Elementos da Análise

Mirian Buss Gonçalves
Daniel Gonçalves

2ª Edição
Florianópolis, 2012

Laboratório de Novas Tecnologias - LANTEC/CED
Coordenação Pedagógica das Licenciaturas a Distância UFSC/CED/CFM
Coordenação Geral: Roseli Zen Cerny
Núcleo de Formação: Marina Bazzo de Espíndola
Núcleo de Pesquisa e Avaliação: Andréa Brandão Lapa
Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais: Juliana Cristina Faggion Bergmann

Design Gráfico
Coordenação: Cíntia Cardoso
Projeto Gráfico Original: Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart Braga, Natal Anacleto Chicca Junior
Redesenho do Projeto Gráfico: Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira
Diagramação: Cíntia Cardoso, João Paulo Battisti de Abreu, Natália Barreira
Ilustrações: Cristiane Amaral, Kallani Bonelli, Aline Correa
Capa: xxxxxx

Design Instrucional
Coordenação: xxxxx
Design Instrucional: Adriano Luiz dos Santos Né, Nicélio José Gesser

Revisão Gramatical: Contextuar

Ficha Catalográfica

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da UFSC

Sumário

Apresentação

Caro Leitor,

Seja bem-vindo ao estudo de Análise Matemática.

Provavelmente esta é uma das últimas disciplinas que faltam para você se graduar em Matemática. Os conteúdos apresentados neste livro aprofundam o seu conhecimento anterior e têm como principal finalidade ampliar sua intuição matemática e seu raciocínio lógico.

Para isso, você será introduzido na linguagem formal da Matemática, onde os conceitos, proposições etc. são tratados com formalismo e rigor. No entanto, a linguagem matemática clara e precisa que vamos usar não será carregada em demasia, de forma a não prejudicar o desenvolvimento das ideias e o próprio aprendizado.

Sem descuidar do rigor matemático, procuramos apresentar os conteúdos de uma maneira envolvente, de forma a lhe propiciar uma aprendizagem autônoma e agradável. Caberá a você a busca do entendimento dos conceitos, das demonstrações, bem como a resolução dos exercícios propostos.

Os conceitos explorados são: conjuntos enumeráveis e revisão de supremo e ínfimo; noções básicas de topologia em espaços métricos, com ênfase para os espaços Euclidianos; convergência de sequências em espaços métricos, explorando alguns resultados relevantes em $\mathbb{R}$; continuidade, destacando-se os teoremas mais importantes utilizados no estudo de Cálculo.

A fim de tornar a notação utilizada mais leve e simples, inicialmente apresentamos os conceitos no contexto de um espaço métrico geral. No entanto, no decorrer de todo o texto, a maior parte dos exemplos e aplicações é desenvolvida nos espaços Euclidianos $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$.

Mesmo que os conteúdos possam lhe parecer difíceis em alguns momentos, enfrente o desafio. Estude com afinco e dedicação. Acreditamos que esta disciplina vai lhe proporcionar uma visão mais abrangente da Matemática, lhe abrindo horizontes como professor desta bela e desafiadora área do conhecimento humano.

Se você gostar do estudo de Análise, você é um forte candidato a seguir uma carreira acadêmica em Matemática, cursando um mestrado e, quiçá, um doutorado.

Quando finalizar a disciplina, guarde seu livro, pois ele ainda poderá lhe ser útil em seu caminho profissional.

Mirian Buss Gonçalves
Daniel Gonçalves

Capítulo 1

Cardinalidade e o corpo dos números reais

1 Cardinalidade e o corpo dos números reais

Nesta unidade você irá se familiarizar com o conceito de enumerabilidade de um conjunto, e terá a oportunidade de rever algumas propriedades importantes dos números reais, as quais serão fundamentais nos capítulos que seguem. Em particular, você poderá revisar a noção de supremo e ínfimo de um conjunto limitado.

1.1 Introdução

David Hilbert nasceu em Konigsberg em 1862 e recebeu seu Ph.D. da universidade dessa cidade em 1885, onde lecionou até 1894. No período de 1895 até 1930 foi professor da Universidade de Gottingen, cidade onde faleceu em 1943.

