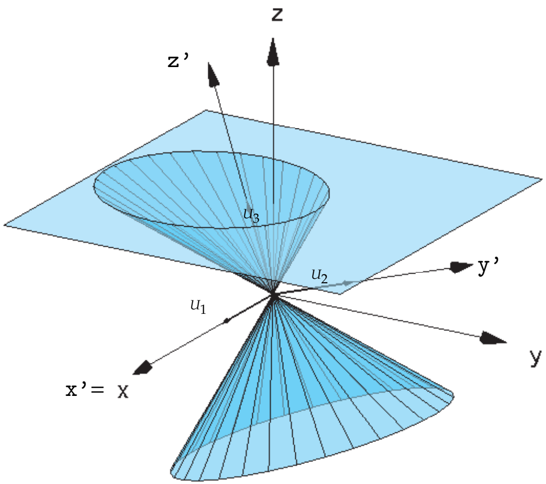


Figura 7.16 – Elipse interseção do cone circular com um plano

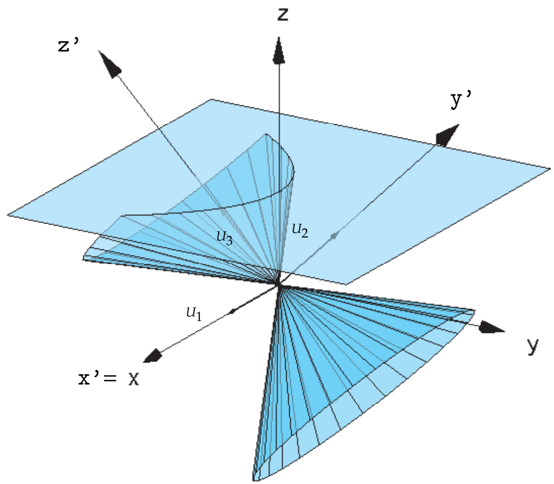


Figura 7.17 – Parábola interseção do cone circular com um plano

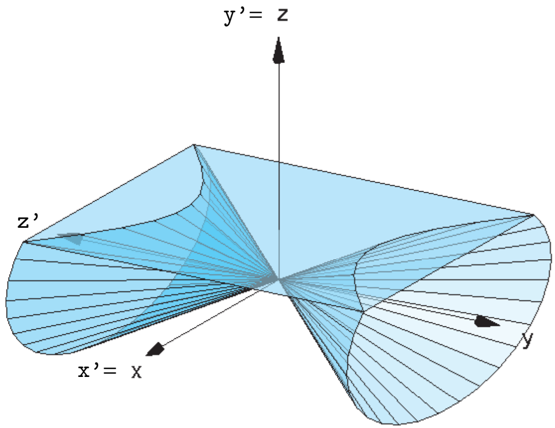


Figura 7.18 – Hipérbole interseção do cone circular com um plano

Respostas dos Exercícios

1.1. Matrizes (página 16)

1.1.1.
```
>> A=[2,0;6,7]; B=[0,4;2,-8]; C=[-6,9,-7;7,-3,-2];
>> D=[-6,4,0;1,1,4;-6,0,6]; E=[6,9,-9;-1,0,-4;-6,0,-1];
>> A*B-B*A
   -24   -20
    58    24
>> 2*C-D
??? Error using ==> - Matrix dimensions must agree.
>> 2*D-3*E
   -30   -19    27
     5     2    20
     6     0    15
>> D*(D-E)
    80    34   -22
   -10    -4    45
    72    30   -12
```

No item (c) foram usadas as propriedades (l) e (n) do Teorema 1.1 na página 8 e no item (d) foi usada a propriedade (i).

1.1.2. $A(B+C) = AB + AC$, $B^t A^t = (AB)^t$, $C^t A^t = (AC)^t$, $(ABA)C = (AB)(AC)$.

1.1.3. (a)
```
>> A=[-3,2,1;1,2,-1];B=[2,-1;2,0;0,3];
>> C=[-2,1,-1;0,1,1;-1,0,1];
>> syms d1 d2 d3
>> D=diag([d1,d2,d3]);
>> E1=[1;0;0];E2=[0;1;0];E3=[0;0;1];
>> B*A
    -7      2      3
    -6      4      2
     3      6     -3
>> A*B
    -2      6
     6     -4
```

(b)
```
>> [A*E1-A(:,1),A*E2-A(:,2),A*E3-A(:,3)]
     0      0      0
     0      0      0
>> E1.'*B-B(1,:)
     0      0
>> E2.'*B-B(2,:)
     0      0
>> E3.'*B-B(3,:)
     0      0
```

(c)
```
>> C1=C(:,1);C2=C(:,2);C3=C(:,3);
>> C*D-[d1*C1,d2*C2,d3*C3]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
```

(d)
```
>> C1=C(1,:);C2=C(2,:);C3=C(3,:);
>> D*C-[d1*C1;d2*C2;d3*C3]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
```

(e)
```
>> B1=B(:,1);B2=B(:,2);
>> A*B-A*[B1,B2]
     0     0
     0     0
```

(f)
```
>> A1=A(1,:);A2=A(2,:);
>> A*B-[A1;A2]*B
     0     0
     0     0
```

1.1.4.
```
>> syms x y z
>> A=[1,-3,0;0,4,-2]; X=[x;y;z];
>> A*X
[   x-3*y]
[ 4*y-2*z]
>> x*A(:,1)+y*A(:,2)+z*A(:,3)
[   x-3*y]
[ 4*y-2*z]
```

1.1.5.
```
>> syms x
>> A=[x,4,-2]; B=[2,-3,5];
>> solve(A*B.')
11
```

1.1.6.
```
>> syms y
>> A=[1,1/y;y,1];
>> A^2-2*A
```

```
[ 0, 0]
[ 0, 0]
```

1.1.7.
```
>> syms x y z w
>> X=[x,y;z,w]; M=[0,1;-1,0];
>> X*M-M*X
[ -y-z,  x-w]
[  x-w,  z+y]
>> syms a b c d
>> A=[x,y;-y,x]; B=[a,b;-b,a];
>> A*B-B*A
[ 0, 0]
[ 0, 0]
```

1.1.8. (a) Sejam $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

```
>> syms x y z w
>> syms a b c d
>> A=[x,0;0,y];B=[a,b;c,d];
>> A*B
[ x*a, x*b]
[ y*c, y*d]
>> B*A
[ x*a, b*y]
[ c*x, y*d]
```

Como $yb = xb$, para todo b, em particular para $b = 1$, obtemos que $y = x$. Assim, a matriz A que além de ser diagonal tem os elementos da diagonal iguais.

(b) Sejam $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

```
>> A=[x,y;z,w];B=[a,b;c,d];
```

```
>> A*B
[ x*a+y*c, x*b+y*d]
[ z*a+w*c, z*b+w*d]
>> B*A
[ x*a+z*b, a*y+b*w]
[ c*x+d*z, y*c+w*d]
```

Comparando os elementos de posição 1,1 obtemos que $cy = bz$, para todos os valores de b e c. Em particular para $b = 0$ e $c = 1$, obtemos que $y = 0$ e para $b = 1$ e $c = 0$, obtemos que $z = 0$. Ou seja, a matriz A tem que ser diagonal. Assim, pelo item anterior temos que a matriz A tem que ser diagonal com os elementos da diagonal iguais.

1.1.9. (a)

```
>> A=[1,1/2;0,1/3]
A =
    1.0000    0.5000
         0    0.3333
>> A^2,A^3,A^4,A^5
ans =
    1.0000    0.6667
         0    0.1111
ans =
    1.0000    0.7222
         0    0.0370
ans =
    1.0000    0.7407
         0    0.0123
ans =
    1.0000    0.7469
         0    0.0041
>> A^6,A^7,A^8,A^9
ans =
    1.0000    0.7490
```

```
          0    0.0014
ans =
     1.0000    0.7497
          0    0.0005
ans =
     1.0000    0.7499
          0    0.0002
ans =
     1.0000    0.7500
          0    0.0001
```

A seqüência parece estar convergindo para a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b)
```
>> A=[1/2,1/3;0,-1/5]
A =
     0.5000    0.3333
          0   -0.2000
>> A^2,A^3,A^4,A^5
ans =
     0.2500    0.1000
          0    0.0400
ans =
     0.1250    0.0633
          0   -0.0080
ans =
     0.0625    0.0290
          0    0.0016
ans =
     0.0312    0.0150
          0   -0.0003
>> A^6,A^7,A^8,A^9
```

```
ans =
    0.0156    0.0074
         0    0.0001
ans =
    0.0078    0.0037
         0    0.0000
ans =
    0.0039    0.0019
         0    0.0000
ans =
    0.0020    0.0009
         0    0.0000
```

A seqüência parece estar convergindo para a matriz nula $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.1.10. (a)
```
>> A=[0,0,1;1,0,0;0,1,0];
>> A=sym(A)
[ 0, 0, 1]
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
>> A^2
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
[ 1, 0, 0]
>> A^3
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
```
Para $k = 3$, $A^k = I_3$.

(b)
```
>> A=[0,1,0,0;-1,0,0,0;0,0,0,1;...
0,0,1,0];
```

```
>> A=sym(A)
[  0,  1,  0,  0]
[ -1,  0,  0,  0]
[  0,  0,  0,  1]
[  0,  0,  1,  0]
>> A^2
[ -1,  0,  0,  0]
[  0, -1,  0,  0]
[  0,  0,  1,  0]
[  0,  0,  0,  1]
>> A^3
[  0, -1,  0,  0]
[  1,  0,  0,  0]
[  0,  0,  0,  1]
[  0,  0,  1,  0]
>> A^4
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
```

Para $k = 4$, $A^k = I_4$.

(c)
```
>> A=[0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1;0,0,0,0];
>> A=sym(A)
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0]
>> A^2
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
```

```
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
>> A^3
[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
>> A^4
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

Para $k = 4$, $A^k = \bar{0}$.

1.1.11. Concluímos que é muito raro encontrar matrizes cujo produto comute.

1.1.12. Concluímos que matrizes diagonais em geral comutam. Pode-se mostrar que elas sempre comutam (Exercício 27 na página 26).

1.1.13. Se a matriz `A` for diagonal, então o produto comuta, se os elementos da diagonal de `A` são iguais. (ver Exercício 16 na página 22). A probabilidade de um tal par de matrizes comute é aproximadamente igual à probabilidade de que a primeira matriz tenha os elementos da sua diagonal iguais, ou seja, $11/11^3 = 1/11^2 \approx 1\%$.

1.2. Sistemas Lineares (página 54)

1.2.1. As matrizes que estão na forma reduzida escalonada são A e C.

1.2.2. (a) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+7\alpha \\ 2-3\alpha \\ -5-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(b) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-3\alpha+6\beta \\ \beta \\ 7-4\alpha \\ 8-5\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

(c) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(d) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+8\alpha-7\beta \\ \beta \\ 5-6\alpha \\ 9-3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

1.2.3. (a)
```
>> A=[1,1,2,8;-1,-2,3,1;3,-7,4,10];
>> escalona(A)
eliminação 1:
1*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[   1,   1,   2,   8]
[   0,  -1,   5,   9]
[   0, -10,  -2, -14]
eliminação 2:
-1*linha 2 ==> linha 2
[   1,   1,   2,   8]
[   0,   1,  -5,  -9]
[   0, -10,  -2, -14]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
10*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,    7,   17]
```

```
[    0,    1,   -5,   -9]
[    0,    0,  -52, -104]
eliminação 3:
-1/52*linha 3 ==> linha 3
[  1,  0,  7, 17]
[  0,  1, -5, -9]
[  0,  0,  1,  2]
-7*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
5*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, 0, 3]
[ 0, 1, 0, 1]
[ 0, 0, 1, 2]
```

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b)
```
>> A=[2,2,2,0;-2,5,2,1;8,1,4,-1];
>> escalona(A)
eliminação 1:
1/2*linha 1 ==> linha 1
[  1,  1,  1,  0]
[ -2,  5,  2,  1]
[  8,  1,  4, -1]
2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-8*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[  1,  1,  1,  0]
[  0,  7,  4,  1]
[  0, -7, -4, -1]
eliminação 2:
1/7*linha 2 ==> linha 2
[   1,    1,    1,    0]
```

```
[   0,   1, 4/7, 1/7]
[   0,  -7,  -4,  -1]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
7*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[    1,     0,   3/7, -1/7]
[    0,     1,   4/7,  1/7]
[    0,     0,     0,    0]
```

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}\alpha \\ \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(c)
```
>> A=[0,-2,3,1;3,6,-3,-2;6,6,3,5]
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[  3,  6, -3, -2]
[  0, -2,  3,  1]
[  6,  6,  3,  5]
1/3*linha 1 ==> linha 1
[    1,     2,    -1, -2/3]
[    0,    -2,     3,    1]
[    6,     6,     3,    5]
-6*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[    1,     2,    -1, -2/3]
[    0,    -2,     3,    1]
[    0,    -6,     9,    9]
eliminação 2:
-1/2*linha 2 ==> linha 2
[    1,     2,    -1, -2/3]
[    0,     1,  -3/2, -1/2]
[    0,    -6,     9,    9]
```

```
-2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
6*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,    2,  1/3]
[    0,    1, -3/2, -1/2]
[    0,    0,    0,    6]
```

O sistema **não** tem solução!

1.2.4.
```
>> A=[1,-2,1;2,-5,1;3,-7,2];
>> B1=[1;-2;-1];B2=[2;-1;2];
>> escalona([A,B1,B2])
eliminação 1:
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[  1, -2,  1,  1,  2]
[  0, -1, -1, -4, -5]
[  0, -1, -1, -4, -4]
eliminação 2:
-1*linha 2 ==> linha 2
[  1, -2,  1,  1,  2]
[  0,  1,  1,  4,  5]
[  0, -1, -1, -4, -4]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[  1,  0,  3,  9, 12]
[  0,  1,  1,  4,  5]
[  0,  0,  0,  0,  1]
```

(a) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-3\alpha \\ 4-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(b) O sistema **não** tem solução!

1.2.5. (a)
```
>> A=[1,0,5;1,1,1;0,1,-4];
>> B=A+4*eye(3);
>> escalona([B,zeros(3,1)])
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1, 5, 1, 0]
[ 5, 0, 5, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
(-5)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[   1,   5,   1,   0]
[   0, -25,   0,   0]
[   0,   1,   0,   0]
eliminação 2:
linha 3 <==> linha 2
[   1,   5,   1,   0]
[   0,   1,   0,   0]
[   0, -25,   0,   0]
(-5)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(25)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 1, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b)
```
>> B=A-2*eye(3);
>> escalona([B,zeros(3,1)])
eliminação 1:
(-1)*linha 1 ==> linha 1
[  1,  0, -5,  0]
```

```
[  1, -1,  1,  0]
[  0,  1, -6,  0]
(-1)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[  1,  0, -5,  0]
[  0, -1,  6,  0]
[  0,  1, -6,  0]
eliminação 2:
(-1)*linha 2 ==> linha 2
[  1,  0, -5,  0]
[  0,  1, -6,  0]
[  0,  1, -6,  0]
(-1)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[  1,  0, -5,  0]
[  0,  1, -6,  0]
[  0,  0,  0,  0]
```

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\alpha \\ 6\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.2.6. (a)

```
>> syms a
>> A=[1,2,-3,4;3,-1,5,2;4,1,a^2-14,a+2];
>> escalona(A)
eliminação 1:
-3*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[     1,     2,    -3,     4]
[     0,    -7,    14,   -10]
[     0,    -7, a^2-2,  a-14]
eliminação 2:
-1/7*linha 2 ==> linha 2
[     1,     2,    -3,     4]
```

```
[      0,      1,     -2,  10/7]
[      0,     -7, a^2-2,  a-14]
-2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
7*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{bmatrix}$$

i. Se $a^2 - 16 = 0$ e $a - 4 = 0$, então o sistema tem infinitas soluções. Neste caso, $a = 4$;

ii. Se $a^2 - 16 = 0$ e $a - 4 \neq 0$, então o sistema não tem solução. Neste caso, $a = -4$;

iii. Se $a^2 - 16 \neq 0$, então o sistema tem solução única. Neste caso, $a \neq \pm 4$;

(b)
```
>> A=[1,1,1,2;2,3,2,5;2,3,a^2-1,a+1];
>> escalona(A)
eliminação 1:
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-2*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[      1,      1,      1,      2]
[      0,      1,      0,      1]
[      0,      1, a^2-3,    a-3]
eliminação 2:
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a-4 \end{bmatrix}$$

i. Se $a^2 - 3 = 0$ e $a - 4 = 0$, então o sistema tem infinitas soluções. Este caso não pode ocorrer;

ii. Se $a^2 - 3 = 0$ e $a - 4 \neq 0$, então o sistema não tem solução. Neste caso, $a = \pm\sqrt{3}$;

iii. Se $a^2 - 3 \neq 0$, então o sistema tem solução única. Neste caso, $a \neq \pm\sqrt{3}$;

1.2.7.

$$\begin{array}{r} \\ \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \\ \text{preço/kg} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{kg de X} \\ \text{kg de Y} \\ \text{kg de Z} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{c} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{gramas de A} \\ \text{gramas de B} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \end{array}\right]$$

```
>> A=[2,1,3,1900;1,3,5,2400;3,2,4,2900];
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[    1,    3,    5, 2400]
[    2,    1,    3, 1900]
[    3,    2,    4, 2900]
(-2)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(-3)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[     1,     3,     5,  2400]
[     0,    -5,    -7, -2900]
[     0,    -7,   -11, -4300]
eliminação 2:
(-1/5)*linha 2 ==> linha 2
[     1,     3,     5,  2400]
[     0,     1,   7/5,   580]
[     0,    -7,   -11, -4300]
(-3)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
```

```
(7)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,  4/5,  660]
[    0,    1,  7/5,  580]
[    0,    0, -6/5, -240]
eliminação 3:
(-5/6)*linha 3 ==> linha 3
[   1,   0, 4/5, 660]
[   0,   1, 7/5, 580]
[   0,   0,   1, 200]
(-4/5)*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
(-7/5)*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[   1,   0,   0, 500]
[   0,   1,   0, 300]
[   0,   0,   1, 200]
```

Foram vendidos 500 kg do produto X, 300 kg do produto Y e 200 kg do produto Z.

1.2.8. Substituindo os pontos na função obtemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & & & d & = & 10 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 7 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & -11 \\ 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & -14 \end{array}\right. .$$

Substituindo $d = 10$ nas outras equações e escalonando a matriz aumentada do sistema correspondente:

```
>> escalona([1,1,1,-3;27,9,3,-21;64,16,4,-24])
eliminação 1:
-27*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-64*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[   1,   1,   1,  -3]
[   0, -18, -24,  60]
[   0, -48, -60, 168]
```

```
eliminação 2:
-1/18*linha 2 ==> linha 2
[      1,      1,      1,     -3]
[      0,      1,    4/3,  -10/3]
[      0,    -48,    -60,    168]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
48*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[      1,      0,   -1/3,    1/3]
[      0,      1,    4/3,  -10/3]
[      0,      0,      4,      8]
eliminação 3:
1/4*linha 3 ==> linha 3
[      1,      0,   -1/3,    1/3]
[      0,      1,    4/3,  -10/3]
[      0,      0,      1,      2]
1/3*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
-4/3*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[  1,  0,  0,  1]
[  0,  1,  0, -6]
[  0,  0,  1,  2]
```

Assim, os coeficientes são $a = 1, b = -6, c = 2$ e $d = 10$ e o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$.

1.2.9. Substituindo os pontos na equação do círculo obtemos:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -2a & + & 7b & + & c & = & -[(-2)^2 + 7^2] & = & -53 \\ -4a & + & 5b & + & c & = & -[(-4)^2 + 5^2] & = & -41 \\ 4a & - & 3b & + & c & = & -[4^2 + 3^2] & = & -25 \end{array}\right. .$$

```
>> A=[-2,7,1,-53;-4,5,1,-41;4,-3,1,-25];
>> escalona(A)
eliminação 1:
```

```
-1/2*linha 1 ==> linha 1
[    1, -7/2, -1/2, 53/2]
[   -4,    5,    1,  -41]
[    4,   -3,    1,  -25]
4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[    1, -7/2, -1/2, 53/2]
[    0,   -9,   -1,   65]
[    0,   11,    3, -131]
eliminação 2:
-1/9*linha 2 ==> linha 2
[     1,  -7/2,  -1/2,  53/2]
[     0,     1,   1/9, -65/9]
[     0,    11,     3,  -131]
7/2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-11*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[      1,      0,   -1/9,   11/9]
[      0,      1,    1/9,  -65/9]
[      0,      0,   16/9, -464/9]
eliminação 3:
9/16*linha 3 ==> linha 3
[     1,     0,  -1/9,  11/9]
[     0,     1,   1/9, -65/9]
[     0,     0,     1,   -29]
1/9*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
-1/9*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[   1,   0,   0,  -2]
[   0,   1,   0,  -4]
[   0,   0,   1, -29]
```

Os coeficientes são $a = -2, b = -4$ e $c = -29$ e a equação do círculo é $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 29 = 0$.

1.2.10. (a)
```
>> syms b1 b2 b3
>> A=[1,-2,5,b1;4,-5,8,b2;-3,3,-3,b3];
>> escalona(A)
eliminação 1:
-4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2,   5,      b1]
[ 0,  3, -12, b2-4*b1]
[ 0, -3,  12, b3+3*b1]
eliminação 2:
1/3*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2,  5,           b1]
[ 0,  1, -4, 1/3*b2-4/3*b1]
[ 0, -3, 12,      b3+3*b1]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
3*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -3, -5/3*b1+2/3*b2]
[ 0, 1, -4,  1/3*b2-4/3*b1]
[ 0, 0,  0,       b3-b1+b2]
```
O sistema é consistente se, e somente se, $b_3 - b_1 + b_2 = 0$.