Antes de iniciar o seu estudo, leia a situação a seguir, conhecida como o "Hotel de Hilbert":

> "Era uma vez um hotel com um número infinito de quartos. Todos estavam ocupados. Chegou um novo hóspede que necessitava muito de hospedagem. Como o gerente poderia resolver seu problema?"

A primeira idéia que vem em nossa mente é colocar o novo hóspede num dos quartos já ocupados. Pode não ser uma idéia brilhante, mas resolveria a situação, se o antigo hóspede estivesse disposto a compartilhar o seu quarto.

Veja só que "linda solução" podemos ter pelo fato de termos um número infinito de quartos.

Numeramos os quartos do hotel

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots.$$

Pegamos, então, o hóspede do primeiro quarto e o passamos para o segundo. O do segundo quarto, passamos para o terceiro. Procedemos assim sucessivamente.

Como resultado, todos os hóspedes ficam acomodados nos quartos subsequentes e o primeiro quarto ficará livre para acomodar o hóspede recém chegado.

O que você achou da solução?

A situação analisada ilustra a idéia de conjunto infinito enumerável, isto é, de um conjunto infinito, cujos elementos podem ser colocados na forma de uma lista.

Você pode perguntar:

Posso colocar em forma de uma lista todos os elementos de um conjunto infinito?

Vamos ver que nem sempre isso é possível. Os conjuntos cujos elementos não podem ser dispostos em sucessão (não podem ser listados) são chamados de conjuntos não enumeráveis.

1.2 Conjuntos finitos e infinitos enumeráveis

Vamos considerar os conjuntos:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} =$ conjunto dos naturais

$\mathrm{I}_n = \{1, 2, \ldots, n\} =$ conjunto dos naturais de 1 a n

Com base nestes dois conjuntos temos a noção de conjunto finito e infinito enumerável.

A idéia intuitiva que temos de um conjunto finito é de que podemos contar seus elementos. Isso é o mesmo que colocar seus elementos em correspondência um a um com os elementos de I_n, para algum n.

E quando um conjunto não é finito?

Na história da humanidade, houve muita dificuldade para compreender e aceitar grandezas infinitas. As primeiras referências vieram com a religião, em expressões do tipo "Deus é infinitamente bom".

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, filho de pais dinamarqueses, nasceu em S. Petersburgo, Rússia, em 1845. Estudou na Suíça e na Alemanha e desenvolveu sua carreira na Universidade de Halle. Faleceu no hospital de doenças mentais de Halle, em 1918.

No campo da Matemática, um grande pesquisador, chamado Cantor, desenvolveu um belo trabalho sobre conjuntos infinitos, introduzindo o conceito de cardinalidade. Ele mostrou que há diferentes tipos de conjuntos infinitos, não sendo possível, em alguns deles, colocar seus elementos em sucessão (na forma de lista). Surgiram assim, os conceitos de conjunto enumerável e de conjunto não enumerável.

Intuitivamente, um conjunto é enumerável se seus elementos podem ser colocados numa lista de modo que qualquer elemento do conjunto pode ser alcançado se avançarmos o suficiente na lista.

Temos as seguintes definições.

Definições.

1.1 Um conjunto X é dito finito se é vazio ou se, para algum n, existe uma bijeção $f : \mathrm{I}_n \to X$.

No último caso, dizemos que X tem cardinalidade n, isto é, X tem n elementos.

1.2 Se X não for finito, dizemos que X é infinito.

1.3 Um conjunto infinito X é dito enumerável se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

Exemplos.

1.1 Seja $X = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } |5x - 3| = 7\}$. Qual a cardinalidade de X?

Temos que os elementos de X são as soluções da equação $|5x - 3| = 7$, ou seja, $X = \left\{-\frac{4}{5}, 2\right\}$. Logo, X tem 2 elementos. A função

$$\begin{aligned} f &: \mathrm{I}_2 \to X \\ 1 &\to -\frac{4}{5} \\ 2 &\to 2 \end{aligned}$$

é uma bijeção.