(b)
```
>> syms b1 b2 b3
>> A=[1,-2,-1,b1;-4,5,2,b2;-4,7,4,b3];
>> escalona(A)
eliminação 1:
4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2, -1,      b1]
[ 0, -3, -2, b2+4*b1]
[ 0, -1,  0, b3+4*b1]
eliminação 2:
```

```
linha 3 <==> linha 2
[ 1, -2, -1,       b1]
[ 0, -1,  0, b3+4*b1]
[ 0, -3, -2, b2+4*b1]
-1*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2, -1,        b1]
[ 0,  1,  0, -b3-4*b1]
[ 0, -3, -2,  b2+4*b1]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
3*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -1,   -7*b1-2*b3]
[ 0, 1,  0,     -b3-4*b1]
[ 0, 0, -2, b2-8*b1-3*b3]
```

O sistema é consistente para todos os valores reais de b_1, b_2 e b_3.

1.2.11.

```
>> A=[0,1,7,8;1,3,3,8;-2,-5,1,-8];
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[  1,  3,  3,  8]
[  0,  1,  7,  8]
[ -2, -5,  1, -8]
2*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 3, 3, 8]
[ 0, 1, 7, 8]
[ 0, 1, 7, 8]
eliminação 2:
-3*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[   1,   0, -18, -16]
[   0,   1,   7,   8]
```

```
[    0,    0,    0,    0]
>> I=eye(3);E=oe(-1,2,3,I),...
F=oe(-3,2,1,I),G=oe(2,1,3,I),H=oe(I,1,2)
E =[  1,  0,  0]F =[  1, -3,  0]
   [  0,  1,  0]   [  0,  1,  0]
   [  0, -1,  1]   [  0,  0,  1]
G =[ 1, 0, 0]H =[ 0, 1, 0]
   [ 0, 1, 0]   [ 1, 0, 0]
   [ 2, 0, 1]   [ 0, 0, 1]
>> E*F*G*H*A
[    1,    0,  -18,  -16]
[    0,    1,    7,    8]
[    0,    0,    0,    0]
```

1.2.12. (a)

```
>> A=[1,2,0,-3,1,0,2;1,2,1,-3,1,2,3;...
1,2,0,-3,2,1,4;3,6,1,-9,4,3,9]
>> escalona(A)
[  1,   2,   0,  -3,   0,  -1,   0]
[  0,   0,   1,   0,   0,   2,   1]
[  0,   0,   0,   0,   1,   1,   2]
[  0,   0,   0,   0,   0,   0,   0]
```

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} x_1+2x_2 & & -3x_4 & & - & x_6 & =0 \\ & x_3 & & & + & 2x_6 & =1 \\ & & & x_5 & + & x_6 & =2 \end{array}\right.$$

$X = [\alpha + 3\beta - 2\gamma \quad \gamma \quad 1-2\alpha \quad \beta \quad 2-\alpha \quad \alpha]^t$,
$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(b)

```
>> A=[1,3,-2,0,2,0,0;2,6,-5,-2,4,-3,-1;...
0,0,5,10,0,15,5;2,6,0,8,4,18,6]
>> escalona(A)
[    1,    3,    0,    4,    2,    0,    0]
[    0,    0,    1,    2,    0,    0,    0]
```

```
[    0,    0,    0,    0,    0,    1,  1/3]
[    0,    0,    0,    0,    0,    0,    0]
```

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 + 3x_2 & & + 4x_4 & + \quad 2x_5 & = 0 \\ & x_3 & + 2x_4 & & = 0 \\ & & & & x_6 = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$X = [-2\alpha - 4\beta - 3\gamma \quad \gamma \quad -2\beta \quad \beta \quad \alpha \quad 1/3]^t$,
$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

1.2.13.

```
>> syms a, B=[4,3,1,6]';
>> A=[1,1,1,1;1,3,-2,a;
2,2*a-2,-a-2,3*a-1;3,a+2,-3,2*a+1]
>> escalona([A,B])
[ 1,  0,  0,  0, (4*a-11)/(a-5)]
[ 0,  1,  0,  0,        -4/(a-5)]
[ 0,  0,  1,  0,        -4/(a-5)]
[ 0,  0,  0,  1,        -1/(a-5)]
>> solve(-3/2*a+5/4+1/4*a^2,a)
ans = [ 1][ 5]
```

Se $a \neq 1$ e $a \neq 5$, então $X = [\frac{4a-11}{a-5} \; \frac{-4}{a-5} \; \frac{-4}{a-5} \; \frac{-1}{a-5}]^t$.

```
>> C=subs(A,a,1)
>> escalona([C,B])
[ 1, 0, 0, 1, 2]
[ 0, 1, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 1, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0, 0]
```

Se $a = 1$, então $X = [2 - \alpha, 1, 1, \alpha]^t \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

```
>> D=subs(A,a,5)
>> escalona([D,B])
```

```
[     1,     0,   5/2,    -1,     0]
[     0,     1,  -3/2,     2,     0]
[     0,     0,     0,     0,     1]
[     0,     0,     0,     0,     0]
```

Se $a = 5$, então o sistema não tem solução.

1.2.14. (a)
```
>> A=[1,2,3,1,8;1,3,0,1,7;1,0,2,1,3];
>> escalona(A)
[ 1, 0, 0, 1, 1]
[ 0, 1, 0, 0, 2]
[ 0, 0, 1, 0, 1]
```

$$\{(1-\alpha, 2, 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(b)
```
>> A=[1,1,3,-3,0;0,2,1,-3,3;1,0,2,-1,-1];
>> escalona(A)
[  1,  0,  0,  1,  1]
[  0,  1,  0, -1,  2]
[  0,  0,  1, -1, -1]
```

$$\{(1-\alpha, 2+\alpha, -1+\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

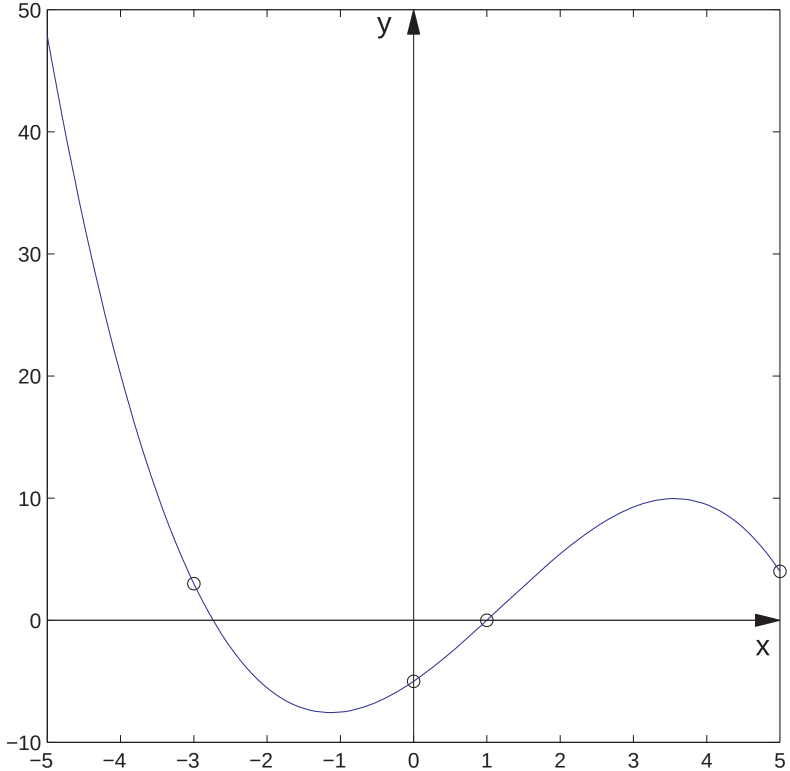
(c)
```
>> A=[1,2,3,0;1,1,1,0;1,1,2,0;1,3,3,0];
>> escalona(A)
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

$$\{(0,0,0)\}$$

1.2.15.
```
>> P=randi(4,2)
P =  5     4
    -3     3
     1     0
     0    -5
>> A=matvand(P(:,1),3),B=P(:,2)
A =125    25     5     1
   -27     9    -3     1
     1     1     1     1
     0     0     0     1
B =  4
     3
     0
    -5
>> R=escalona([A,B])
R  = [ 1,  0,  0,  0, -163/480]
     [ 0,  1,  0,  0,    99/80]
     [ 0,  0,  1,  0, 1969/480]
     [ 0,  0,  0,  1,       -5]

>> p=poly2sym(R(:,5),x)
p = -163/480*x^3+99/80*x^2+1969/480*x-5
>> clf,po(P),syms x,plotf1(p,[-5,5])
>> eixos
```

Pode não ser possível encontrar o polinômio, se mais de um ponto tiver a mesma abscissa x_i.

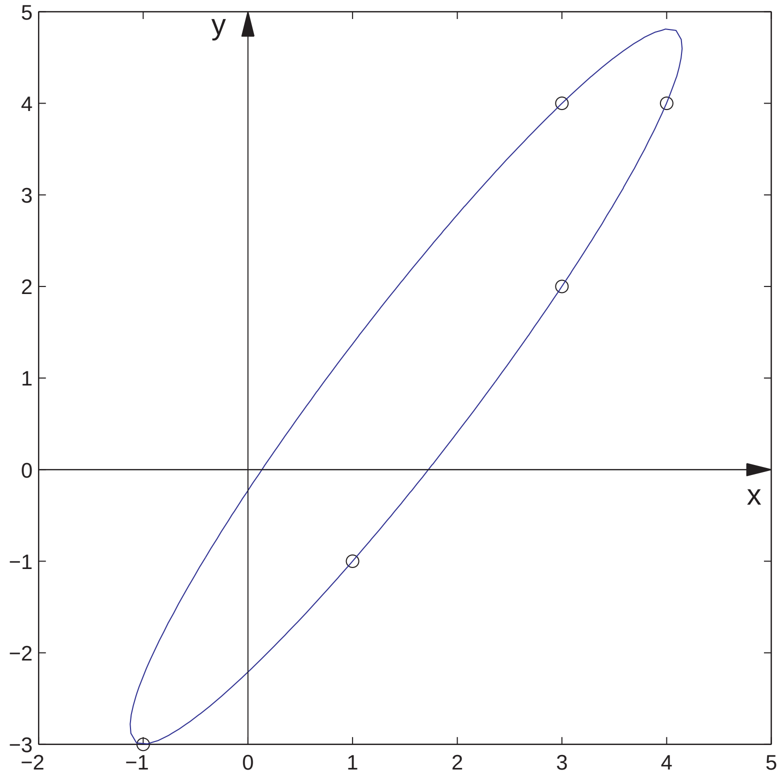


Observação. A sua resposta pode ser diferente da que está aqui.

1.2.16.
```
>> P=randi(5,2)
P =   3     2
     -1    -3
      1    -1
```

```
     3     4
     4     4
>> A=matvand(P,2)
A =  9     6     4     3     2     1
     1     3     9    -1    -3     1
     1    -1     1     1    -1     1
     9    12    16     3     4     1
    16    16    16     4     4     1
>> R=escalona([A,zeros(5,1)])
R  = [1,      0,      0,      0,      0, -35/8,      0]
     [0,      1,      0,      0,      0,  45/8,      0]
     [0,      0,      1,      0,      0,    -2,      0]
     [0,      0,      0,      1,      0,  65/8,      0]
     [0,      0,      0,      0,      1, -39/8,      0]

>> p=poly2sym2([-R(:,6);1],x,y)
p =35/8*x^2-45/8*x*y-65/8*x+1+2*y^2+39/8*y
>> clf,po(P),syms x y,
>> plotci(p,[-5,5],[-5,5])
>> eixos
```



Observação. A sua resposta pode ser diferente da que está aqui.

1.2.17. (a) A inversa da operação elementar de trocar duas linhas é ela mesma.

(b) A inversa da operação elementar de multiplicar uma linha por um escalar, $\alpha \neq 0$, é a operação de multiplicar a mesma linha pelo escalar $1/\alpha$.

(c) A inversa de somar à linha k, α vezes a linha l, é somar à linha k, $-\alpha$ vezes a linha l.

1.2.18. (a) Basta multiplicar qualquer linha da matriz pelo escalar 1.

(b) Pelo exercício anterior cada operação elementar, e, tem uma operação elementar inversa, e^{-1}, do mesmo tipo que desfaz o que a operação e fez. Se aplicando as operações elementares $e_1, \ldots, e_k$ na matriz A chegamos na matriz B, então aplicando-se as operações elementares $e_k^{-1}, \ldots, e_1^{-1}$ na matriz B chegamos na matriz A.

(c) Se aplicando as operações elementares $e_1, \ldots, e_k$ na matriz A chegamos na matriz B e aplicando as operações elementares $e_{k+1}, \ldots, e_l$ na matriz B chegamos na matriz C, então aplicando-se as operações elementares $e_1, \ldots, e_l$ na matriz A chegamos na matriz C.

2.1. Matriz Inversa (página 91)

2.1.1. A matriz é singular, pois o sistema homogêneo tem solução não trivial (Teorema 2.8 na página 82).

2.1.2. (a)
```
>> A=[1,2,3;1,1,2;0,1,2];
>> B=[A,eye(3)];
>> escalona(B)
[1, 0, 0, 0, 1,-1]
[0, 1, 0, 2,-2,-1]
[0, 0, 1,-1, 1, 1]
```

(b)
```
[1, 0, 0, 3, 2,-4]
[0, 1, 0,-1, 0, 1]
[0, 0, 1, 0,-1, 1]
```

(c)
```
[1,   0,   0,    0, 7/3,-1/3,-1/3,-2/3]
[0,   1,   0,    0, 4/9,-1/9,-4/9, 1/9]
[0,   0,   1,    0,-1/9,-2/9, 1/9, 2/9]
[0,   0,   0,    1,-5/3, 2/3, 2/3, 1/3]
```

(d)
```
[1, 0,   0,   1, -1,    0]
[0, 1,   0,3/2,1/2,-3/2]
[0, 0,   1, -1,   0,    1]
```

(e)
```
[ 1   0   1    1   0   -2 ]
[ 0   1   1    0   0    1 ]
[ 0   0   0   -1   1    1 ]

Continua ? (s/n) n
```

(f)
```
[1, 0,   0,1/4, 5/4,-3/4, 1/2, 0]
[0, 1,   0,1/2,-1/2, 1/2,   0, 0]
[0, 0,   1,1/4, 1/4, 1/4,-1/2, 0]
[0, 0,   0,   0,  -2,   -1,  -2, 1]
```

```
    Continua ? (s/n) n
```

2.1.3.
```
>> syms a
>> A=[1,1,0;1,0,0;1,2,a];
>> escalona(A)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

```
Continua ?  (s/n) n
```

Para valores de a diferentes de zero a matriz A tem inversa.

2.1.4.
```
>> invA=[3,2;1,3]; invB=[2,5;3,-2];
>> invAB=invB*invA
invAB =     11           19
             7            0
```

2.1.5.
```
>> invA=[2,3;4,1]; B=[5;3];
>> X=invA*B
X =     19
        23
```

2.2. Determinantes (página 122)

2.2.1. $\det(A^2) = 9$; $\det(A^3) = -27$; $\det(A^{-1}) = -1/3$; $\det(A^t) = -3$.

2.2.2. $\det(A^t B^{-1}) = \det(A)/\det(B) = -2/3$.

2.2.3. (a) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + a_{32} \end{bmatrix} =$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} = \det(A) + 0 = 3$$

(b) $$\det\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{12} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -2\det(A) = -6$$

2.2.4. (a) $$\det\begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{bmatrix} =$$

$$e^{2rt}\det\begin{bmatrix} 1 & t \\ r & (1+rt) \end{bmatrix} = e^{2rt}$$

(b) $$\det\begin{bmatrix} \cos\beta t & \operatorname{sen}\beta t \\ \alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t & \alpha\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos\beta t \end{bmatrix} = \alpha\det\begin{bmatrix} \cos\beta t & \operatorname{sen}\beta t \\ \cos\beta t & \operatorname{sen}\beta t \end{bmatrix} +$$

$$\beta\det\begin{bmatrix} \cos\beta t & \operatorname{sen}\beta t \\ -\operatorname{sen}\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix} = \beta$$

2.2.5. (a)
```
>> A=[1,-2,3,1;5,-9,6,3;-1,2,-6,-2;2,8,6,1];
>> detopelp(A)
[  1, -2,  3,  1]
[  5, -9,  6,  3]
[ -1,  2, -6, -2]
[  2,  8,  6,  1]
eliminação 1:
-5*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
1*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
-2*linha 1 + linha 4 ==> linha 4
[  1, -2,  3,  1]
[  0,  1, -9, -2]
[  0,  0, -3, -1]
[  0, 12,  0, -1]
eliminação 2:
-12*linha 2 + linha 4 ==> linha 4
[   1,  -2,   3,   1]
[   0,   1,  -9,  -2]
[   0,   0,  -3,  -1]
[   0,   0, 108,  23]
eliminação 3:
-1/3*linha 3 ==> linha 3
[   1,  -2,   3,   1]
[   0,   1,  -9,  -2]
[   0,   0,   1, 1/3]
[   0,   0, 108,  23]
det(A) = -3*det(A)
-108*linha 3 + linha 4 ==> linha 4
[   1,  -2,   3,   1]
[   0,   1,  -9,  -2]
```

```
[   0,   0,   1, 1/3]
[   0,   0,   0, -13]
ans = 39
```

(b)
```
>> A=[2,1,3,1;1,0,1,1;0,2,1,0;0,1,2,3];
>> detopelp(A)
[ 2, 1, 3, 1]
[ 1, 0, 1, 1]
[ 0, 2, 1, 0]
[ 0, 1, 2, 3]
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1, 0, 1, 1]
[ 2, 1, 3, 1]
[ 0, 2, 1, 0]
[ 0, 1, 2, 3]
det(A) = (-1)*det(A)
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  2,  1,  0]
[  0,  1,  2,  3]
eliminação 2:
-2*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
-1*linha 2 + linha 4 ==> linha 4
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  0, -1,  2]
[  0,  0,  1,  4]
eliminação 3:
-1*linha 3 ==> linha 3
```

```
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  0,  1, -2]
[  0,  0,  1,  4]
det(A) = (-1)*(-1)*det(A)
-1*linha 3 + linha 4 ==> linha 4
[  1,  0,  1,  1]
[  0,  1,  1, -1]
[  0,  0,  1, -2]
[  0,  0,  0,  6]
ans = 6
```

2.2.6. (a)
```
>> A=[0,1,2;0,0,3;0,0,0];
>> p=det(A-x*eye(3))
p =-x^3
>> solve(p)
[0][0][0]
```

(b) `p =(1-x)*(3-x)*(-2-x)  [ 1][ 3][-2]`

(c) `p =(2-x)*(4-5*x+x^2)  [2][4][1]`

(d) `p =-8-2*x+5*x^2-x^3 [ 2][ 4][-1]`

2.2.7. (a)
```
>> A=[2,0,0;3,-1,0;0,4,3];
>> B=A-x*eye(3);
>> p=det(B)
p =(2-x)*(-1-x)*(3-x)
>> solve(p)
[ 2][-1][ 3]
```

(b) `p =(2-x)^2*(1-x)  [2][2][1]`

(c) `p =(1-x)*(2-x)*(-1-x)*(3-x)  [ 1][ 2][-1][ 3]`

(d) `p =(2-x)^2*(1-x)^2  [2][2][1][1]`

2.2.8. (a)
```
>> Bm1=subs(B,x,-1);
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 0]
[0, 1, 1]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_{-1} = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

```
>> B2=subs(B,x,2);
>> escalona(B2)
[1, 0, 1/4]
[0, 1, 1/4]
[0, 0,   0]
```

$$\mathbb{W}_{2} = \{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ 4\alpha \end{bmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

```
>> B3=subs(B,x,3);
>> escalona(B3)
[1, 0, 0]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_{3} = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

(b)
```
[1, 3, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_1 = \{ \begin{bmatrix} -3\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

(c)
```
[1, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_{-1} = \{ \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_1 = \{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[1, 0, 0, 29/3]
[0, 1, 0,  7/3]
[0, 0, 1,    3]
[0, 0, 0,    0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \{ \begin{bmatrix} -29\alpha & -7\alpha & -9\alpha & 3\alpha \end{bmatrix}^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[1, 0, -9/4, 0]
[0, 1, -3/4, 0]
[0, 0,    0, 1]
[0, 0,    0, 0]
```

$\mathbb{W}_3 = \{\left[\begin{array}{cccc} 9\alpha & 3\alpha & 4\alpha & 0 \end{array}\right]^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$

(d)

```
[1, 0, -3, 0]
[0, 1,  3, 0]
[0, 0,  0, 1]
[0, 0,  0, 0]
```

$$\mathbb{W}_1 = \{\left[\begin{array}{cccc} 3\alpha & -3\alpha & \alpha & 0 \end{array}\right]^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

```
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \{\left[\begin{array}{cccc} \alpha & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]^t \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

2.2.9. Concluímos que é muito raro encontrar matrizes invertíveis.

3.1. Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar (página 155)

3.1.1.
```
>> OA=[0,-2];OB=[1,0];
>> AB=OB-OA
AB = 1      2
>> AC=2*AB
AC = 2      4
>> OC=OA+AC
OC = 2      2
```
$C = (2, 2)$.