1.2 O conjunto I dos números inteiros positivos ímpares é enumerável.

De fato, $f:\mathbb{N}\rightarrow \mathrm{I};\, f(n)=2n-1$ é uma bijeção, como você pode visualizar no quadro que segue:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \ldots \end{array}$$

Nota: Subconjuntos infinitos de conjuntos enumeráveis são enumeráveis.

1.3 O conjunto dos números inteiros Z é enumerável.

Vamos resgatar a idéia intuitiva. Podemos dispor todos os números inteiros na forma de uma lista, como segue:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5,... .

Qualquer número inteiro, positivo ou negativo, será alcançado se avançarmos o suficiente nessa lista.

Existem outros conjuntos enumeráveis?

A resposta é sim, sendo o conjunto dos racionais o exemplo mais importante (e surpreendente). As proposições que seguem indicam um caminho para provar esse e outros resultados interessantes.

Proposição 1.1. Se $f:X\rightarrow Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é finito ou enumerável.

Prova: Como Y é enumerável, existe uma bijeção $g:Y\rightarrow \mathbb{N}$. Consideremos a função composta $h=g\circ f:X\rightarrow \mathrm{N}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "h=g\circ f"'] & Y \arrow[r, bend left, "g"] & \mathrm{N} \end{tikzcd}$$

Como f e g são injetivas, o mesmo ocorre com h. Portanto,

$$h : X \to h(X) \subset \mathbb{N}$$

é uma bijeção.

Como $h(X) \subset \mathbb{N}$, ele é finito ou enumerável. Logo, X é finito ou enumerável.

■

Proposição 1.2. Seja X enumerável. Se $f : X \to Y$ é sobrejetiva, então Y é finito ou enumerável.

Prova: De maneira similar a proposição anterior note que como X é enumerável existe uma bijeção $g : \mathbb{N} \to X$ e portanto a função composta $f \circ g : \mathbb{N} \to Y$ é sobrejetiva. Agora, para todo $y \in Y$ defina $h(y)$ como o menor elemento em $(f \circ g)^{-1}(y)$. Note que $h : Y \to \mathbb{N}$ esta bem definida, pois todo subconjunto dos naturais possui um menor elemento. Ainda, h é injetiva. Logo, pela proposição anterior, temos que Y é enumerável.

■

Vamos relembrar a seguir um Teorema da Álgebra que é utilizado para provar que o produto cartesiano de $\mathbb{N}$ por $\mathbb{N}$ é enumerável. Como ele é um resultado preliminar necessário para essa prova o introduzimos como um lema.

Lema (Teorema da Álgebra). Todo número natural se decompõe de maneira única como produto de fatores primos.

Proposição 1.3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Prova: Definimos

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(n,\ m) \to 2^n 3^m$$

Temos que f é injetiva, pois

$$2^{n_1} 3^{m_1} = 2^{n_2} 3^{m_2} \Rightarrow (n_1 m_1) = (n_2 m_2),$$

pelo lema anterior.

Pela proposição 3 segue que $N \times N$ é enumerável.

■

Proposição 1.4. Se X e Y são enumeráveis, então $X \times Y$ é enumerável.

Prova: Como X e Y são enumeráveis, existem $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$ bijeções.

Definimos

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$$
$$h(x,\ y) = (f(x),\ g(y))$$

Então h é sobrejetiva. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, pela proposição 1.2, temos que $X \times Y$ é enumerável.

■

Exercício Proposto 1. Prove a proposição 1.4 acima utilizando a proposição 1.1.

Corolário. O conjunto Q dos números racionais é enumerável.

Prova: Seja Z^* o conjunto dos números inteiros não nulos, isto é, $Z^* = Z - \{0\}$. Então Z^* é enumerável. Pela proposição 6, $Z \times Z^*$ é enumerável.

Definimos

$$f : Z \times Z^* \to Q$$
$$(m,\ n) \to \frac{m}{n}$$

Temos que f é sobrejetiva (pela própria definição de Q). Como $Z \times Z^*$ é enumerável, pela proposição 4, concluímos que Q é enumerável.

■

Resgatando a idéia intuitiva de conjunto enumerável, você pode se perguntar: Como listar os elementos de Q?