3.1.2. Os pontos $P_1 = (0, 1)$ e $P_2 = (1, 3)$ são pontos da reta. Assim, o vetor $V = \overrightarrow{P_1P_2} = (1, 2)$ é paralelo a reta.

3.1.3. A inclinação da reta é $a = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2}$. Assim, uma equação da reta tem a forma $y = \frac{3}{2}x + b$. Substituindo-se $x = 1$ e $y = 2$ obtemos $b = \frac{1}{2}$. Uma equação para a reta é $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

3.1.4. A equação $3X - 2V = 15(X - U)$ é equivalente a $3X - 2V = 15X - 15U$. Somando-se $-15X + 2V$ obtemos $-15X + 3X = 2V - 15U$ ou $-12X = 2V - 15U$ multiplicando-se por $-\frac{1}{12}$ obtemos $X = \frac{5}{4}U - \frac{1}{6}V$.

3.1.5. Multiplicando-se a segunda equação por 2 e somando-se a primeira, obtemos $12X = 3U + 2V$ ou $X = \frac{1}{4}U + \frac{1}{6}V$. Substituindo-se X na primeira equação obtemos, $\frac{3}{2}U + V - 2Y = U$ ou $2Y = \frac{1}{2}U + V$ ou $Y = \frac{1}{4}U + \frac{1}{2}V$.

3.1.6.
```
>> OP=[ 2, 3, -5]; V=[ 3, 0, -3];
>> OQ=OP+V
OQ =     5      3     -8
```
$Q = (5, 3, -8)$.

3.1.7.
```
>> OP=[1,0,3]; OM=[1,2,-1];
>> MP=OP-OM; OPlinha=OM-MP
OPlinha =     1      4     -5
```
$P' = (1, 4, -5)$.

3.1.8. (a)
```
>> OA=[5,1,-3];OB=[0,3,4];OC=[0,3,-5];
>> AB=OB-OA, AC=OC-OA,
AB =     -5      2      7
AC =     -5      2     -2
```
Os pontos não são colineares, pois $\overrightarrow{AC} \neq \lambda \overrightarrow{AB}$.

(b)
```
>> OA=[-1,1,3];OB=[4,2,-3];OC=[14,4,-15];
>> AB=OB-OA, AC=OC-OA,
AB =      5      1     -6
AC =     15      3    -18
```
Os pontos são colineares, pois $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$.

3.1.9.
```
>> OA=[1,-2,-3];OB=[-5,2,-1];OC=[4,0,-1];
>> DC=OB-OA, OD=OC-DC
DC =     -6      4      2
OD =     10     -4     -3
```
O ponto é $D = (10, -4, -3)$.

3.1.10. (a) A equação $xV + yW = U$ é equivalente ao sistema $\left\{\begin{array}{rcrcr} 9x & - & y & = & -4 \\ -12x & + & 7y & = & -6 \\ -6x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$, cuja matriz aumentada é a matriz que tem colunas V, W e U.

```
>> V=[9,-12,-6];W=[-1,7,1];U=[-4,-6,2];
>> escalona([V;W;U]')
[    1,     0, -2/3]
[    0,     1,   -2]
[    0,     0,    0]
```
Assim, $U = -2/3V - 2W$.

(b)
```
>> V=[5,4,-3];W=[2,1,1];U=[-3,-4,1];
>> escalona([V;W;U]')
[     1,      0,  -5/3]
[     0,      1,   8/3]
```

```
[        0,        0, -20/3]
```

Assim, U não é combinação linear de V e W.

3.1.11. Para ser um paralelogramo um dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ tem que ser igual à soma dos outros dois.

(a)
```
>> OA=[4,-1,1];OB=[9,-4,2];
>> OC=[4,3,4];OD=[4,-21,-14];
>> AC=OC-OA
AC = 0      4      3
>> AB=OB-OA
AB = 5     -3      1
>> AD=OD-OA
AD = 0    -20    -15
```
Não é um paralelogramo.

(b) Somente o vértice D é diferente.

```
>> OD=[9,0,5];
>> AD=OD-OA
AD = 5      1      4
```

É um paralelogramo de vértices consecutivos A, B, D e C.

3.1.12. Resolvendo a equação vetorial $U = xV$ obtemos que

$$U = (6, -4, -2) = -\frac{2}{3}(-9, 6, 3) = -\frac{2}{3}V.$$

Fazendo o mesmo para $U = xW$ obtemos que não existe solução, logo somente os vetores U e V são paralelos.

3.2. Produtos de Vetores (página 194)

3.2.1. Um ponto $P = (x, y)$ pertence a reta se, e somente se,

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot N = 0.$$

ou seja, se, e somente se,

$$(x+1, y-1) \cdot (2,3) = 0$$

ou

$$2x + 3y - 1 = 0$$

3.2.2. Uma esfera de raio igual à 2. Se for no espaço é um cilindro de raio igual à 2, se for no plano é uma circunferência de raio igual à 2.

3.2.3.
```
>> V=[1,2,-3]; W=[2,1,-2];
>> Va=(V+W)/no(V+W), Vb=(V-W)/no(V-W),...
>> Vc=(2*V-3*W)/no(2*V-3*W)
```

$$Va = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{43}} & \frac{3}{\sqrt{43}} & -\frac{5}{\sqrt{43}} \end{bmatrix},$$
$$Vb = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$
$$Vc = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.4.
```
>> syms x
>> V=[x,3,4];W=[3,1,2];
>> solve(pe(V,W))
-11/3
```
Para $x = -11/3$, V e W são perpendiculares.

3.2.5.
```
>> V=[x,2,4];W=[x,-2,3];
>> pe(V,W)
x^2+8
```
A equação $x^2 + 8$ não tem solução real.

3.2.6.
```
>> Va=[2,1,0];Wa=[0,1,-1];Vb=[1,1,1];
>> Wb=[0,-2,-2];Vc=[3,3,0];Wc=[2,1,-2];
>> cosVaWa=pe(Va,Wa)/(no(Va)*no(Wa)),...
>> cosVbWb=pe(Vb,Wb)/(no(Vb)*no(Wb)),...
```

```
>> cosVcWc=pe(Vc,Wc)/(no(Vc)*no(Wc))
```

cosVaWa=$\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{2}$, cosVbWb=$-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2}$, cosVcWc=$\frac{1}{2}\sqrt{2}$. O ângulo entre Va e Wa é $\arccos(\sqrt{10}/10)$ entre Vb e Wb é $\arccos(-\sqrt{6}/3)$ e entre Vc e Wc é $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

3.2.7.

```
>> W=[-1,-3,2]; V=[0,1,3];
>> W1=(pe(W,V)/pe(V,V))*V, W2=W-W1
W1 =       0            3/10          9/10
W2 =      -1          -33/10         11/10
```

3.2.8.

```
>> V=[2,2,1]; W=[6,2,-3];
>> X=V/no(V)+W/no(W), U=X/no(X)
X=[32/21, 20/21, -2/21]
```

$U = \left[\ \frac{16}{357}\sqrt{17}\sqrt{21} \quad \frac{10}{357}\sqrt{17}\sqrt{21} \quad -\frac{1}{357}\sqrt{17}\sqrt{21}\ \right]$

3.2.9.

```
>> A=[2,2,1];B=[3,1,2];C=[2,3,0];D=[2,3,2];
>> M=[B-A;C-A;D-A], detM=det(M)
M =    1           -1            1
       0            1           -1
       0            1            1     detM=2
>> A=[2,0,2];B=[3,2,0];C=[0,2,1];D=[10,-2,1];
>> M=[B-A;C-A;D-A], detM=det(M)
M =    1            2           -2
      -2            2           -1
       8           -2           -1     detM=0
```

No item (a) os pontos **não** são coplanares e no item (b) eles são coplanares.

3.2.10.

```
>> A=[2,1,6];B=[4,1,3];C=[1,3,2];D=[1,2,1];
>> M=[B-A;C-A;D-A], detM=det(M)
M =    2            0           -3
      -1            2           -4
      -1            1           -5  detM=-15
```

O volume do paralelepípedo é 15 unidades de vol.

3.2.11.
```
>> A=[1,0,1];B=[2,1,3];C=[3,2,4];
>> V=pv(A-B,C-B), norma=no(V)
AD =      1            -1            0
```
norma=$\sqrt{2}$

A área do paralelogramo é $\sqrt{2}$ unidades de área.

3.2.12.
```
>> A=[1,2,1];B=[3,0,4];C=[5,1,3];
>> V=pv(B-A,C-A), norma=no(V)
AD =     -1            8            6
```
norma=$\sqrt{101}$

A área do triângulo é $\sqrt{101}/2$ unidades de área.

3.2.13.
```
>> syms x y z
>> X=[x,y,z]; V=[1,0,1]; W=[2,2,-2];
>> expr1=pv(X,V)-W, expr2=pe(X,X)-6
expr1 = [   y-2, z-x-2,  -y+2]
expr2 = x^2+y^2+z^2-6
>> S=solve(expr1(1),expr1(2),expr1(3),expr2)
S = x: [2x1 sym]  y: [2x1 sym]  z: [2x1 sym]
>> S.x, S.y, S.z
ans =[ -1][ -1] ans =[ 2][ 2] ans =[ 1][ 1]
```
Logo, $X = (-1, 2, 1)$.

3.2.14.
```
>> X=[x,y,z]; V=[1,1,0]; W=[-1,0,1]; U=[0,1,0];
>> expr1=pe(X,V), expr2=pe(X,W),...
>> expr3=pe(X,X)-3, expr4=pe(X,U)
expr1=x+y,expr2=z-x,expr3=x^2+y^2+z^2-3,expr4=y
>> solve(expr1,expr2,expr3)
S =  x: [2x1 sym]  y: [2x1 sym]  z: [2x1 sym]
>> S.x, S.y, S.z
ans =[ -1][  1] ans =[  1][ -1] ans =[ -1][  1]
```
Como y tem que ser maior que zero, $X = (-1, 1, -1)$.

3.2.15.
```
>> A=[3,0,2];B=[4,3,0];C=[8,1,-1];
>> pe(B-A,C-A), pe(A-B,C-B), pe(A-C,B-C)
14,0,21
```
Portanto, o ângulo reto está no vértice B.

3.2.16.

3.2.17.

3.2.18.

3.2.19.

3.2.20. Seja AB a base do triângulo isosceles e M o seu ponto médio. Vamos mostrar que $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} - ||\overrightarrow{CA}||^2 + \\
&\quad + ||\overrightarrow{CB}||^2 - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}) = 0
\end{aligned}$$

3.2.21. Seja AB o lado situado no diâmetro da circunferência e O seu centro. Vamos mostrar que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) \\
&= ||\overrightarrow{CO}||^2 + \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OB} + \\
&\quad + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CO} - ||\overrightarrow{OB}||^2 = 0
\end{aligned}$$

3.2.22. Se as diagonais são perpendiculares, então $(U+V)\cdot(U-V)=0$. Mas,

$$(U+V)\cdot(U-V)=||U||^2-||V||^2.$$

Então, os lados adjacentes têm o mesmo comprimento e como ele é um paralelogramos todos os lados têm o mesmo comprimento.

3.2.23. Vamos mostrar que $U\cdot V=0$.

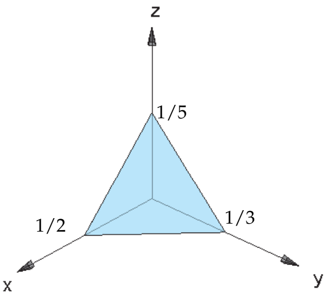
$$||U+V||^2=||U||^2+2U\cdot V+||V||^2$$

$$||U-V||^2=||U||^2-2U\cdot V+||V||^2$$

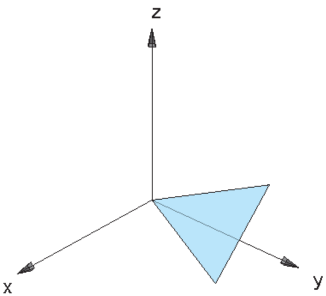
Assim, $||U+V||=||U-V||$ implica que $U\cdot V=0$.

4.1. Equações de Retas e Planos (página 242)

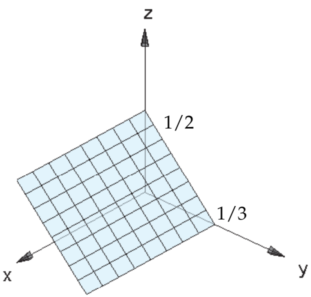
4.1.1.



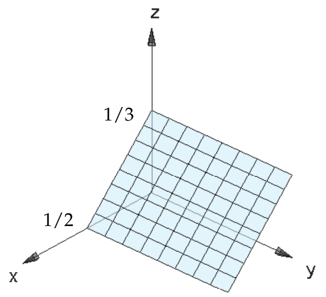
(a)



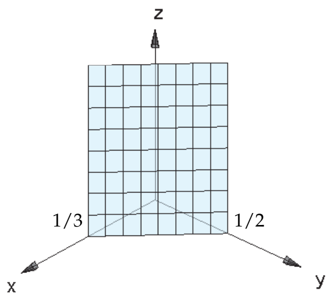
(b)



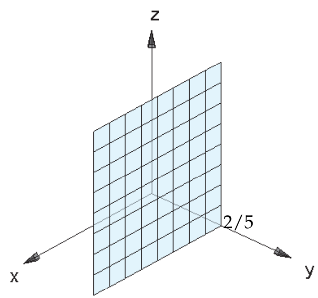
(c)



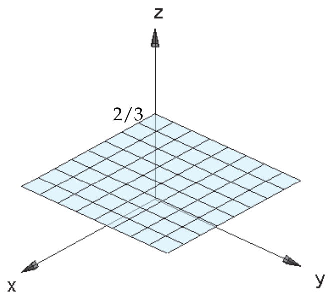
(d)



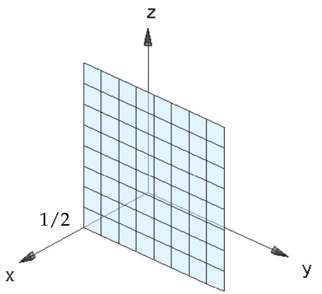
(e)



(f)

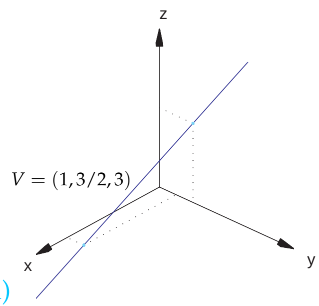


(g)

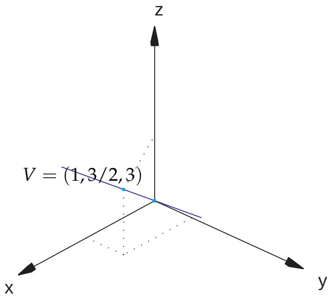


(h)

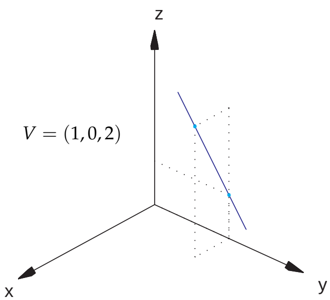
4.1.2.



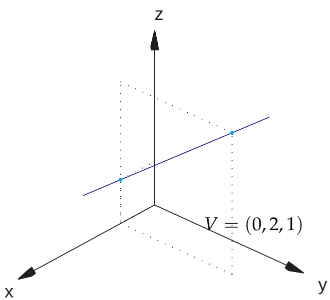
(a)



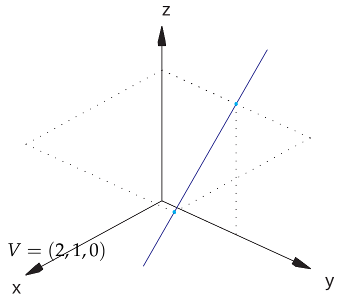
(b)



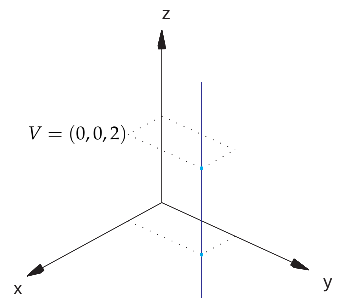
(c)



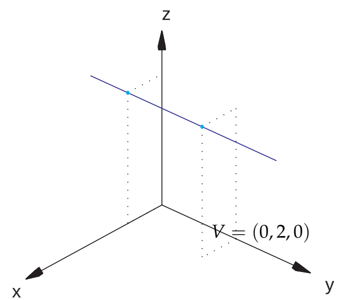
(d)



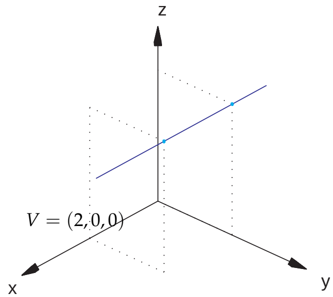
(e)



(f)



(g)

(h) 

4.1.3. Como o novo plano é paralelo ao plano $2x - y + 5z - 3 = 0$, então o vetor $N = (2, -1, 5)$ é também vetor normal do plano procurado. Assim, a equação dele é $2x - y + 5z + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P = (1, -2, 1)$ na equação do plano:

```
>> syms x y z d
>> expr=2*x-y+5*z+d
expr = 2*x-y+5*z+d
>> subst(expr,[x,y,z],[1,-2,1])
ans = 9+d
```

Assim, a equação do plano é $2x - y + 5z - 9 = 0$.

4.1.4. Os vetores normais dos outros planos, $N_1 = (1, 2, -3)$ e $N_2 = (2, -1, 4)$, são paralelos a ao plano procurado π. Assim, o produto vetorial $N_1 \times N_2$ é um vetor normal a π.

```
>> N1=[1,2,-3];N2=[2,-1,4];
>> N=pv(N1,N2)
N = 5   -10    -5
```

Assim, a equação de π é $5x - 10y - 5z + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P = (2, 1, 0)$ na equação do plano:

```
>> expr=5*x-10*y-5*z+d
expr = 5*x-10*y-5*z+d
>> subst(expr,[x,y,z],[2,1,0])
ans = d
```

Assim, a equação do plano π é $5x - 10y - 5z = 0$.

4.1.5. Como o plano procurado passa pelos pontos $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (1, 0, 1)$ e é perpendicular ao plano $y - z = 0$, então os vetores $\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1)$ e o vetor normal do plano $y - z = 0$, $N_1 = (0, 1, -1)$ são paralelos ao plano procurado π. Assim, o produto vetorial $\overrightarrow{PQ} \times N_1$ é um vetor normal a π.

```
>> PQ=[0,0,1];N1=[0,1,-1];
>> N=pv(PQ,N1)
N = -1      0      0
```

Assim, a equação de π é $-x + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P = (1, 0, 0)$ na equação do plano, obtendo que a equação de π é $-x + 1 = 0$.

4.1.6. A equação da reta é $(x, y, z) = (t, 2t, t)$. Substituindo-se o ponto da reta na equação do plano obtemos o valor de t

```
>> V=[1,2,1];
>> syms t
>> t=solve(2*t+2*t+t-5)
t = 1
```

Substituindo-se este valor de t nas equações paramétricas da reta obtemos o ponto $P = (1, 2, 1)$.

4.1.7. Um ponto da reta r é da forma $P_r = (9t, 1 + 6t, -2 + 3t)$ e um ponto da reta s é da forma $P_s = (1 + 2s, 3 + s, 1)$. As retas se cortam se existem t e s tais que $P_r = P_s$, ou seja, se o sistema seguinte tem solução

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 9t & = & 1 + 2s \\ 1 + 6t & = & 3 + s \\ -2 + 3t & = & 1 \end{array} \right.$$

```
>> escalona([9,-2,1;6,-1,2;3,0,3])
[  9, -2,  1]
[  6, -1,  2]
[  3,  0,  3]
eliminação 1:
(1/9)*linha 1 ==> linha 1
[    1, -2/9,  1/9]
[    6,   -1,    2]
[    3,    0,    3]
(-6)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(-3)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[    1, -2/9,  1/9]
[    0,  1/3,  4/3]
[    0,  2/3,  8/3]
eliminação 2:
(3)*linha 2 ==> linha 2
[    1, -2/9,  1/9]
[    0,    1,    4]
[    0,  2/3,  8/3]
(2/9)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(-2/3)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 1]
[ 0, 1, 4]
[ 0, 0, 0]
```

A solução do sistema é $t = 1$ e $s = 4$. Substituindo-se ou $t = 1$ na equação da reta r ou $s = 4$ na equação da reta s obtemos o ponto da interseção $P = (9, 7, 1)$.

4.1.8. Os vetores diretores das retas, $V_1 = (2, 2, 1)$ e $V_2 = (1, 1, 1)$, são paralelos ao plano procurado π. Assim, o produto vetorial $V_1 \times V_2$ é um vetor normal a π.

```
>> V1=[2,2,1]; V2=[1,1,1]; P1=[2,0,0];
```

```
>> N=pv(V1,V2)
N =   1    -1     0
```

Assim, a equação de π é $x - y + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P_1 = (2, 2, 1)$ da reta r na equação do plano:

```
>> expr=x-y+d
expr =x-y+d
>> subst(expr,[x,y,z],P1)
ans =2+d
```

Assim, a equação do plano π é $x - y - 2 = 0$.

4.1.9. (a) Substituindo-se o ponto $P = (4, 1, -1)$ nas equações da reta r obtemos valores diferentes de t:

```
>> solve('4=2+t'), solve('1=4-t'),...
>> solve('-1=1+2*t')
ans = 2 ans = 3 ans = -1
```

Logo não existe um valor de t tal que $P = (2 + t, 4 - t, 1 + 2t)$.