Vamos exemplificar com os racionais positivos, Q^+. No quadro que segue, ilustramos o procedimento. A lista é formada como indicado pelas setas.

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\[6pt]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\[6pt]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\[6pt]
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots
\end{array}$$

Observe que agrupamos os elementos cuja soma do numerador com o denominador é a mesma, eliminando os elementos repetidos. Isso resultará na lista

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad 2 \quad \frac{1}{3} \quad 3 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} \quad 4 \ \ldots,$$

que contém todos os racionais positivos.

Proposição 1.5. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_m, \ldots$ conjuntos enumeráveis. A união $X = \cup X_m$ é enumerável.

Prova: Como X_m é enumerável, podemos considerar os elementos de X_m como termos de uma sucessão $x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots$.

Formamos o quadro

$$\begin{array}{ccccc}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Este quadro contém todos os elementos de X. Como as setas indicam, seus elementos podem ser dispostos em sucessão:

$$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, \ldots$$

Mais formalmente, note que a função $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\cup X_n$, dada por $f((n,m))=x_{nm}$, é uma bijeção, e portanto $\cup X_n$ é enumerável.

■

Notas:
1) A união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.
2) O produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.
3) O resultado anterior não é válido para produtos infinitos.

1.3 Conjuntos não enumeráveis

Segundo Cantor, dois conjuntos, A e B tem a mesma cardinalidade quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e os elementos de B. Isso equivale a dizer que existe uma bijeção entre A e B.
Vimos que o conjunto dos números racionais é enumerável.

Não seriam, então, todos os conjuntos infinitos enumeráveis?

Em 1874 Cantor surpreendeu os matemáticos de sua época com uma descoberta muito importante. Ele mostrou que o conjunto dos números reais tem cardinalidade diferente da do conjunto dos números naturais.

Definição 1.4. Todo conjunto infinito que não é enumerável, é dito **não enumerável.**

Proposição 1.6. O conjunto dos números reais é não enumerável.

Prova: Vamos mostrar que o conjunto dos números reais entre 0 e 1 é não enumerável.

Para isso usaremos a representação decimal infinita, que é única para todo número real. Se você não lembrar leia a seção..... do livro Análise Matemática para Licenciatura, de Geraldo Ávila.

Por exemplo,

0,397=0,396999...

0,5=0,4999...

Vamos supor que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca dos números reais do intervalo (0, 1) com os números naturais.

Podemos, então, escrever esses números em sucessão, $x_1, x_2, x_3, \ldots$, conforme o quadro a seguir:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0, x_{11}\, x_{12}\, x_{13}\, x_{14} \ldots \\ x_2 = 0, x_{21}\, x_{22}\, x_{23}\, x_{24} \ldots \\ x_3 = 0, x_{31}\, x_{32}\, x_{33}\, x_{34} \ldots \\ \quad\vdots \\ x_n = 0, x_{n1}\, x_{n2}\, x_{n3}\, x_{n4} \ldots \\ \quad\vdots \end{array}$$

onde x_{ij} são algarismos de 0 a 9.

Vamos, agora, estabelecer uma contradição. Vamos fazer isso usando o "processo diagonal de Cantor". Construímos um número diferente de todos os listados. Como?

Trocando os algarismos da diagonal. Assim, esse novo número será diferente de x_1, na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda casa decimal, diferente de x_3 na terceira casa decimal e assim sucessivamente.

Dessa forma chegamos a um absurdo. Concluímos, então, que o conjunto dos números reais entre 0 e 1 é não enumerável.

■

Nota: O conjunto dos números reais tem a mesma cardinalidade do intervalo (0, 1). De fato, a função $y = \operatorname{tg}(\pi x - \pi/2)$ é uma bijeção do intervalo (0, 1) na reta toda $(-\infty, \infty)$. Você pode usar um software gráfico para visualizar esta bijeção.

Veja que o resultado acima nos remete a uma reflexão sobre os números irracionais, que voltarão a ser discutidos na próxima unidade.