(b) O ponto $Q = (2, 4, 1)$ é um ponto do plano π procurado. Assim, π é paralelo aos vetores $\overrightarrow{PQ} = (-2, 3, 2)$ e o vetor diretor da reta r, $V = (1, -1, 2)$. Logo, o produto vetorial $\overrightarrow{PQ} \times V$ é um vetor normal ao plano π:

```
>> P=[4,1,-1]; Q=[2,4,1]; V=[1,-1,2];
>> PQ=Q-P
PQ = [-2, 3, 2]
>> N=pv(PQ,V)
N =   8     6    -1
expr = 8*x-39+6*y-z
```

Substituindo-se o ponto P ou o ponto Q na equação de π obtemos que a equação do plano π é $8x + 6y - z - 39 = 0$.

4.1.10. O vetor $N = (-1, 1, -1)$ é normal ao plano. A equação do plano é então $-x + y - z + d = 0$. Fazendo $z = 0$ nas equações dos planos π_1 e π_2 e resolvendo o sistema resultante, obtemos $x = 0$ e $y = 1$. Portanto, o ponto $P = (0, 1, 0)$ pertence a π_1 e a π_2. Substituindo-se o ponto $P = (0, 1, 0)$ na equação do plano $-x + y - z + d = 0$ obtemos que a equação procurada é $x - y + z + 1 = 0$.

4.1.11. (a)
```
>> N1=[1,2,-3]; N2=[1,-4,2]; V=pv(N1,N2)
V =     -8     -5     -6
```
Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é $V = (-8, -5, -6)$.

(b)
```
>>  N1=[2,-1,4]; N2=[4,-2,8]; V=pv(N1,N2)
V =     0      0      0
```
Os planos são paralelos.

(c)
```
>>  N1=[1,-1,0]; N2=[1,0,1]; V=pv(N1,N2)
V =     -1     -1      1
```
Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é $V = (-1, -1, 1)$.

4.1.12. O vetor normal ao plano é um vetor diretor da reta procurada. Assim, as equações paramétricas de r são $(x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 1 + 2t)$.

4.1.13. O vetor diretor da reta procurada é ortogonal ao mesmo tempo aos vetores normais dos dois planos, portanto o produto vetorial deles é um vetor diretor da reta procurada.

```
>> pv([2,3,1],[1,-1,1])
     4            -1            -5
```

$(x, y, z) = (1 + 4t, -t, 1 - 5t)$.

4.1.14.
```
>> escalona([1,1,-1,0;2,-1,3,1])
 1       0       2/3       1/3
 0       1      -5/3      -1/3
```
A reta interseção dos planos é $(x, y, z) = (1/3 - 2/3t, -1/3 + 5/3t, t)$. O vetor diretor $V = (-2/3, 5/3, 1)$ desta reta é paralelo ao plano procurado. O ponto $P = (1/3, -1/3, 0)$ é um ponto da reta e é também

portanto um ponto do plano procurado π. O vetor $\overrightarrow{AP}$ é também um vetor paralelo a π. Assim, o produto vetorial $\overrightarrow{AP} \times V$ é um vetor normal a π.

```
>> A=[1,0,-1]; P=[1/3,-1/3,0];
>> V=[-2/3,5/3,1];
>> AP=P-A
AP = [-2/3, -1/3, 1]
>> N=pv(AP,V)
N = [   -2,     0, -4/3]
```

Substituindo-se o ponto A ou o ponto P na equação $-2x - 4/3z + d = 0$ obtemos a equação do plano $6x + 4z - 2 = 0$.

4.1.15.

```
>> syms t s
>> A=[0,1,0];B=[1,1,0];C=[-3,1,-4];D=[-1,2,-7];
>> BA=B-A, CD=D-C,
BA =  1      0      0
CD =  2      1     -3
```

$P_r = (t, 1, 0)$ é um ponto qualquer da reta r e $P_s = (-3 + 2s, 1 + s, -4 - 3s)$ é um ponto qualquer da reta s. Precisamos encontrar pontos P_r e P_s tais que $\overrightarrow{P_sP_r} = \alpha V$, ou seja, precisamos encontrar t e s tais que $(t - 2s + 3, -s, 3s + 4) = (\alpha, -5\alpha, -\alpha)$.

```
>> escalona([1,-2,-1,-3;0,-1,5,0;0,3,1,-4])
[  1, -2, -1, -3]
[  0, -1,  5,  0]
[  0,  3,  1, -4]
eliminação 2:
(-1)*linha 2 ==> linha 2
[  1, -2, -1, -3]
[  0,  1, -5,  0]
```

```
[  0,  3,  1, -4]
(2)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(-3)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[   1,   0, -11,  -3]
[   0,   1,  -5,   0]
[   0,   0,  16,  -4]
eliminação 3:
(1/16)*linha 3 ==> linha 3
[    1,    0,  -11,   -3]
[    0,    1,   -5,    0]
[    0,    0,    1, -1/4]
(11)*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
(5)*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[     1,     0,     0, -23/4]
[     0,     1,     0,  -5/4]
[     0,     0,     1,  -1/4]
Pr0 = [-23/4, 1, 0]
Ps0 = [-11/2, -1/4, -1/4]
V = [1/4, -5/4, -1/4]
```

Encontramos que $t = -23/4$, $s = -5/4$ e $\alpha = -1/4$. Substituindo-se ou $t = -23/4$ em $P_r = (t, 1, 0)$ obtemos que a equação da reta é $(x, y, z) = (-23/4 + t, 1 - 5t, -t)$.

4.1.16. (a)
```
>> N1=[2,-1,1]; N2=[1,2,-1]; V=pv(N1,N2)
   V = -1     3     5
```
Os planos se interceptam segundo uma reta que tem vetor diretor $V = (-1, 3, 5)$.

(b)
```
>> escalona([2,-1,1,0;1,2,-1,1])
[  2, -1,  1,  0]
[  1,  2, -1,  1]
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
```

```
[  1,  2, -1,  1]
[  2, -1,  1,  0]
(-2)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[  1,  2, -1,  1]
[  0, -5,  3, -2]
eliminação 2:
(-1/5)*linha 2 ==> linha 2
[    1,    2,   -1,    1]
[    0,    1, -3/5,  2/5]
(-2)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
[    1,    0,  1/5,  1/5]
[    0,    1, -3/5,  2/5]
```

Um ponto qualquer da reta r é $P_r = (1/5 - t, 2/5 + 3t, 5t)$. Vamos determinar o valor de t tal que $\overrightarrow{AP_r}$ seja perpendicular ao vetor diretor da reta r.

```
>> syms t
>> Pr=[1/5-t,2/5+3*t,5*t];A=[1,0,1];
>> APr=Pr-A
APr = [  -4/5-t, 2/5+3*t,   5*t-1]
>> expr=pe(APr,[-1,3,5])
expr = -3+35*t
>> t=solve(expr)
t = 3/35
```

Substituindo-se $t = 3/35$ em $\overrightarrow{AP_r} = (-4/5 - t, 2/5 + 3t, 5t - 1)$, obtemos o vetor diretor da reta procurada e assim a equação da reta é $(x, y, z) = (1 - (31/35)t, (23/35)t, 1 - (4/7)t)$.

4.1.17.
```
>> V1=[1,2,-3]; P1=[0,0,0];
>> V2=[2,4,-6]; P2=[0,1,2];
>> pv(V1,V2)
ans =    0     0     0
```

```
>> syms x y z; X=[x,y,z];
>> M=[X-P1;V1;P2-P1], expr=det(M)
M =[  x,  y,  z]
   [  1,  2, -3]
   [  0,  1,  2] expr = 7*x-2*y+z
```

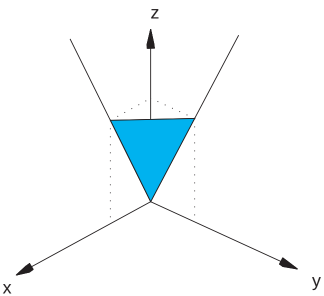
Como o produto vetorial de V_1 e V_2 (os dois vetores diretores das retas) é igual ao vetor nulo, então as retas são paralelas. Neste caso, os vetores V_1 e $\overrightarrow{P_1P_2}$ são não colineares e paralelos ao plano procurado. Assim, $7x - 2y + z = 0$ é a equação do plano.

4.1.18. (a)

$$r: \ (x,y,z) = t(0,1,2)$$

$$s: \ (x,y,z) = t(1,0,2)$$

$$t: \ (x,y,z) = (0,1,2) + s(1,-1,0)$$



(b) $A = (0,0,2)$, $B = (0,1,2)$ e $C = (1,0,2)$.

$$\text{vol} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC})| = |\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(c) $\text{area} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}|| = \frac{1}{2}||(2,2,-1)|| = \frac{3}{2}$

(d)

$$h = \text{dist}(\pi, A) = \frac{|-2|}{3} = \frac{2}{3}.$$

4.2. Ângulos e Distâncias (página 270)

4.2.1.
```
>> V=[1,3,2];W=[2,-1,1];U=[1,-2,0];
>> N=pv(W,U), projecao=(pe(V,N)/pe(N,N))*N
N = 2    1    -3  projecao = -1/7  -1/14   3/14
```

4.2.2.
```
>> N1=[2,-1,1]; N2=[1,-2,1];
>> costh=pe(N1,N2)/(no(N1)*no(N2))
costh =  5/6
>> acos(5/6)*180/pi
ans = 33.5573
```
O ângulo é $\arccos(5/6) \approx 33,5^{\mathrm{o}}$.

4.2.3.
```
>> A=[1,1,1];B=[1,0,1];C=[1,1,0];
>> P=[0,0,1];Q=[0,0,0];V=[1,1,0];
>> N1=pv(B-A,C-A), N2=pv(Q-P,V),...
>> costh=pe(N1,N2)/(no(N1)*no(N2))
N1 = 1     0     0,  N2 = 1    -1     0,
costh = 1/2*2^(1/2)
```
O ângulo é $\arccos(\sqrt{2}/2) = 45^{\mathrm{o}}$.

4.2.4. O vetor diretor da reta procurada $V = (a, b, c)$ faz ângulo de 45^{o} com o vetor $\vec{i}$ e 60^{o} com o vetor $\vec{j}$. Podemos fixar arbitrariamente a norma do vetor V. Por exemplo, podemos tomar o vetor V com norma igual à 2.

$$V = (a, b, c)$$
$$||V||^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

$$\frac{|V \cdot \vec{i}|}{||V||} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \Rightarrow \quad |a| = 1$$

$$\frac{|V \cdot \vec{j}|}{||V||} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad |b| = 1$$

Substituindo-se estes valores em $a^2 + b^2 + c^2 = 4$:

$$2 + 1 + c^2 = 4, \quad \Rightarrow \quad |c| = 1$$

Assim, existem aparentemente, oito retas que passam pelo ponto $P = (1, -2, 3)$ e fazem ângulo de 45º com o eixo x e 60º com o eixo y. Elas são $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(\pm\sqrt{2}, \pm 1, \pm 1)$. Na verdade existem quatro retas (distintas), pois um vetor diretor e o seu simétrico determinam a mesma reta. Elas são $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(\sqrt{2}, \pm 1, \pm 1)$.

Existem, aparentemente, oito retas que passam pelo ponto $P = (1, -2, 3)$ e fazem ângulo de 45º com o eixo x e 60º com o eixo y. Elas são $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(\pm\sqrt{2}/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$. Na verdade existem quatro retas (distintas), pois um vetor diretor e o seu simétrico determinam a mesma reta. Elas são $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(\sqrt{2}/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$.

4.2.5.
```
>> syms t, A=[1,1,0]; V=[0,1,-1]; Pr=[0,t,-t];
>> PrA=A-Pr, expr1=pe(PrA,V)
PrA = [1, 1-t, t] expr1 = 1-2*t
expr2 = 2*(1-t+t^2)^(1/2)
>> expr2=no(PrA)*no(V)
>> solve((expr1/expr2)^2-1/4)
[0][1]
>> B=subs(Pr,t,0), C=subs(Pr,t,1)
B = [0, 0, 0]  C = [0, 1, -1]
```

4.2.6.
```
>> A=[1,0,0]; B=[0,1,0]; C=[1,0,1]; O=[0,0,0];
>> N=B-A
```

```
-1      2      0
>> dist=abs(pe(N,C-O))/no(N)
dist =1/2^(1/2)
```

A distância é igual à $1/\sqrt{2}$.

4.2.7. (a)
```
>> syms t s
>> A=[1,0,0]; B=[0,2,0]; V2=[1,2,3]; P2=[2,3,4];
>> Pr1=A+t*(B-A), Pr2=P2+s*V2
Pr1 = [1-t, 2*t, 0]  Pr2 = [2+s, 3+2*s, 4+3*s]
```

$P_{r_2} = (1-t, 2t, 0)$ é um ponto qualquer da reta r_1 e $P_{r_2} = (2+s, 3+2s, 4+3s)$ é um ponto qualquer da reta r_2. Devemos determinar t e s tais que o vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$ seja perpendicular aos vetores diretores de r_1 e de r_2.

```
>> Pr1Pr2=Pr2-Pr1
Pr1Pr2 = [1+s+t, 3+2*s-2*t, 4+3*s]
>> expr1=pe(Pr1Pr2,B-A), expr2=pe(Pr1Pr2,V2)
expr1 = 5+3*s-5*t  expr2 = 19+14*s-3*t
>> S=solve('5+3*s-5*t','19+14*s-3*t')
>> S.t, S.s
t = 13/61, s = -80/61
>> Pr10=subs(Pr1,t,13/61),
Pr10 = [48/61, 26/61, 0]
>> Pr20=subs(Pr2,s,-80/61)
Pr20 = [42/61, 23/61, 4/61]
>> V=Pr20-Pr10, expr=Pr10+t*V
V = [-6/61, -3/61, 4/61]
expr = [48/61-6/61*t, 26/61-3/61*t, 4/61*t]
```

A equação da reta é $(x, y, z) = (48/61 - (6/61)t, 26/61 - (3/61)t, (4/61)t)$.

(b) A distância entre r_1 e r_2 é igual à norma do vetor $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-6/61, -3/61, 4/61)$ que é igual à $1/\sqrt{61}$.

4.2.8.
```
>> A=[0,2,1]; Pr=[t,2-t,-2+2*t];
```

```
>> APr=Pr-A, dist=no(APr)
APr = [t, -t, -3+2*t]
dist = 3^(1/2)*(2*t^2+3-4*t)^(1/2)
>> solve(dist^2-3)
[1][1]
>> P=subs(Pr,t,1)
P = [1, 1, 0]
```

A distância de A até a reta r é igual à $\sqrt{3}$.

4.2.9.

```
>> syms t
>> A=[1,1,1]; B=[0,0,1]; Pr=[1+t,t,t];
>> APr=Pr-A, BPr=Pr-B
APr = [t, -1+t, -1+t] BPr = [1+t, t, -1+t]
>> dist1q=pe(APr,APr), dist2q=pe(BPr,BPr)
dist1q = 3*t^2+2-4*t  dist2q = 2+3*t^2
>> solve(dist1q-dist2q)
t=0
>> subs(Pr,t,0)
[1, 0, 0]
```

O ponto $P = (1, 0, 0)$ é equidistante de A e B.

4.2.10.

```
>> A=[1,-1,2]; B=[4,3,1]; X=[x,y,z];
>> AX=X-A, BX=X-B,
AX = [x-1, y+1, z-2] BX = [x-4, y-3, z-1]
>> dist1q=pe(AX,AX), dist2q=pe(BX,BX)
dist1q = x^2-2*x+6+y^2+2*y+z^2-4*z
dist2q = x^2-8*x+26+y^2-6*y+z^2-2*z
>> expr=dist1q-dist2q
expr = 6*x-20+8*y-2*z
```

A equação do lugar geométrico é $6x + 8y - 2z - 20 = 0$. Este plano passa pelo ponto médio de AB, pois o ponto médio de AB é $M = \overrightarrow{OM} = 1/2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (Exercício 1.18 na página 159) satisfaz a equação do plano. O plano é perpendicular ao segmento AB, pois $N = (6, 8, -2)$ é paralelo a $\overrightarrow{AB} = (3, 4, -1)$.

4.2.11.
```
>> syms x y z d
>> expr1=2*x+2*y+2*z+d;
>> P1=[0,0,-d/2]; N=[2,2,2]; P=[1,1,1];
>> expr2=abs(pe(P-P1,N))/no(N)
```
expr2 $= 1/6\ |6 + d|\ \sqrt{3}$

```
>> solve(expr2-sqrt(3),d)
ans = [   0][ -12]
```

Os planos $2x + 2y + 2z = 0$ e $2x + 2y + 2z - 12 = 0$ satisfazem as condições do exercício.

4.2.12.
```
>> N2=[1,-2,2];N3=[3,-5,7];
>> V=pv(N2,N3)
V =    -4    -1     1
```

$$N = (a, b, c),\ N_1 = (1, 0, 1)$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} \frac{|N \cdot N_1|}{||N||||N_1||} & = & \cos(\pi/3) \\ ||N||^2 & = & 2 \\ N \cdot V & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & = & \frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 + c^2 & = & 2 \\ -4a - b + c & = & 0 \end{array}\right.$$

Da 1a. equação (usando a 2a. equação) segue que

$$|a + c| = 1 \ \Rightarrow\ c = \pm 1 - a.$$

Da 3a. equação

$$b = c - 4a = \pm 1 - 5a,$$

Substituindo-se os valores de b e c encontrados na 2a. equação:

$$a^2 + (\pm 1 - 5a)^2 + (\pm 1 - a)^2 = 2,$$

$$27a^2 = \pm 12a, \Rightarrow \; a = 0 \;\text{ ou }\; a = \pm 4/9.$$

$$N = (0,1,1) \;\text{ ou }\; N = (4/9, -11/9, 5/9)$$

Os planos $y + z = 0$ e $4x - 11y + 5z = 0$ satisfazem as condições do exercício

4.2.13. (a) $N \cdot V_r = (1,1,1) \cdot (1,-1,0) = 0$

(b) Tomando $P_\pi = (0,0,0)$ e $P_r = (1,0,1)$:

$$\mathrm{d}(r,\pi) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_\pi} \cdot N|}{||N||} = \frac{|(1,0,1)\cdot(1,1,1)|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(c) Não. Pois se s é uma reta reversa à r contida em π, então

$$\mathrm{d}(r,s) = \mathrm{d}(r,\pi) = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2.$$

4.2.14. (a) $\overrightarrow{AB} = (-7/3, 7/2, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-7/3, -2, 11/6)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (77/12, 77/18, 77/6)$

$N_1 = (36/77) \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (3,2,6)$

A equação do plano é $3x + 2y + 6z - 6 = 0$

(b) $\overrightarrow{DE} = (5/2, -5, 11)$

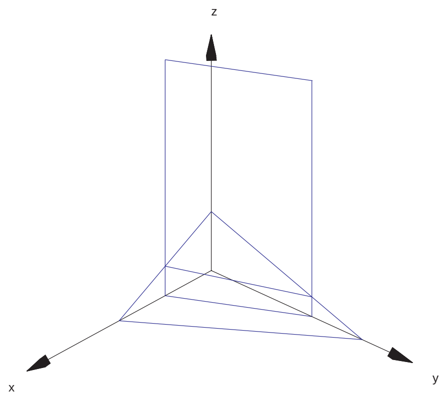
$\overrightarrow{DE} \times \vec{k} = (-5, -5/2, 0)$

$N_2 = -(2/5) \overrightarrow{DE} \times \vec{k} = (2,1,0)$

A equação do plano é $2x + y - 2 = 0$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 2 & 2 \\ 0 & -1/3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 12 & 6 \end{bmatrix} \sim$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 12 & 6 \end{bmatrix}$
As equações paramétricas da reta são $(x, y, z) = (-2 + 6t, 6 - 12t, t)$.

(d)



(e) $\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1|| ||N_2||} = \frac{8}{7\sqrt{5}}$

(f) $\overrightarrow{OP} = \text{proj}_{N_1} \overrightarrow{OA} = \frac{N_1 \cdot \overrightarrow{OA}}{||N_1||^2} N_1 = \frac{6}{49}(3, 2, 6)$

(g) area $= || \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} ||/2 = ||(77/12, 77/18, 77/6)||/2 = \frac{77}{72}||(3, 2, 6)|| = \frac{539}{72}$

4.3. Posições Relativas de Retas e Planos (página 284)

4.3.1. (a)
```
>> A=[1,-2,2,0;3,-5,7,0];
>> oe(-3,1,2,A)
-3*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
     1    -2     2     0
```

```
     0      1      1      0
```

A reta é $(x, y, z) = (-4t, -t, t)$.

(b)
```
>> V=[-4,-1,1]; N=[0,1,1];
>> pe(V,N)
ans = 0
```
Como o vetor diretor da reta é ortogonal ao vetor normal ao plano e o ponto $O = (0, 0, 0)$ pertence aos dois, então a reta está contida no plano

4.3.2.
```
>> P1=[1,1,1];V1=[2,2,1];
>> P2=[0,0,0];V2=[1,1,0];
>> det([P1-P2;V1;V2])
ans = 0
```
As retas são concorrentes.

4.3.3. (a)
```
>> syms m,P1=[1,0,2];V1=[2,1,3];
>> P2=[0,1,-1];V2=[1,m,2*m];
>> expr=det([V1;V2;P2-P1])
expr = -9*m+6
>> solve(expr)
ans = 2/3
```
Para $m = 2/3$ as retas são coplanares.

(b) Para $m = 2/3$, os vetores diretores $V_1 = (2, 1, 3)$ e $V_2 = (1, 2/3, 4/3)$ não são paralelos, pois um não é múltiplo escalar do outro. Portanto, as retas são concorrentes.