Exercícios Propostos

2) Os números naturais podem ser escritos como a união dos naturais ímpares e dos naturais pares:

$$\mathrm{N} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \cup \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Esses dois conjuntos são disjuntos e infinitos.

Dado um número natural $p > 2$, atribua alguns valores para p, e mostre que existem conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$, infinitos e disjuntos, tais que

$$\mathrm{N} = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$$

3) Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Mostre que um desses conjuntos é finito se e somente se o outro também é finito.

4) Usando a definição, prove que são enumeráveis:

a) P= Conjunto dos inteiros pares

b) I= Conjunto dos inteiros negativos ímpares

c) Qp= Conjunto dos racionais com denominador p.

5) Sejam X finito e Y enumerável.

a) Existe uma função injetiva $f : X \to Y$?

b) Existe uma função sobrejetiva $g : X \to Y$?

Justifique.

6) Mostre que o conjunto de todas as sucessões cujos termos são os algarismos 0 e 1 é não enumerável.

1.4 Algumas Propriedades dos Números Reais

Nesta seção você terá a oportunidade de revisar algumas propriedades dos números reais, que denotamos por $\mathbb{R}$, as quais serão utilizadas no decorrer do seu aprendizado.

Definição 1.5. Seja $x \in \mathbb{R}$. O módulo, ou valor absoluto, de x é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Nota: O módulo de x também pode ser definido por uma das seguintes expressões:

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad \text{ou} \quad |x| = \sqrt{x^2}.$$

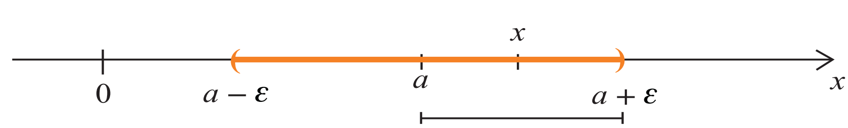
É importante você já se familiarizar com as inequações a seguir, envolvendo módulo, pois inequações desse tipo serão de vital importância nas seções seguintes.

Exemplo. Determinar os valores de x tais que $|x-a| < \varepsilon$.

Temos:

$$\begin{aligned} |x-a| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < x - a < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon). \end{aligned}$$

Podemos representar graficamente:



A solução é constituída pelos elementos x pertencentes a um intervalo aberto de centro em a e raio ε.

Também podemos dizer que a solução é constituída pelos elementos x tais que a distância de x até a é menor que ε. Neste caso, estamos interpretando $|x-a|$ como a distância de x até a.

Propriedades: Sejam um corpo ordenado e $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$. Então:

Mod.1: $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade triangular).

Mod.2: $|xy| = |x||y|$.

Mod.3: $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Mod.4: $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.

Prova:

Mod.1: Temos as seguintes desigualdades:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

Adicionando as desigualdades, vem:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|).$$

Portanto,

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Mod.2: Temos,

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2 y^2.$$

Portanto,

$$|xy| = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|.$$

Mod.3: A primeira desigualdade dessa propriedade é trivial, pois $a \leq |a|,\ \forall a$.

Vejamos, então, a segunda desigualdade:

Pela propriedade Mod.1, temos que:

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$
$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|.$$

Trabalhando com essas inequações, obtemos:

$$\begin{cases} |x| - |y| \leq |x - y| \\ |y| - |x| \leq |y - x| \end{cases}$$

Multiplicando a segunda inequação por -1, vem:

$$\begin{cases} |x| - |y| \leq |x - y| \\ |x| - |y| \geq -|y - x| = -|x - y|. \end{cases}$$

Portanto,

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \text{ e, assim, } ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Nota: A prova da propriedade Mod.4 é direta, sendo deixada como exercício.

1.5 Supremo e Ínfimo

Nesta seção nosso objetivo principal é introduzir os conceitos de supremo e ínfimo em $\mathbb{R}$. Como ambos são similares, vamos centrar mais nossa atenção na noção de supremo.

Vamos iniciar falando de conjuntos limitados. Temos a seguinte definição:

Definição 1.6. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$.

a) Dizemos que X é limitado superiormente se $\exists\, b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso $X \subset (-\infty, b]$ e b é chamado uma cota superior de X.

b) Dizemos que X é limitado inferiormente se $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$ para todo $x \in X$. Nesse caso $X \subset [a, +\infty)$ e a é chamado uma cota inferior de X.

c) Se X é limitado superior e inferiormente, dizemos que X é limitado.

Nota: X é limitado $\Leftrightarrow$ existem $a,\ b \in \mathbb{R}$ tais que $X \subset [a,\ b]$.

Exercícios Resolvidos

Verificar quais dos seguintes conjuntos são limitados inferiormente e/ou superiormente.

a) $X = \{1, 3, 5, 7\}$

b) $X = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathrm{N}\right\}$

c) $X = \{-3n,\ n \in \mathrm{N}\}$

Solução:

a) Temos que 1 é uma cota inferior de X. Logo, X é limitado inferiormente. Temos, também, que 7 é uma cota superior de X. Logo X é limitado superiormente. Concluímos, assim, que X é um conjunto limitado.

b) Podemos escrever

$$X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

Temos que $0 \le \frac{1}{n} \le 1,\ \forall n \in \mathrm{N}$. Logo, X é um conjunto limitado (0 é uma cota inferior e 1 é uma cota superior).

c) Temos,

$$X = \{-3, -6, -9, -12, \ldots, -3n, \ldots\}.$$

Podemos ver que -3 é uma cota superior de X. Portanto, X é limitado superiormente.

O conjunto X não tem cota inferior. Ele não é limitado inferiormente. Concluímos que o conjunto X não é limitado.

Proposição 1.7. Em $\mathbb{R}$ são equivalentes:

i) O conjunto dos números naturais não é limitado superiormente.

ii) Dados $a,\ b \in \mathbb{R},\ \ a > 0,\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $an > b$.

iii) Dado qualquer $a > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

Prova:

i) $\Rightarrow$ ii) Sejam $a,\ b \in \mathbb{N},\ \ a > 0$. Como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b}{a}$. Segue que $an > b$.

ii) $\Rightarrow$ *iii*) Em ii) tomamos $a > 0$ e $b = 1$. Temos que $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $an > b$. Logo, $\frac{1}{n} < a$.

iii) $\Rightarrow$ i) Seja $b \in \mathbb{R},\ \ b > 0$. Então $\frac{1}{b} > 0$. Por iii) $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{b}$. Logo, $n > b$ e, dessa forma, nenhum elemento de $\mathbb{R}$ é cota superior de $\mathbb{N}$.

Nota: Retome claramente em sua mente a noção de cota superior de um conjunto. Procure visualizar geometricamente. Isso é fundamental para você compreender o conceito de supremo de um conjunto, que vamos definir agora.

Definição 1.7. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ é dito **supremo** de *X*, se valem:

S.1 - Para qualquer $x \in X$, tem-se $x \leq b$.

S.2 – Se $c \in \mathbb{R}$ e $x \leq c,\ \ \forall x \in X$, então $b \leq c$.

Em outras palavras, podemos dizer que o supremo de *X* é a menor das cotas superiores de *X*.

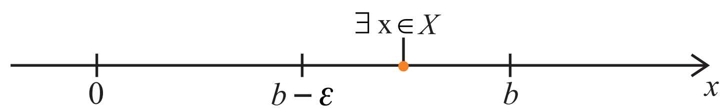
Denotamos: $b = \sup X$.

Nota: Uma outra caracterização muito útil do supremo é dada a seguir.

Considere qualquer número positivo ε muito pequeno. Temos,

$$b = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} \text{S.1' - } \forall x \in X,\ x \leq b \\ \text{S.2' - } \forall \varepsilon > 0, \exists\, x \in X \text{ tal que } b - \varepsilon < x \leq b. \end{cases}$$

Geometricamente podemos visualizar esta caracterização do supremo:



Em linguagem coloquial as condições S.1′ e S.2′ são dadas por:

S.1′ – b é cota superior de X.

S.2′ – Qualquer número menor que b não é cota superior de X.

Exercício Proposto 7. Mostre que as duas caracterizações de supremo dadas acima são equivalentes.

Como você definiria o ínfimo de um conjunto limitado inferiormente?