(c)
```
>> syms x y z; P=[x,y,z];
>> V2=subs(V2,m,2/3)
V2 = [   1, 2/3, 4/3]
>> N=pv(V1,V2)
N= [ -2/3, 1/3, 1/3]
```
Tomando como vetor normal $-3N = (2, -1, -1)$ a equação do plano é $2x - y - z + d = 0$. Para determinar d substituímos o ponto $P_1 = (1, 0, 2)$ na equação do plano:

```
>> subst(2*x-y-z+d,[x,y,z],[1,0,2])
>> ans= d
```

Assim, a equação do plano é $2x - y - z = 0$.

4.3.4. Precisamos determinar m para que os vetores $W = (2, m, 1)$, $V_1 = (1, 2, 0)$ e $V_2 = (1, 0, 1)$ sejam L.D.

```
>> syms m
>> W=[2,m,1];N=[2,-1,-2];
>> expr=pe(W,N)
expr = 2-m
```

Para $m = 2$ a reta é paralela ao plano. A reta não está contida no plano, pois o ponto da reta $P_0 = (1, 1, 1)$ não satisfaz a equação do plano.

4.3.5. (a)
```
>> N1=[2,1,1];N2=[1,3,1];N3=[1,1,4];
>> det([N1;N2;N3])
ans = 17
```
Os três planos se interceptam num único ponto.

(b)
```
>> N1=[1,-2,1];N2=[2,-4,2];N3=[1,1,0];
>> det([N1;N2;N3])
ans = 0
```
Como $N_2 = 2N_1$, N_3 não é paralelo a eles e as equações dos dois primeiros planos não são proporcionais, o primeiro e o segundo plano são paralelos distintos e o terceiro corta os dois primeiros.

(c)
```
>> N1=[2,-1,1];N2=[3,-2,-1];N3=[2,-1,3];
>> det([N1;N2;N3])
ans = -2
```
Os três planos se interceptam num único ponto.

(d)
```
>> N1=[3,2,-1];N2=[2,-5,2];N3=[1,-1,1];
>> det([N1;N2;N3])
ans = -12
```
Os três planos se interceptam num único ponto.

(e)
```
>> N1=[2,-1,3];N2=[3,1,2];N3=[4,-2,6];
>> det([N1;N2;N3])
ans = 0
```
Como $N_3 = 2N_1$, N_2 não é paralelo a eles e as equações do primeiro e do terceiro planos não são proporcionais, o primeiro e o terceiro plano são paralelos distintos e o segundo corta os outros.

(f)
```
>> N1=[-4,2,-4];N2=[3,1,2];N3=[2,-1,2];
>> det([N1;N2;N3])
ans = 0
```
Como $N_1 = -2N_3$, N_2 não é paralelo a eles e as equações do primeiro e do terceiro planos são proporcionais, o primeiro e o terceiro plano são coincidentes e o segundo corta os outros.

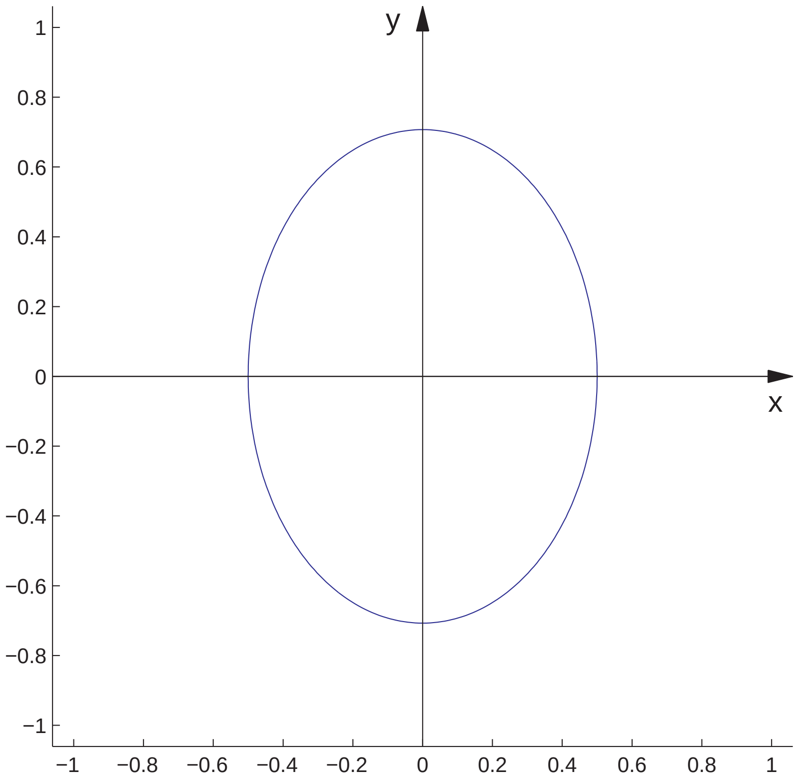
(g)
```
>> N1=[6,-3,9];N2=[4,-2,6];N3=[2,-1,3];
>> det([N1;N2;N3])
ans = 0
```
Como $N_1 = 3N_3$, $N_2 = 2N_3$ e quaisquer duas equações não são proporcionais, os três planos são paralelos distintos.

(h)
```
>> N1=[1,-2,3];N2=[3,1,-2];N3=[5,-3,4];
>> det([N1;N2;N3])
ans = 0
```
Os vetores normais são coplanares, mas quaisquer dois vetores não são paralelos.

```
>> escalona([1,-2,3,2;3,1,-2,1;5,-3,4,4])
ans =
[      1,      0,  -1/7,      0]
[      0,      1, -11/7,      0]
[      0,      0,     0,      1]
```
Como o sistema não tem solução os planos se interceptam dois a dois segundo retas distintas.

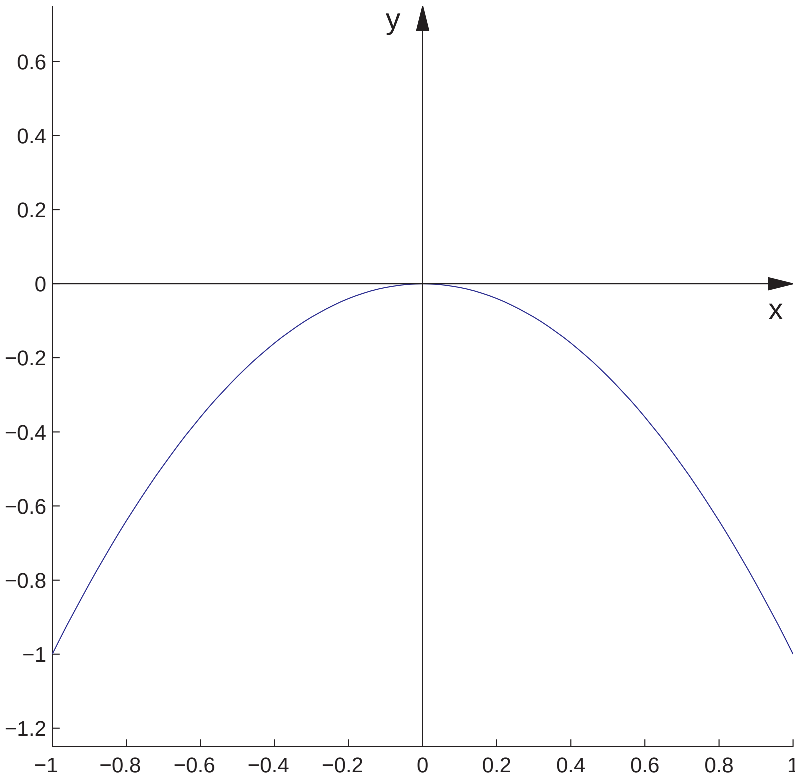
5.1. Cônicas não Degeneradas (página 314)

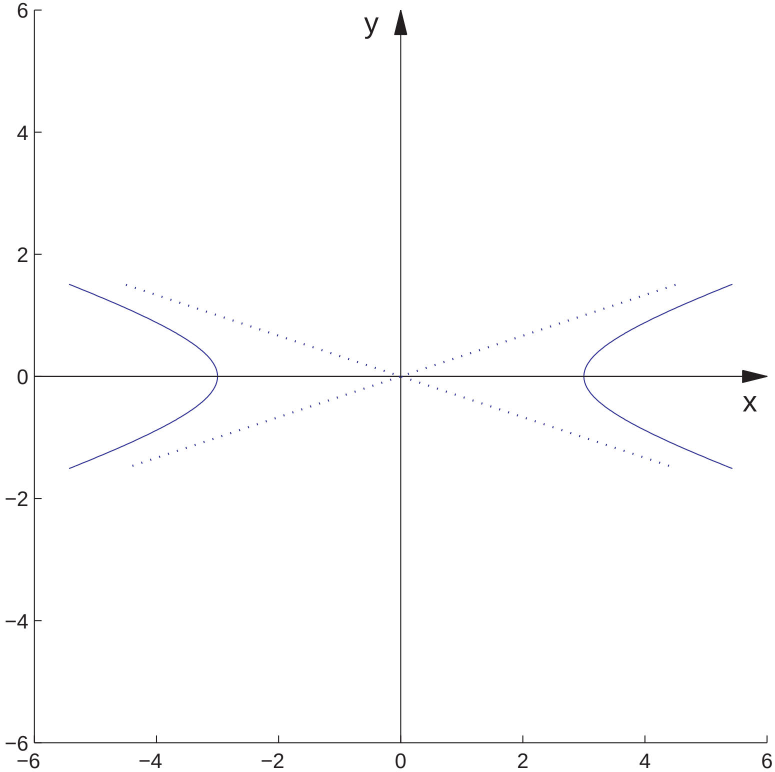
5.1.1. (a) $4x^2 + 2y^2 = 1$ pode ser reescrita como $\frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{1/2} = 1$, que é a equação de uma elipse com focos em $(0, \pm c)$, em que $c = \sqrt{1/4 + 1/2} = \sqrt{3}/2$.


y
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

(b) $x^2 + y = 0$ pode ser reescrita como $y = -x^2$, que é a equação de uma parábola com foco em $(0, -1/4)$ e reta diretriz $y = 1/4$.

(c) Dividindo $x^2 - 9y^2 = 9$ por 9 obtemos $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$, que é a equação de uma hipérbole com focos em $(\pm c, 0)$, em que $c = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.


y
x
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1.2
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


y
x
6
4
2
0
−2
−4
−6
−6
−4
−2
0
2
4
6

5.1.2. (a) $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=6$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=6-\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$-2x+11=3\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$5x^2+9y^2-10x-36y-4=0.$$

(b) $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=4$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=4-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$4-(x+y)=2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$3x^2+3y^2-2xy-16=0.$$

5.1.3. (a) $\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\pm 3$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=\pm 3+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$5y-12=\pm 3\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$16y^2-9x^2+54x-48y-81=0.$$

(b) $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\pm 2$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} = \pm 2 + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(x+y)-1 = \pm\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, obtemos

$$2xy-1=0.$$

5.1.4. (a) $\sqrt{x^2+(y-2)^2} = |y+2|$. Elevando ao quadrado e simplificando obtemos

$$x^2-8y=0$$

(b) $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \dfrac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}$. Elevando ao quadrado e simplificando obtemos

$$x^2-2xy+y^2+4x+4y-4=0.$$

5.1.5.

$$\text{dist}(P,F) = 2\,\text{dist}(P,r)$$
$$\sqrt{(x-6)^2+y^2} = 2\left|x-\frac{3}{2}\right|$$

Elevando-se ao quadrado

$$(x-6)^2+y^2 = 4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

Simplificando-se

$$3x^2-y^2=27$$

ou

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

que é uma hipérbole.

5.1.6.

$$\text{dist}(P, r) = 2\,\text{dist}(P, F)$$

$$|x| = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

Elevando-se ao quadrado e simplificando-se

$$3x^2 - 24x + 36 + 4(y-2)^2 = 0$$

Completando-se o quadrado

$$3[(x-4)^2 - 4] + 4(y-2)^2 = 0$$

$$3(x-4)^4 + 4(y-2)^2 = 12$$

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

que é uma elipse.

5.2. Coordenadas Polares e Equações Paramétricas (página 348)

5.2.1. (a) $r = 2$

(b) $r^2 \cos 2\theta = 4$

(c) $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

(d) $r^2 \cos^2 \theta - 4r \operatorname{sen} \theta - 4 = 0$

5.2.2. (a) $16(x + 3/4)^2 - 2y^2 = 1$ que é uma hipérbole com excentricidade $e = 3$ e focos em $(-6/4, 0)$ e $(0, 0)$

(b) $x^2 + (y-2)^2 = 4$ que é uma circunferência com raio $a = 2$ e centro em $(0, 2)$

(c) $(x-9/2)^2+y^2=81/4$ que é uma circunferência com raio $a=9/2$ e centro em $(9/2,0)$

(d) $x^2/4+(y-1)^2/3=1$ que é uma elipse com excentricidade $e=1/2$ e focos em $(0,0)$ e $(0,2)$

(e) $x^2(x^2+y^2)=y^2$

(f) $ax+by+c=0$

5.2.3. (a) Parábola com $e=1$, $\quad d=5/2$, $\quad V=(5/4,\pi)$

(b) Elipse com $e=1/3$, $\quad d=6$, $\quad V_1=(3/2,\pi/2)\quad V_2=(3,-\pi/2)$

(c) Hipérbole com $e=2$, $\quad d=3/4$, $\quad V_1=(1/2,0)\quad V_2=(-3/2,\pi)$

(d) Hipérbole com $e=3/2$, $\quad d=4/3$, $\quad V_1=(-4,0)\quad V_2=(4/5,\pi)$

5.2.4. (a) $a=2$, $\quad C=(2,0)$

(b) $a=3/2$, $\quad C=(3/2,-\pi/2)$

(c) $a=3/4$, $\quad C=(3/4,0)$

(d) $a=2/3$, $\quad C=(2/3,-\pi/2)$

5.2.5. (a) $\begin{cases} 0\leq\theta<\arctan(4/3), & 0\leq r\leq 5\\ \arctan(4/3)\leq\theta\leq\pi/2, & 0\leq r\leq\frac{4}{\operatorname{sen}\theta}\end{cases}$

(b) $\begin{cases} 0\leq\theta<\pi/4, & 0\leq r\leq 3\sqrt{2}\\ \pi/4\leq\theta\leq\pi, & 0\leq r\leq\frac{3}{2\operatorname{sen}\theta-cos\theta}\end{cases}$

(c) $\arctan(1/2)\leq\theta\leq\pi/4$, $\quad 4\leq r\leq\frac{4}{\cos\theta}$

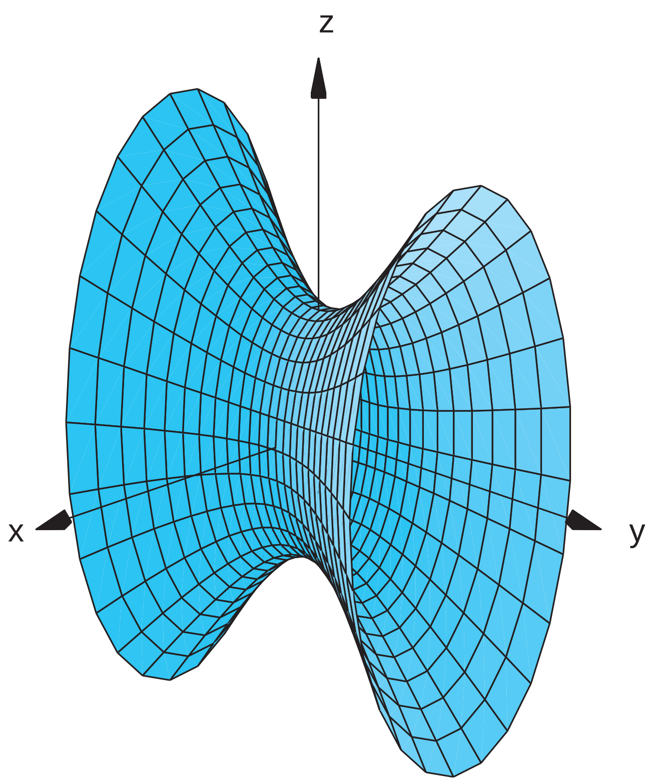
(d) $\arctan(1/2)\leq\theta\leq\pi/2$, $\quad 0\leq r\leq 4cos\theta$

6.1. Quádricas (página 399)

6.1.1. (a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$ pode ser reescrita como

$$\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/2} + z^2 = 1,$$

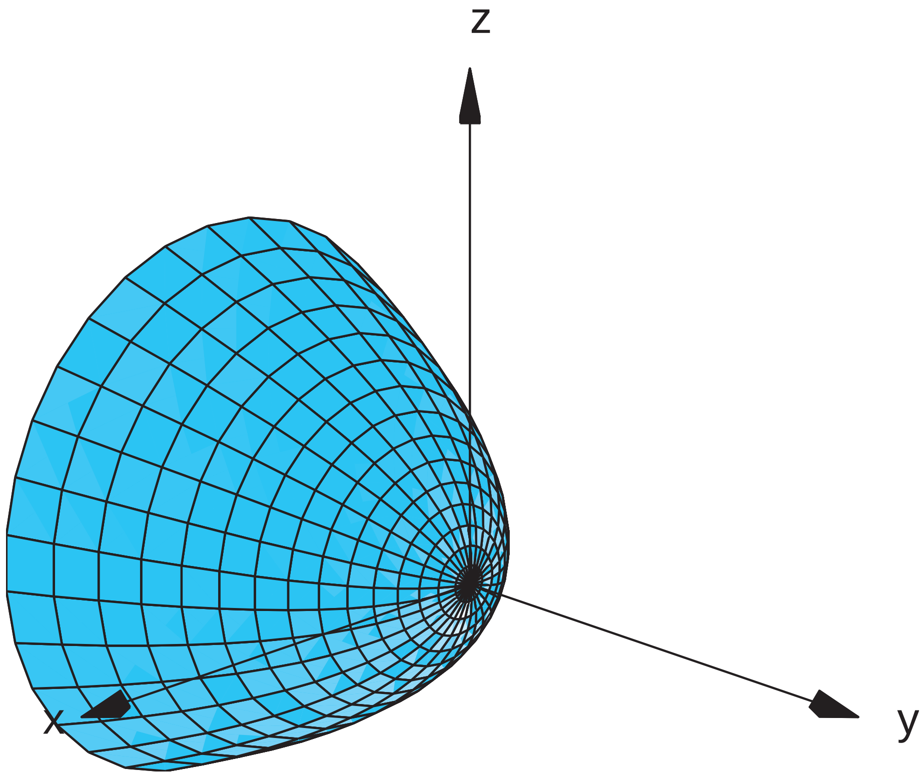
que é um hiperbolóide de uma folha.


z
x
y

(b) $x^2 + y + z^2 = 0$ pode ser reescrita como

$$y = -(x^2 + z^2),$$

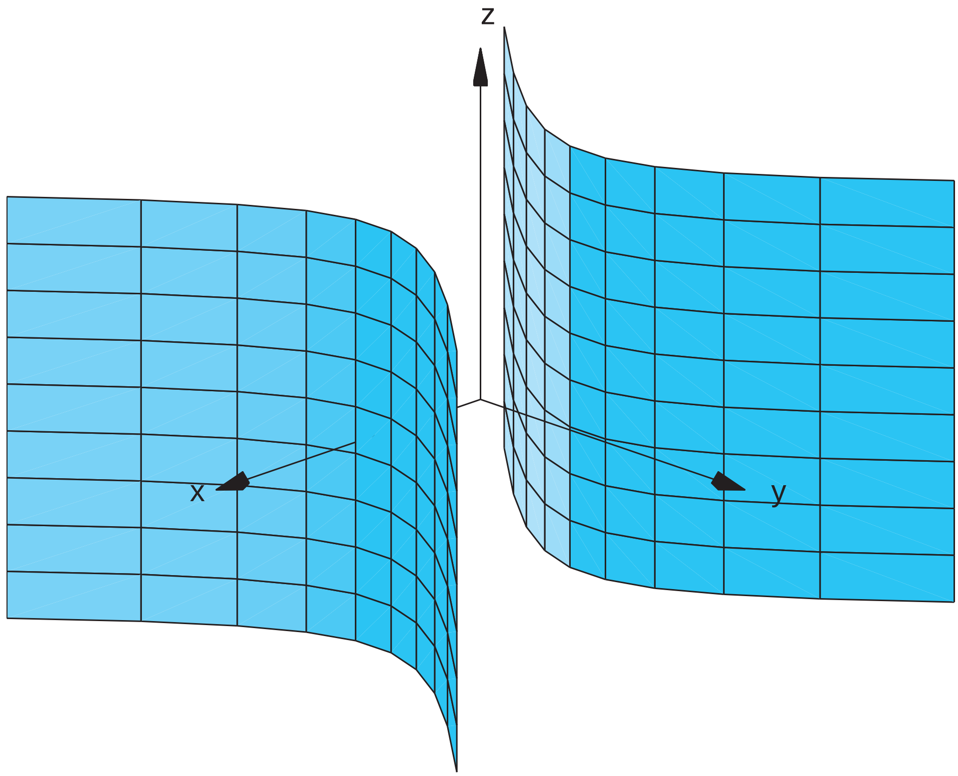
que é a equação de um paraboloide elíptico.


z
x
y

(c) Dividindo $x^2 - 9y^2 = 9$ por 9, obtemos

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1,$$

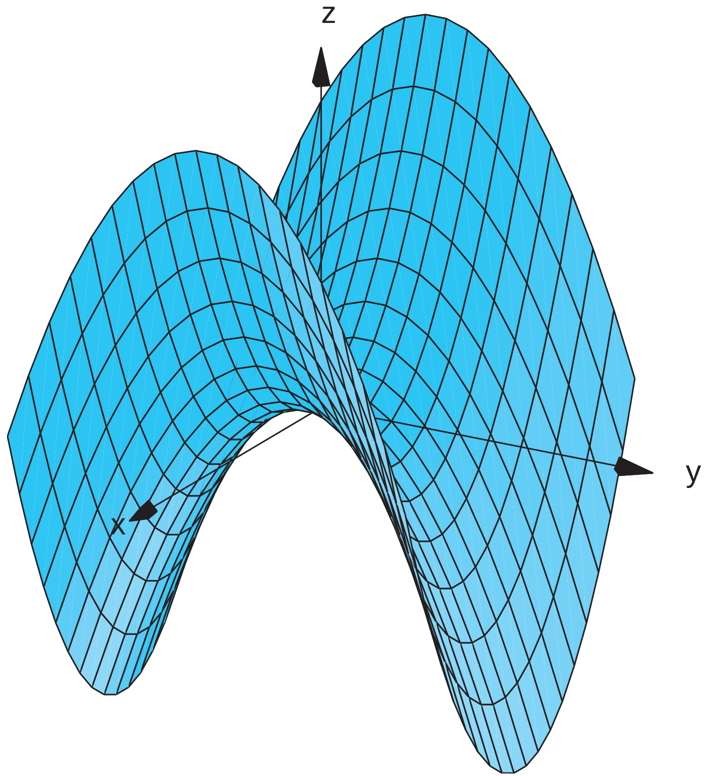
que é a equação de um cilindro quádrico.


z
x
y

(d) Dividindo $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$ por 36 obtemos

$$z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4},$$

que é a equação de paraboloide hiperbólico.


z
y
x

6.1.2. $\text{dist}(X, \pi) = \text{dist}(X, P)$

$$|x-2| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$(x-2)^2 = (x+2)^2 + y^2 + z^2$$

$$-8x = y^2 + z^2$$

Paraboloide elíptico

6.1.3. $\text{dist}(X, r) = \text{dist}(X, s)$

$$\sqrt{z^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(y-1)^2 + x^2}$$

$$z^2 + (y+1)^2 = (y-1)^2 + x^2$$

$$z^2 - x^2 = -4y$$

Paraboloide hiperbólico.

6.1.4. $\text{dist}(P, (2,0,0)) + \text{dist}(P, (-2,0,0)) = 6$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$9 + 2x = -3\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$81 + 36x + 4x^2 = 9[(x+2)^2 + y^2 + z^2]$$

$$45 = 5x^2 + 9y^2 + 9z^2$$

Elipsóide

6.1.5. $|\,\mathrm{dist}(P,(2,0,0)) - \mathrm{dist}(P,(-2,0,0))| = 3$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2} - \sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2} = \pm 3$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2} = \pm 3 + \sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}$$

$$(x-2)^2+y^2+z^2 = 9 \pm 6\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2} + (x+2)^2+y^2+z^2$$

$$-9-8x = \pm 6\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}$$

$$-63 = -28x^2+36y^2+36z^2$$

Hiperbolóide de duas folhas

6.2. Superfícies Cilíndricas, Cônicas e de Revolução

6.3. Coordenadas Cilíndricas, Esféricas e Equações Paramétricas (página 450)

6.3.1. (a) $r^2 + 4z^2 = 16$

(b) $r^2 \cos 2\theta = 9$

(c) $r^2 \cos 2\theta = 3z^2$

(d) $r^2 = z^2$

6.3.2. (a) $r^2 = 9r\cos\phi$

(b) $\phi = \pi/4$ e $\phi = 3\pi/4$

(c) $r^2 \operatorname{sen}\phi = 9$

(d) $r\operatorname{sen}^2\phi = 2\cos\phi$

6.3.3. (a) $x^2 + y^2 = 16$

(b) $x^2 + y^2 = 9x$

(c) $x^2 - y^2 = z^3$

(d) $z^2 y = (x^2 + y^2)^4$

6.3.4. (a) $z^2 = x^2 + y^2, z > 0$

(b) $z = 9$

(c) $x^2(x^2 + y^2 + z^2) = 4y^2$

(d) $x^2 + y^2 + z^2 = 6y + 3z$

6.3.5. (a) $x = a \tan s \cos t, \quad y = b \sec s, \quad z = c \tan s \,\text{sen}\, t$

(b) $x = as \tan t, \quad y = bs \sec t, \quad z = s^2$

(c) $x = as \cos t, \quad y = bs \,\text{sen}\, t, \quad z = s$

(d) $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = s$, onde $x = x(t), \quad y = y(t)$ é uma parametrização da curva $f(x, y) = 0$

(e) $x = sx(t), \quad y = sy(t), \quad z = s$, onde $x = x(t), \quad y = y(t)$ é uma parametrização da curva $f(x, y) = 0$

(f) $x = x(t) \cos s, \quad y = x(t) \,\text{sen}\, s, \quad z = z(t)$, onde $x = x(t), \quad z = z(t)$ é uma parametrização da curva $f(x, z) = 0$

(g) $x = x(t) + as, \quad y = y(t) + bs, \quad z = s$, onde $x = x(t), \quad y = y(t)$ é uma parametrização da curva $f(x, y) = 0$

6.3.6. $y = t^2 = x^2$

6.3.7. $x^2 + y^2 = t^2 \cos^2 t + t^2 \,\text{sen}^2\, t = t^2 = z^2$

6.3.8. Uma parametrização para o cilindro é

$$x = \cos t, \quad y = \text{sen}\, t \quad \text{e} \quad z = s.$$

Vamos usar a equação do plano para eliminar s na parametrização do cilindro. Substituindo-se a parametrização do cilindro na equação do plano obtemos

$$\text{sen}\, t + s = 2.$$

Assim,

$$s = 2 - \operatorname{sen} t.$$

Portanto,

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 2 - \operatorname{sen} t$$

para $t \in [0, 2\pi]$ é uma parametrização para a curva.

7.1. Rotação e Translação (página 461)

7.1.1. (a)
```
>> v1=sym([1/sqrt(2),-1/sqrt(2)]);
>> v2=sym([1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> p=[1,3];
>> A=[v1;v2;p].'
>> escalona(A)
[1,          0,   -2^(1/2)]
[0,          1, 2*2^(1/2)]
```
Assim, as coordenadas de P em relação ao sistema $\mathcal{S}$ são:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(b)
```
>> v1=sym([1/sqrt(2),-1/sqrt(2),0]);
>> v2=sym([0,0,1]);
>> v3=sym([1/sqrt(2),1/sqrt(2),0]);
>> p=[2,-1,2]; A=[v1;v2;v3;p].';
>> escalona(A)
[ 1,           0,           0, 3/2*2^(1/2)]
[ 0,           1,           0,           2]
[ 0,           0,           1, 1/2*2^(1/2)]
```
Assim, as coordenadas de P em relação ao sistema $\mathcal{S}$ são:

$$\begin{bmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ 2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

7.1.2. (a)
```
>> v1=sym([-1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> v2=sym([1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> v=2*v1+v2
```
$\left[\ -\sqrt{2}/2 \quad 3\sqrt{2}/2\ \right]$

(b)
```
>> v1=sym([0,1/sqrt(2),-1/sqrt(2)]);
>> v2=sym([1,0,0]);
>> v3=sym([0,1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> v=-v1+v2+2*v3
v =       3              1              3
```
$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

7.1.3. As coordenadas de U_1, U_2 e U_3 em relação ao sistema $\mathcal{S} = \{O, U_1, U_2, U_3\}$ são dadas por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente. Assim, $U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ e $U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

7.1.4.
```
>> p=sym([sqrt(3),1]).'; pr=sym([sqrt(3),-1]).';
>> A=[cos(th),-sin(th);sin(th),cos(th)];
>> expr=A*pr-p
expr = [ cos(th)*3^(1/2)+sin(th)-3^(1/2)]
       [       sin(th)*3^(1/2)-cos(th)-1]
>> solve(expr(1,1),expr(2,1),th)
ans = 1/3*pi
```
A rotação é de $\pi/3$.

7.2. Identificação de Cônicas (página 479)

(a)
```
>> a=sym(9);b=sym(-4);c=sym(6);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> syms x
>> p=det(A-x*eye(2))
p = 50-15*x+x^2
>> solve(p)
ans = [  5][ 10]
>> a1=5;c1=10;
>> escalona(A-5*eye(2))
[  4, -2]
[ -2,  1]
ans =
[    1, -1/2]
[    0,    0]
```

A solução geral de $(A - 5I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, 2\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ e $U_2 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(5),-2/sqrt(5);...
2/sqrt(5),1/sqrt(5)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

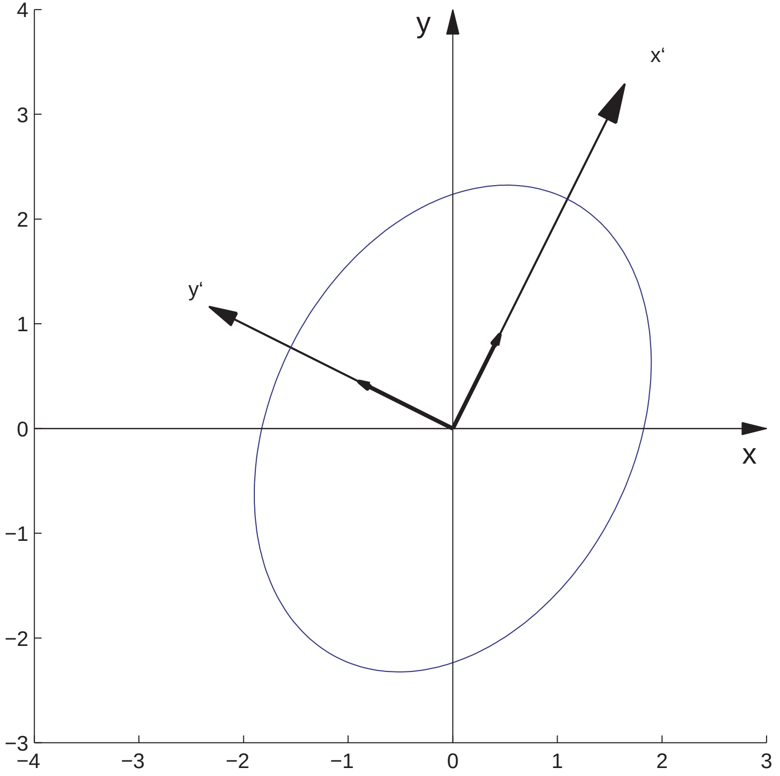
```
>> syms x1 y1
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2-30
```

$$5\,{x_1}^2 + 10\,{y_1}^2 - 30$$

```
>> expr=expr/30
```

$x_1{}^2/6 + y_1{}^2/3 - 1$

```
>> elipse(sqrt(6),sqrt(3),P)
```



y
x‘
y‘
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

(b)
```
>> a=sym(3);b=sym(-8);c=sym(-12);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -52+9*x+x^2
>> solve(p)
ans = [ -13][   4]
>> a1=-13;c1=4;
>> escalona(A+13*eye(2))
[ 16, -4]
[ -4,  1]
ans =
[    1, -1/4]
[    0,    0]
```

A solução geral de $(A + 13I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, 4\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{17}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{17}, 4/\sqrt{17})$ e $U_2 = (-4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(17),-4/sqrt(17);...
4/sqrt(17),1/sqrt(17)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{17}/17 & -4\sqrt{17}/17 \\ 4\sqrt{17}/17 & \sqrt{17}/17 \end{bmatrix}$$

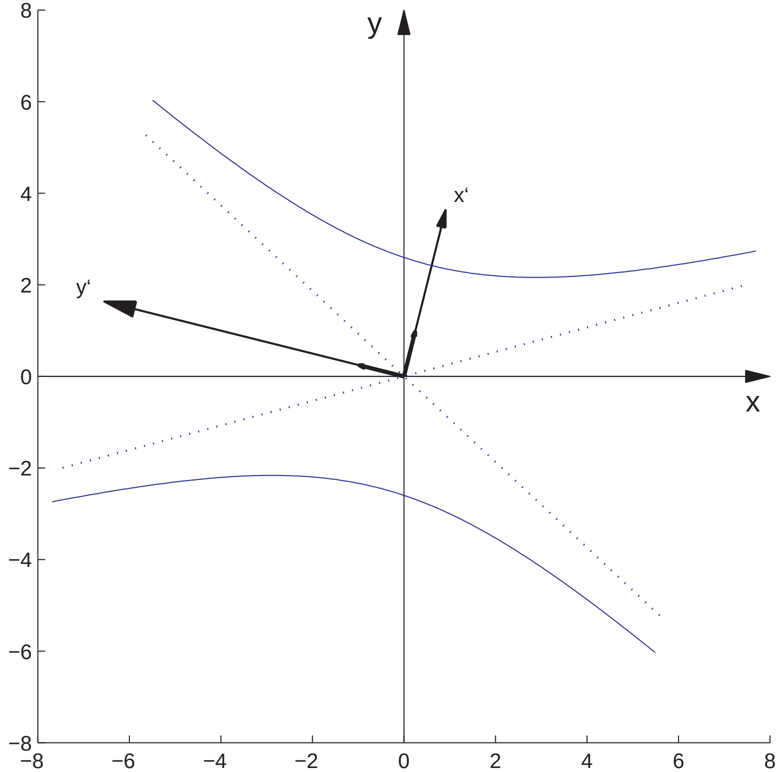
```
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+81
```

$$-13\,{x_1}^2 + 4\,{y_1}^2 + 81$$

```
>> expr=expr/81
```

$$-\frac{13}{81}\,{x_1}^2 + \frac{4}{81}\,{y_1}^2 + 1$$

```
>> hiperbx(9/sqrt(13),9/2,P)
```



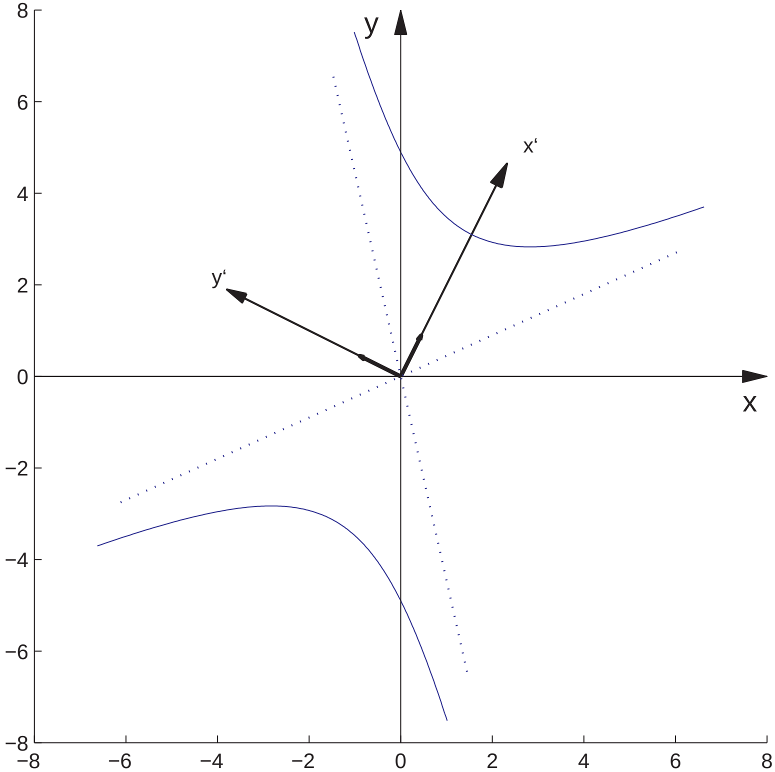
y
x
x'
y'
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

(c)
```
>> a=sym(2);b=sym(-4);c=sym(-1);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -6-x+x^2
>> solve(p)
ans = [ -2][  3]
>> a1=-2;c1=3;
>> escalona(A+2*eye(2))
[  4, -2]
[ -2,  1]
ans =
[    1, -1/2]
[    0,    0]
```
A solução geral de $(A+2I_2)X=\bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, 2\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ e $U_2 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(5),-2/sqrt(5);...
2/sqrt(5),1/sqrt(5)])
```
$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 & 1\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$
```
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+24
```
$$-2\,{x_1}^2 + 3\,{y_1}^2 + 24$$
```
>> expr=expr/24
```
$$-{x_1}^2/12 + {y_1}^2/8 + 1$$
```
>> hiperbx(sqrt(12),sqrt(8),P)
```


y
x‘
y‘
x
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

(d)
```
>> a=sym(21);b=sym(6);c=sym(13);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = 264-34*x+x^2
>> solve(p)
ans = [ 12][ 22]
>> a1=12;c1=22;
>> escalona(A-12*eye(2))
[ 9, 3]
[ 3, 1]
ans =
[   1, 1/3]
[   0,   0]
```

A solução geral de $(A - 12I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, -3\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{10}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$ e $U_2 = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(10),3/sqrt(10);...
-3/sqrt(10),1/sqrt(10)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \\ -3\sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

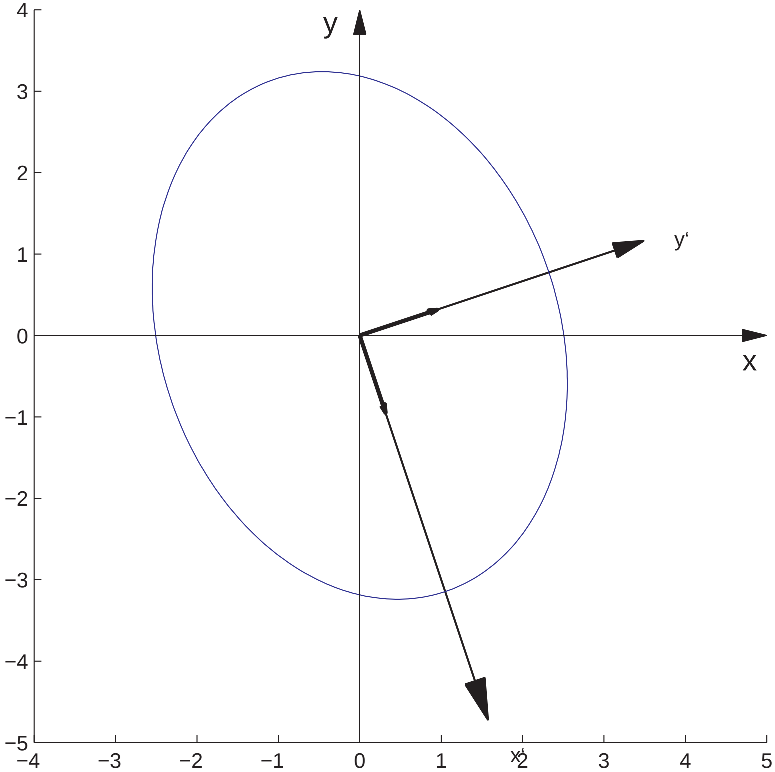
```
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2-132
```

$12\, {x_1}^2 + 22\, {y_1}^2 - 132$

```
>> expr=expr/132
```

${x_1}^2/11 + {y_1}^2/6 - 1$

```
>> elipse(sqrt(11),sqrt(6),P)
```


y
x
y‘
x‘
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5

(e)
```
>> a=sym(4);b=sym(-20);c=sym(25);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -29*x+x^2
>> solve(p)
ans = [  0][ 29]
>> a1=0;c1=29;
>> escalona(A)
[   4, -10]
[ -10,  25]
ans =
[    1, -5/2]
[    0,    0]
```
A solução geral de $AX = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(5\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(5\alpha, 2\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{29}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (5/\sqrt{29}, 2/\sqrt{29})$ e $U_2 = (-2/\sqrt{29}, 5/\sqrt{29})$ para caracterizar os novos eixos.

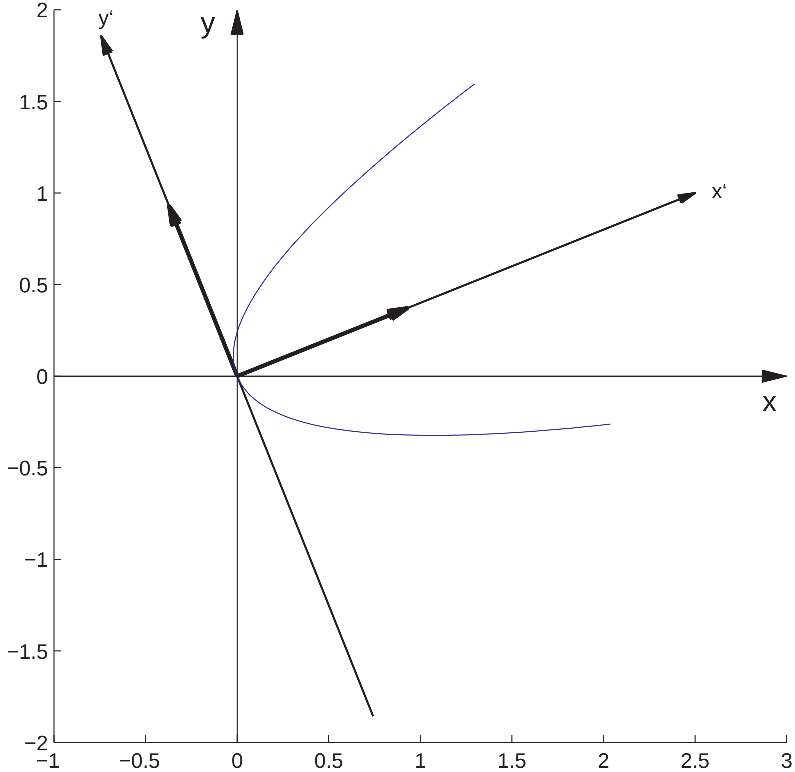
```
>> P=sym([2/sqrt(29),2/sqrt(29);...
-2/sqrt(29),5/sqrt(29)])
```
$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{29}\sqrt{29} & -\frac{2}{29}\sqrt{29} \\ \frac{2}{29}\sqrt{29} & \frac{5}{29}\sqrt{29} \end{bmatrix}$$

```
>> e=-15;f=-6;
>> [e,f]*P
ans = [ -3*29^(1/2), 0]
>> e1=ans(1,1);f1=ans(1,2);
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1
```
$$29\,{y_1}^2 - 3\,\sqrt{29}x_1$$

```
>> expr=expr/29
```

$y_1{}^2 - \frac{3}{29}\sqrt{29}x_1$

```
>> parabx(3/(4*sqrt(29)),P)
```


y‘
y
x‘
x
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

(f)
```
>> a=sym(9);b=sym(6);c=sym(1);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -10*x+x^2
>> solve(p)
ans = [  0][ 10]
>> a1=0;c1=10;
>> escalona(A)
[ 9, 3]
[ 3, 1]
ans =
[   1, 1/3]
[   0,   0]
```

A solução geral de $AX = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, -3\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{10}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$ e $U_2 = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(10),3/sqrt(10);...
-3/sqrt(10),1/sqrt(10)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \\ -3\sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

```
>> e=-10*sqrt(10);f=10*sqrt(10);
>> [e,f]*P
ans = [ -40, -20]
>> e1=ans(1,1);f1=ans(1,2);
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1+90
```

$$10\, {y_1}^2 - 20\, y_1 - 40\, x_1 + 90$$

```
>> syms x2 y2
>> expr=subst(expr,y1,y2+1)
```

$10\,{y_2}^2 + 80 - 40\,x_1$

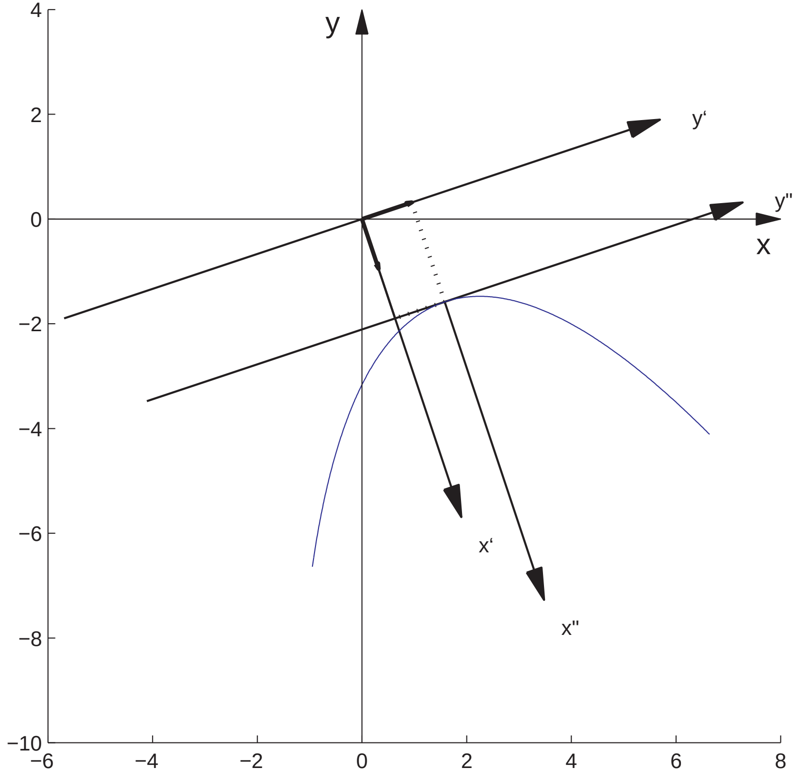
```
>> expr=subst(expr,x1,x2+2)
```

$10\,{y_2}^2 - 40\,x_2$

```
>> expr=expr/10
```

${y_2}^2 - 4\,x_2$

```
>> paraby(1,P,[2;1])
```


4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
y
x
y‘
y"
x‘
x"

(g)
```
>> a=sym(5);b=sym(-6);c=sym(5);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = 16-10*x+x^2
>> solve(p)
ans = [ 2][ 8]
>> a1=2;c1=8;
>> escalona(A-2*eye(2))
[  3, -3]
[ -3,  3]
ans =
[  1, -1]
[  0,  0]
```

A solução geral de $(A - 2I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $U_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(2),-1/sqrt(2);...
1/sqrt(2),1/sqrt(2)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

```
>> e=-30*sqrt(2);f=18*sqrt(2);
>> [e,f]*P
ans = [-12,   48 ]
>> e1=-12;f1=48;
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1+82
```

$$2\,{x_1}^2 + 8\,{y_1}^2 - 12\,x_1 + 48\,y_1 + 82$$

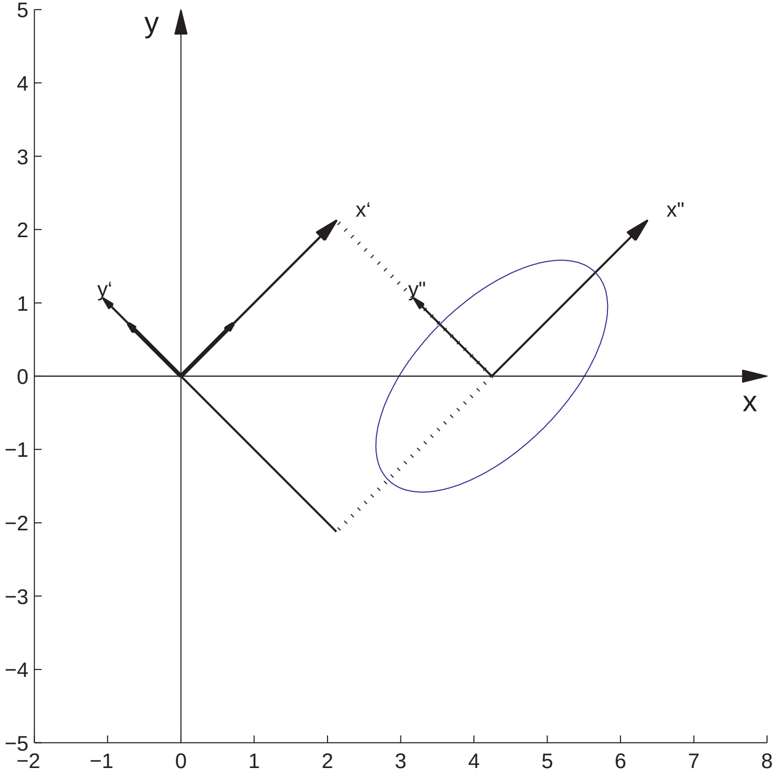
```
>> X0=[3;-3];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$2\,x_2{}^2 - 8 + 8\,y_2{}^2$$

```
>> expr=expr/8
```

$$x_2{}^2/4 - 1 + y_2{}^2$$

```
>> elipse(2,1,P,X0)
```


y
x
x'
y'
x"
y"
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

(h)
```
>> a=sym(5);b=sym(12);c=sym(0);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -5*x+x^2-36
>> solve(p)
ans = [ -4][  9]
>> a1=-4;c1=9;
>> escalona(A+4*eye(2))
[ 9, 6]
[ 6, 4]
ans =
[   1, 2/3]
[   0,   0]
```

A solução geral de $(A + 4I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(2\alpha, -3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(2\alpha, -3\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{13}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (2/\sqrt{13}, -3/\sqrt{13})$ e $U_2 = (3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([2/sqrt(13),3/sqrt(13);...
-3/sqrt(13),2/sqrt(10)])
```

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

```
>> e=-12*sqrt(13);f=0;
>> [e,f]*P
ans = [ -24, -36]
>> e1=-24;f1=-36;
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1-36
```

$$-4\,x_1{}^2 + 9\,y_1{}^2 - 24\,x_1 - 36\,y_1 - 36$$

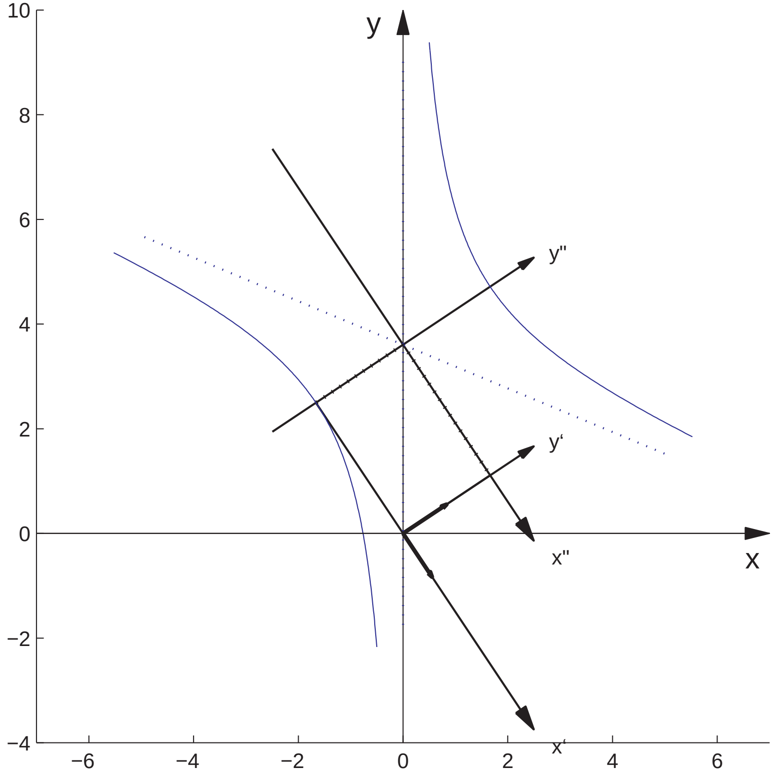
```
>> X0=[-3;2];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$-4\,x_2{}^2 - 36 + 9\,y_2{}^2$

```
>> expr=expr/36
```

$-x_2{}^2/9 - 1 + y_2{}^2/4$

```
>> hiperby(2,3,P,X0)
```



10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−4
−2
0
2
4
6
y
x
y"
y'
x"
x'

(i)
```
>> a=sym(6);b=sym(-4);c=sym(9);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = 50-15*x+x^2
>> solve(p)
ans = [  5][ 10]
>> a1=5;c1=10;
>> escalona(A-5*eye(2))
[  1, -2]
[ -2,  4]
ans =
[  1, -2]
[  0,  0]
```
A solução geral de $(A - 5I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(2\alpha, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ e $U_2 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([2/sqrt(5),-1/sqrt(5);...
1/sqrt(5),2/sqrt(5)])
```

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

```
>> e=-4*sqrt(5);f=-18*sqrt(5);
>> [e,f]*P
ans = [ -26, -32]
>> e1=-26;f1=-32;
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1-5
```

$$5\,{x_1}^2 + 10\,{y_1}^2 - 26\,x_1 - 32\,y_1 - 5$$

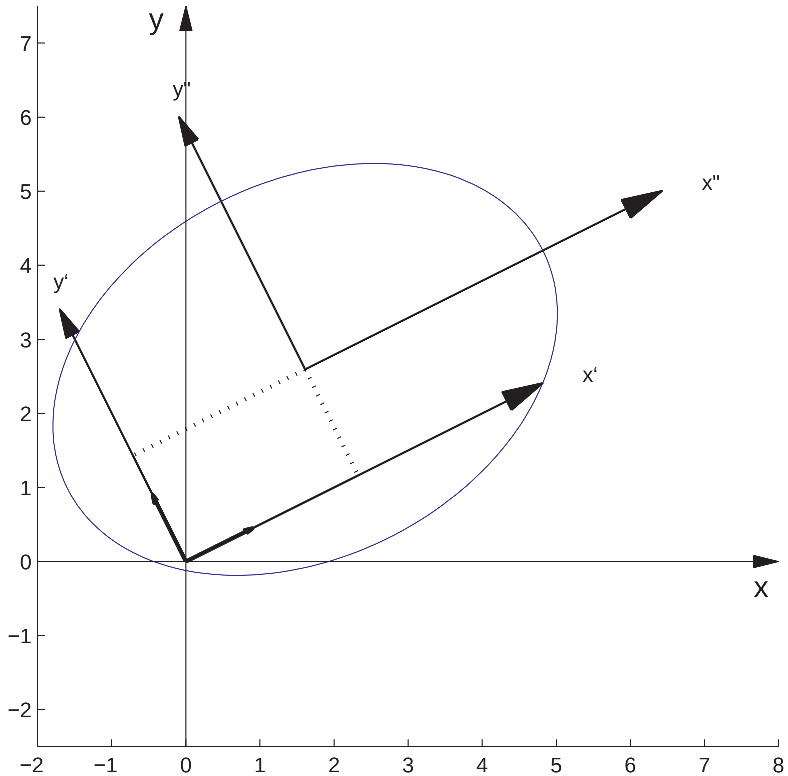
```
>> X0=[26/10;32/20];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$5\,x_2{}^2 - \frac{322}{5} + 10\,y_2{}^2$$

```
>> expr=expr*5/322
```

$$\frac{25}{322}\,x_2{}^2 - 1 + \frac{25}{161}\,y_2{}^2$$

```
>> elipse(sqrt(322)/5,sqrt(161)/5,P,X0)
```


y
x
y"
x"
y'
x'
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

(j)
```
>> a=sym(1);b=sym(2*sqrt(3));c=sym(-1);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -4+x^2
>> solve(p)
ans = [  2][ -2]
>> a1=2;c1=-2;
>> escalona(A-2*eye(2))
[      -1, 3^(1/2)]
[ 3^(1/2),      -3]
ans =
[         1, -3^(1/2)]
[         0,        0]
```

A solução geral de $(A - 2I_2)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\sqrt{3}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\sqrt{3}\alpha, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/2$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([sqrt(3)/2,-1/2;...
1/2,sqrt(3)/2])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

```
>> costh=sqrt((cos2th+1)/2)
costh = 1/2*3^(1/2)
>> senth=sqrt(1-costh^2)
senth = 1/2
>> e=6;f=0;
>> [e,f]*P
```

```
ans = [ 3*3^(1/2),        -3]
>> e1=3*sqrt(3);f1=-3;
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1
```

$$2\,{x_1}^2 - 2\,{y_1}^2 + 3\,\sqrt{3}x_1 - 3\,y_1$$

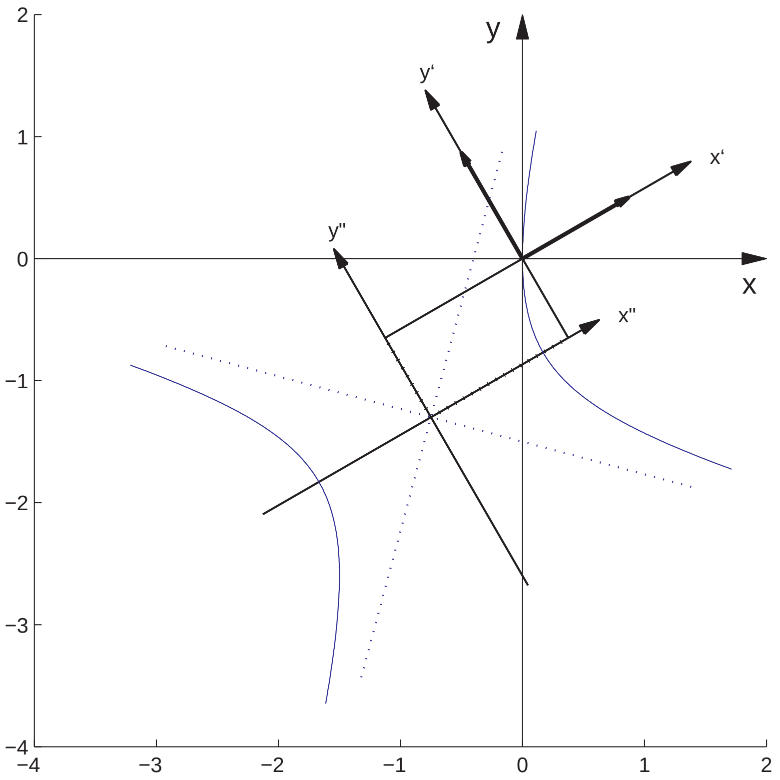
```
>> X0=[-3*3^(1/2)/4;-3/4];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$2\,{x_2}^2 - 9/4 - 2\,{y_2}^2$$

```
>> expr=expr*4/9
```

$$\frac{8}{9}\,{x_2}^2 - 1 - \frac{8}{9}\,{y_2}^2$$

```
>> hiperbx(3/sqrt(8),3/sqrt(8),P,X0)
```



y
y‘
x‘
y"
x"
x
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2

(k)
```
>> a=sym(8);b=sym(-16);c=sym(8);
>> A=[a,b/2;b/2,c];
>> p=det(A-x*eye(2))
p = -16*x+x^2
>> solve(p)
ans = [  0][ 16]
>> a1=0;c1=16;
>> escalona(A)
[  8, -8]
[ -8,  8]
ans =
[  1, -1]
[  0,  0]
```
A solução geral de $AX = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha, \alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$, então podemos tomar os vetores $U_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $U_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ para caracterizar os novos eixos.

```
>> P=sym([1/sqrt(2),-1/sqrt(2);...
1/sqrt(2),1/sqrt(2)])
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

```
>> e=33*sqrt(2);f=-31*sqrt(2);
>> [e,f]*P
ans = [ 2,  -64 ]
>> e1=2;f1=-64;
>> expr=a1*x1^2+c1*y1^2+e1*x1+f1*y1+70
```

$$16\, {y_1}^2 + 2\, x_1 - 64\, y_1 + 70$$

```
>> expr=subst(expr,y1,y2+2)
```

$16\,{y_2}^2 + 6 + 2\,x_1$

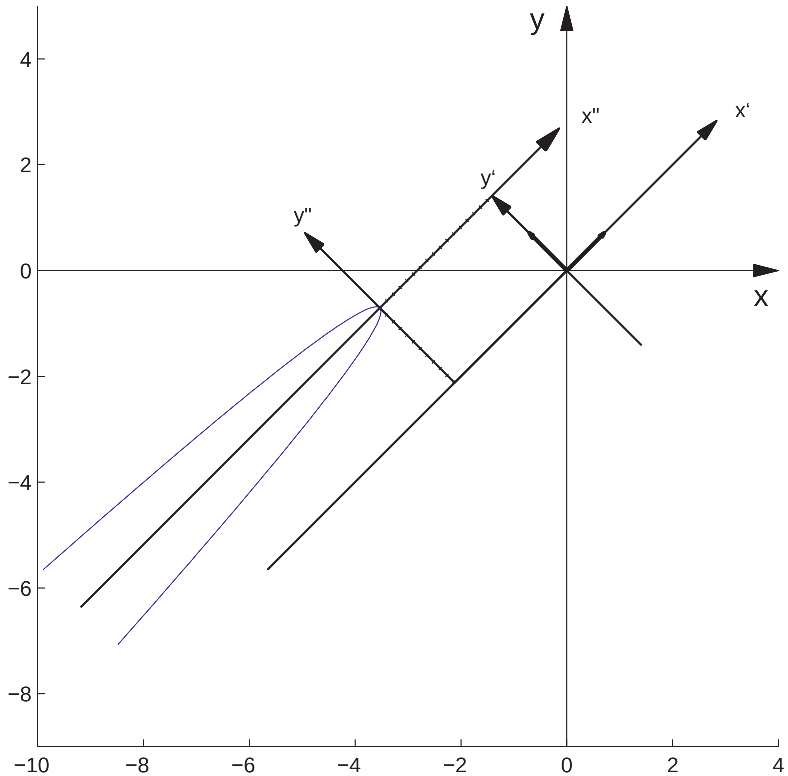
```
>> expr=subst(expr,x1,x2-3)
```

$16\,{y_2}^2 + 2\,x_2$

```
>> expr=expr/16
```

${y_2}^2 + x_2/8$

```
>> parabx(-1/32,P,[-3;2])
```


y
x
x"
x'
y'
y"
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4

7.3. Identificação de Quádricas (página 497)

7.3.1.
```
>> a=2;b=30;c=23;d=0;e=72;f=0;
>> A=sym([a,d/2,e/2;d/2,b,f/2;e/2,f/2,c])
>> syms x
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans = [ -25][  30][  50]
>> a1=-25;b1=30;c1=50;
>> escalona(A-a1*eye(3))
[ 27,  0, 36]
[  0, 55,  0]
[ 36,  0, 48]
ans =
[   1,   0, 4/3]
[   0,   1,   0]
[   0,   0,   0]
```
A solução geral de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(-4\alpha, 0, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(-4\alpha, 0, 3\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/5$, então podemos tomar $U_1 = (-4/5, 0, 3/5)$.

```
>> escalona(A-b1*eye(3))
[ -28,   0,  36]
[   0,   0,   0]
[  36,   0,  -7]
ans =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0]
```

A solução geral de $(A - b_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_2 = \{(0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(0, \alpha, 0)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1$, então podemos tomar $U_2 = (0, 1, 0)$.

```
>> U1=[-4/5,0,3/5];
>> U2=[0,1,0];
>> P=sym([U1',U2',pv(U1',U2')])
```

$$P = \begin{bmatrix} -4/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & -4/5 \end{bmatrix}$$

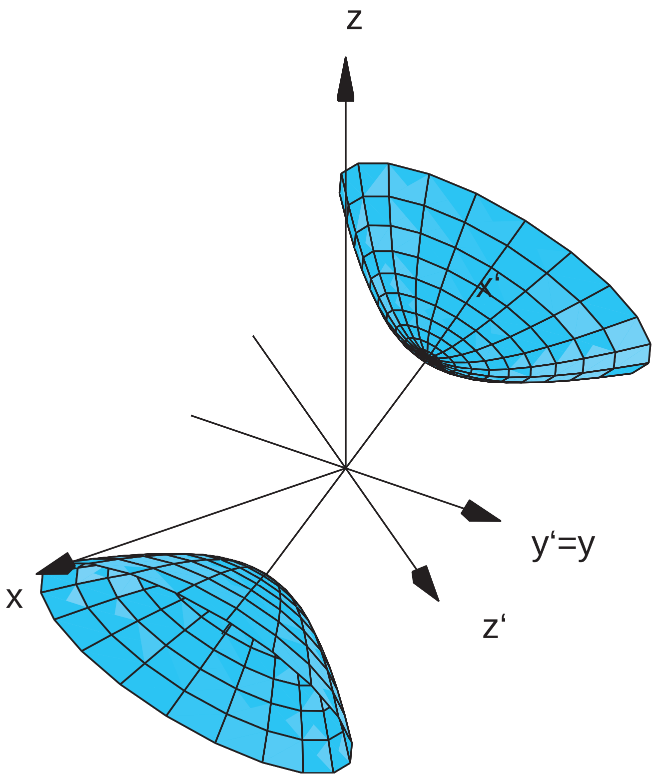
```
>> syms x1 y1 z1
>> expr=a1*x1^2+b1*y1^2+c1*z1^2+150
```

$$-25\, {x_1}^2 + 30\, {y_1}^2 + 50\, {z_1}^2 + 150$$

```
>> expr=-expr/150
```

$$1/6\, {x_1}^2 - 1/5\, {y_1}^2 - 1/3\, {z_1}^2 - 1$$

```
>> hiperbo2x(sqrt(6),sqrt(5),sqrt(3),P)
```


z
x'
y'=y
x
z'

7.3.2.
```
>> a=144;b=100;c=81;d=0;e=-216;f=0;
>> A=sym([a,d/2,e/2;d/2,b,f/2;e/2,f/2,c])
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans = [   0][ 100][ 225]
>> a1=0;b1=100;c1=225;
>> escalona(A-a1*eye(3))
[  144,    0, -108]
[    0,  100,    0]
[ -108,    0,   81]
ans =
[    1,    0, -3/4]
[    0,    1,    0]
[    0,    0,    0]
```
A solução geral de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(3\alpha, 0, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(3\alpha, 0, 4\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/5$, então podemos tomar $U_1 = (3/5, 0, 4/5)$.

```
>> escalona(A-b1*eye(3))
[   44,    0, -108]
[    0,    0,    0]
[ -108,    0,  -19]
ans =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0]
```

A solução geral de $(A - b_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_2 = \{(0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(0, \alpha, 0)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1$, então podemos tomar $U_2 = (0, 1, 0)$.

```
>> U1=[3/5,0,4/5];;
>> U2=[0,1,0];
>> P=sym([U1',U2',pv(U1',U2')])
```

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

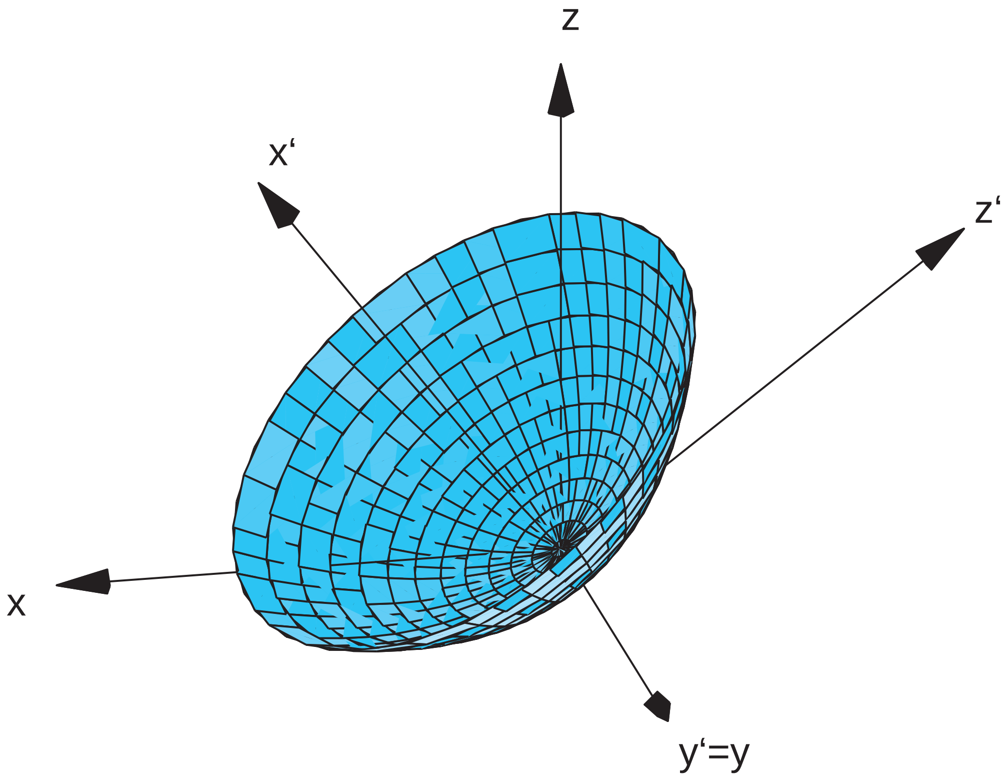
```
EDU≫ K=[-540,0,-720];
EDU≫ K*P
ans = [ -900,    0,    0]
>> expr=a1*x1^2+b1*y1^2+c1*z1^2-900*x1
```

$$100\,{y_1}^2 + 225\,{z_1}^2 - 900\,x_1$$

```
>> expr=expr/900
```

$$1/9\,{y_1}^2 + 1/4\,{z_1}^2 - x_1$$

```
>> parabo1x(1,3,2,P)
```


z
x‘
z‘
x
y‘=y

7.3.3.
```
>> a=0;b=0;c=0;d=2;e=0;f=0;
>> A=sym([a,d/2,e/2;d/2,b,f/2;e/2,f/2,c])
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans = [  0][  1][ -1]
>> a1=0;b1=1;c1=-1;
>> escalona(A-a1*eye(3))
[ 0, 1, 0]
[ 1, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
ans =
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0]
```

A solução geral de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(0,0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(0,0,\alpha)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1$, então podemos tomar $U_1 = (0,0,1)$.

```
>> escalona(A-b1*eye(3))
[ -1,  1,  0]
[  1, -1,  0]
[  0,  0, -1]
ans =
[  1, -1,  0]
[  0,  0,  1]
[  0,  0,  0]
```

A solução geral de $(A - b_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha,\alpha,0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Como $||(\alpha,\alpha,0)|| = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$, então podemos tomar $U_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

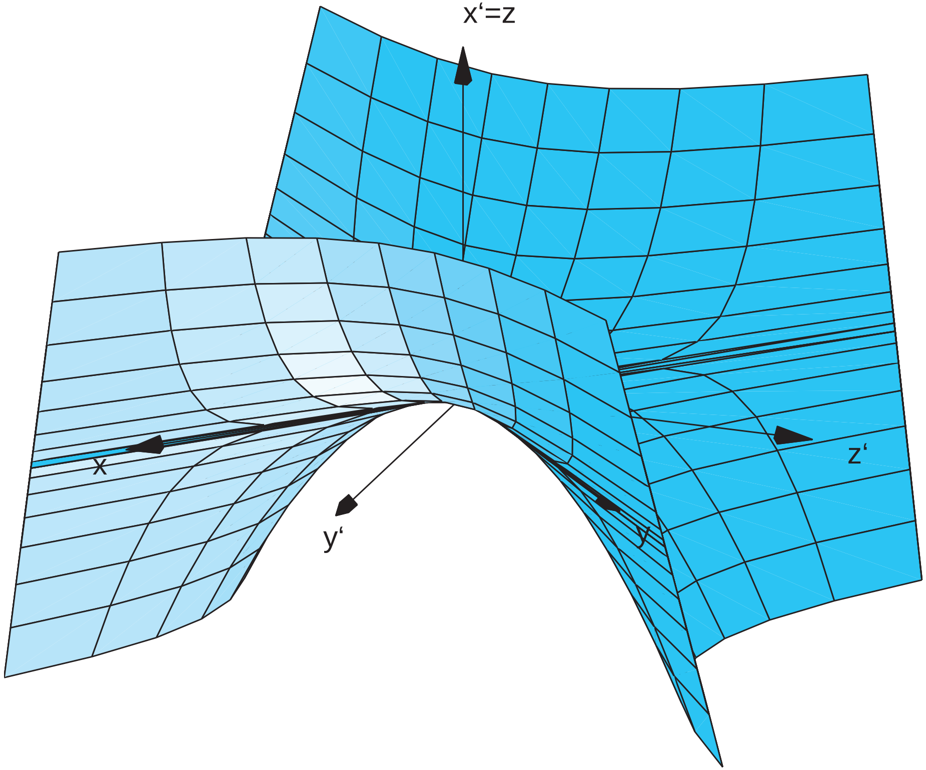
```
>> U1=[0,0,1];
>> U2=[1/sqrt(2),1/sqrt(2),0];
>> P=sym([U1',U2',pv(U1',U2')])
```

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>> K=[0,0,1];
>> K*P
ans = [ 1, 0, 0]
>> expr=a1*x1^2+b1*y1^2+c1*z1^2+x1
```

$${y_1}^2 - {z_1}^2 + x_1$$

```
>> hiperbo2x(sqrt(6),sqrt(5),sqrt(3),P)
```


x‘=z
x
y‘
y
z‘

7.3.4.
```
>> a=0;b=0;c=0;d=2;e=2;f=2;
>> A=sym([a,d/2,e/2;d/2,b,f/2;e/2,f/2,c])
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans = [  2][ -1][ -1]
>> a1=-1;b1=-1;c1=2;
>> escalona(A-a1*eye(3))
[ 1, 1, 1]
[ 1, 1, 1]
[ 1, 1, 1]
ans =
[ 1, 1, 1]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
```
A solução geral de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$$

Assim, toda solução de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é combinação linear de $V_1 = (-1, 1, 0)$ e $V_2 = (-1, 0, 1)$. Sejam $W_1 = V_1$ e $W_2 = V_2 - \mathrm{proj}_{W_1} V_2$. Podemos tomar $U_1 = W_1/||W_1||$ e $U_2 = W_2/||W_2||$.

```
>> V1=[-1,1,0];V2=[-1,0,1];
>> W1=V1,W2=V2-proj(W1,V2)
W1 =[   -1,    1,    0]
W2 =[ -1/2, -1/2,    1]
>> U1=W1/no(W1),U2=W2/no(W2)
```

$$U_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$U_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$$

```
>> P=sym([U1',U2',pv(U1',U2')])
```

$$P = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/2 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6}/3 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
>> K=[-6,-6,-4];
>> K1=K*P
```

$$K_1 = [0, 2\sqrt{2}/\sqrt{3}, -16\sqrt{3}]$$

```
>> g1=K1(1);h1=K1(2);i1=K1(3);
>> expr=a1*x1^2+b1*y1^2+c1*z1^2+g1*x1+h1*y1+i1*z1-9
```

$$-{x_1}^2 - {y_1}^2 + 2\,{z_1}^2 + 2/3\,\sqrt{6}y_1 - 16/3\,\sqrt{3}z_1 - 9$$

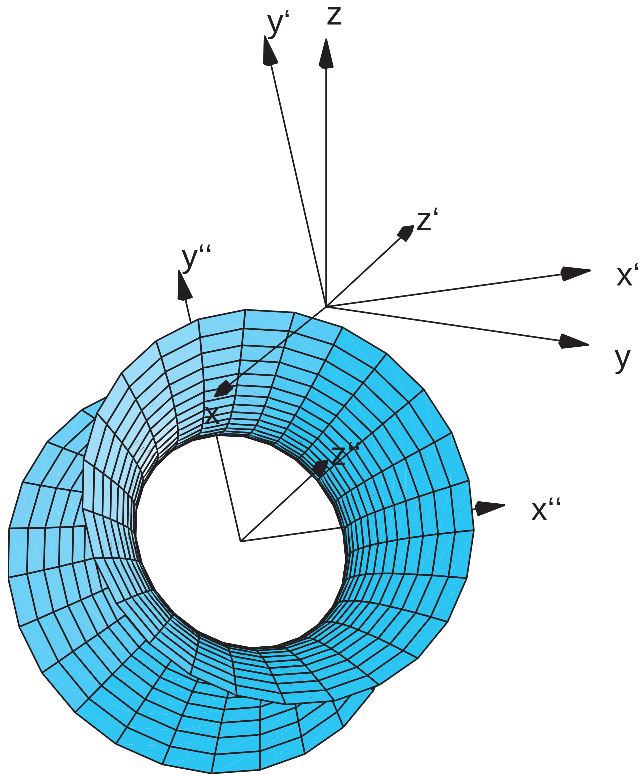
```
>> syms x2 y2 z2
>> X1=[x1;y1;z1]; X2=[x2;y2;z2];
>> X0=[g1/(2*a1);h1/(2*b1);i1/(2*c1)]
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{6}/3 \\ -4/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
>> expr=subst(expr,X1,X2-X0)
```

$$-{x_2}^2 - {y_2}^2 + 2\,{z_2}^2 + 1$$

```
>> hiperbo1z(1,1,1/sqrt(2),P,X0)
```


y‘
z
z‘
y‘‘
x‘
y
x
z‘‘
x‘‘

7.3.5.
```
>> a=7;b=7;c=10;d=-2;e=-4;f=4;
>> A=sym([a,d/2,e/2;d/2,b,f/2;e/2,f/2,c])
>> solve(det(A-x*eye(3)))
ans = [ 12][  6][  6]
>> a1=6;b1=6;c1=12;
>> escalona(A-a1*eye(3))
[  1, -1, -2]
[ -1,  1,  2]
[ -2,  2,  4]
ans =
[  1, -1, -2]
[  0,  0,  0]
[  0,  0,  0]
```

A solução geral de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é

$$\mathbb{W}_1 = \{(2\alpha + \beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$(2\alpha + \beta, \beta, \alpha) = \alpha(2, 0, 1) + \beta(1, 1, 0)$$

Assim, toda solução de $(A - a_1 I_3)X = \bar{0}$ é combinação linear de $V_1 = (2, 0, 1)$ e $V_2 = (1, 1, 0)$. Sejam $W_1 = V_1$ e $W_2 = V_2 - \mathrm{proj}_{W_1} V_2$. Podemos tomar $U_1 = W_1/||W_1||$ e $U_2 = W_2/||W_2||$.

```
>> V1=[2,0,1];V2=[1,1,0];
>> W1=V1,W2=V2-proj(W1,V2)
W1 =[2,0,1]
W2 =[  1/5,    1, -2/5]
>> U1=W1/no(W1),U2=W2/no(W2)
```

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{30} & \sqrt{5}/\sqrt{6} & -\sqrt{6}/(3\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

```
>> P=sym([U1',U2',pv(U1',U2')])
```

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{5}/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & -\sqrt{6}/(3\sqrt{5}) & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

```
>> K=[-12,12,60];
>> K1=K*P
```

$$K_1 = [36/\sqrt{5}, -12\sqrt{6}/\sqrt{5}, 24\sqrt{6}]$$

```
>> g1=K1(1);h1=K1(2);i1=K1(3);
>> expr=a1*x1^2+b1*y1^2+c1*z1^2+g1*x1+h1*y1+i1*z1-24
```

$$6\,{x_1}^2 + 6\,{y_1}^2 + 12\,{z_1}^2 + \tfrac{36}{5}\,\sqrt{5}x_1 - \tfrac{12}{5}\,\sqrt{6}\sqrt{5}y_1 + 24\,\sqrt{6}z_1 - 24$$

```
>> X0=[g1/(2*a1);h1/(2*b1);i1/(2*c1)]
```

$$\begin{bmatrix} 3/5\,\sqrt{5} \\ -1/5\,\sqrt{6}\sqrt{5} \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

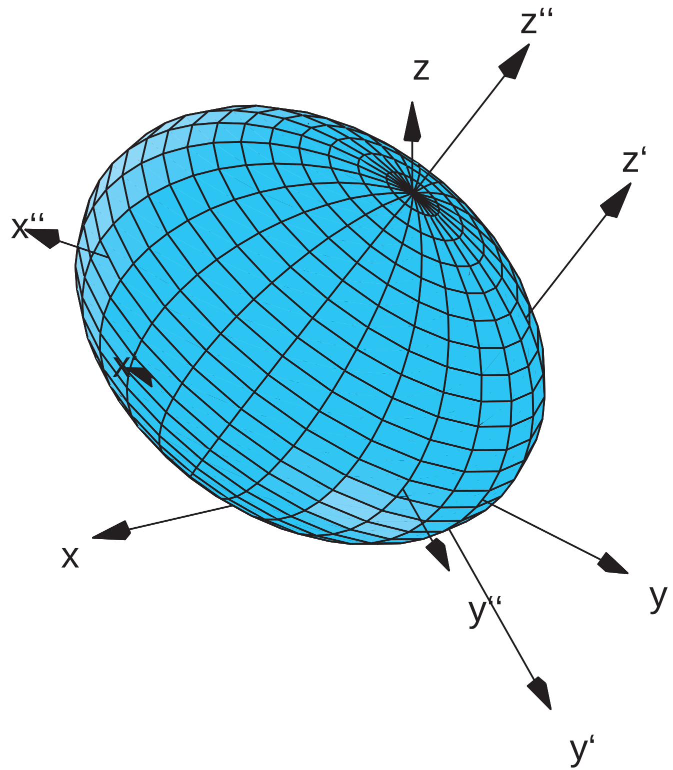
```
>> expr=subst(expr,X1,X2-X0)
```

$$6\,{x_2}^2 + 6\,{y_2}^2 + 12\,{z_2}^2 - 114$$

```
>> expr=expr/114
```

$$1/19\,{x_2}^2 + 1/19\,{y_2}^2 + 2/19\,{z_2}^2 - 1$$

```
>> elipso(sqrt(19),sqrt(19),sqrt(19/2),P,X0)
```


z''
z
z'
x''
x'
x
y
y''
y'

Bibliografia

[1] Howard Anton e Chris Rorres: *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, São Paulo, 8a. edição, 2001.

[2] Paulo Boulos e Ivan de C. e Oliveira: *Introdução à Geometria Analítica no Espaço*. Makron Books, São Paulo, 1997.

[3] Paulo Boulos e Ivan de C. e Oliveira: *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. Makron Books, São Paulo, 3a. edição, 2005.

[4] Frederico F. C., filho: *Introdução ao MATLAB*. Departamento de Ciência da Computação - UFMG, Belo Horizonte, Fevereiro de 2000.

[5] Alésio de Caroli, Carlos A. Callioli e Miguel O. Feitosa: *Matrizes, Vetores, Geometria Analítica*. Nobel, São Paulo, 1976.

[6] Emília Giraldes, Vitor H. Fernandes e Maria P. M Smith: *Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica*. Mc Graw Hill, Lisboa, 1995.

[7] Stanley I. Grossman: *Elementary Linear Algebra*. Saunders College Publishing, New York, 5a. edição, 1994.

[8] David R. Hill e David E. Zitarelli: *Linear Algebra Labs with MATLAB*. Macmillan Publishing Company, New York, 1994.

[9] Édson Durão Júdice: *Elementos de Álgebra Vetorial*. Sistema Pitágoras de Ensino, Belo Horizonte, 1976.

[10] Bernard Kolman e David R. Hill: *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*. LTC, Rio de Janeiro, 8a. edição, 2008.

[11] David C. Lay: *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edição, 1999.

[12] Charles H. Lehmann: *Geometria Analítica*. Editora Globo, Porto Alegre, 1974.

[13] Louis Leithold: *Cálculo com geometria analítica, Vol. 2*. Ed. Harbra Ltda., São Paulo, 3a. edição, 1994.

[14] Steven J. Leon: *Álgebra Linear com Aplicações*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 5a. edição, 1998.

[15] Elon L. Lima: *Coordenadas no Espaço*. SBM, Rio de Janeiro, 1993.

[16] Elon L. Lima: *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[17] Mathworks Inc.: *Student Edition of MATLAB Version 5 for Windows*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[18] Ben Noble e James W. Daniel: *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3a. edição, 1988.

[19] Genésio L. dos Reis e Valdir V. da Silva: *Geometria Analítica*. LTC, São Paulo, 2a. edição, 1996.

[20] Nathan M. dos Santos: *Vetores e Matrizes*. Thomson, São Paulo, 4a. edição, 2007.

[21] Reginaldo J. Santos: *Introdução à Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2010.

[22] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle: *Geometria Analítica*. Makron Books, São Paulo, 2a. edição, 1987.

[23] James Stewart: *Cálculo, Vol. 2*. Pioneira, São Paulo, 4a. edição, 2001.

[24] Israel Vainsencher: *Notas de Geometria Analítica Elementar*. Departamento de Matemática-UFPe, Recife, 2001.

[25] Paulo Winterle: *Vetores e Geometria Analítica*. Makron Books, São Paulo, 2a. edição, 2000.

Índice Alfabético