A definição de ínfimo é análoga à de supremo. Vejamos:

Definição 1.8. Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito ínfimo de Y, se:

I.1 - Para qualquer $y \in Y$, tem-se $a \leq y$.

I.2 - Se $c \in \mathbb{R}$ e $c \leq y,\ \forall y \in Y$, então $c \leq a$.

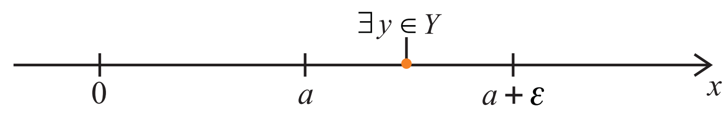
Dessa forma, o ínfimo de Y é a maior das cotas inferiores de Y.

Denotamos: $a = \inf Y$

Também podemos escrever:

$$a = \inf Y \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I.1' - } \forall y \in Y,\ a \leq y \\ \text{I.2' - } \forall \varepsilon > 0, \exists\, y \in Y \text{ tal que } a \leq y < a + \varepsilon. \end{cases}$$

Geometricamente,



O supremo e o ínfimo de um conjunto X são sempre elementos de X?

A resposta é negativa. O supremo e o ínfimo de X podem ou não pertencer a X.

Exemplos.

1) Seja $X = \{2, 5, 7, 9\}$.

Temos,

$$\sup X = 9 \text{ e } \inf X = 2.$$

Nota: Observe que neste caso o supremo de X é o elemento máximo de X e o ínfimo de X é seu elemento mínimo. Sempre que um conjunto X tem elemento máximo esse elemento é o supremo. De forma análoga, sempre que X tem elemento mínimo, esse elemento é o ínfimo.

2) Seja $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$

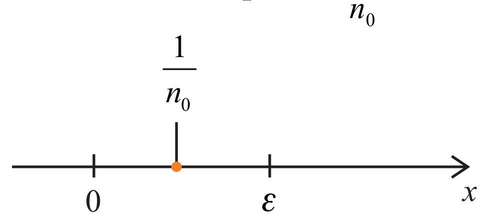
Facilmente podemos visualizar que $\sup X = 1$

Qual o ínfimo de X?

Se você pensou no zero você acertou, pois:

I.1 - $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \geq 0$ (0 é cota inferior de X).

I.2 - $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ (Prop. 1.7, iii))



Logo, 0 é a maior das cotas inferiores, isto é, $\inf X = 0$.

Nota: Observe que neste caso o ínfimo não pertence ao conjunto *X*.

3) Seja $X = \left\{ \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Podemos escrever, $X = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots \right\}$.

Temos,

$$\inf X = \{0\};$$

$$\sup X = \{1\}.$$

4) Seja $X = \left\{ -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Temos que $\inf X = -1$ e $\sup X = 0$.

5) Seja $X = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Temos que $\inf X = 0$ e $\sup X = \frac{1}{2}$.

6) Seja $X = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

Temos:

$$\inf X = 2.$$

Como *X* não é limitado superiormente, *X* não possui supremo.

Acima vimos exemplos de alguns conjuntos cujo supremo e/ou infímo não pertenciam ao conjunto. Porém em todos os exemplos, o supremo e o infímo eram números racionais.

Você pode se perguntar se este comportamento se repete para todo subconjunto limitado de números racionais, ou seja, se todo subconjunto limitado de números racionais possuí supremo (ou ínfimo) em $\mathbb{Q}$.

A resposta a pergunta acima é negativa. Existem subconjuntos limitados de números racionais cujo supremo não é um número racional. Para provar esta afirmação, precisamos primeiro da proposição abaixo.

Proposição 1.8. Não existe um número racional p tal que $p^2 = 2$.

Prova: Suponhamos que existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p^2 = 2$. Então podemos escrever $p = \frac{m}{n}$, sendo que os inteiros m e n não são ambos pares (se forem, podemos simplificar, até deixarem de ser).

Temos,

$$p^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

ou,

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

ou, ainda, $m^2 = 2n^2$.

Concluímos que m^2 é par e, consequentemente, m é par. Podemos escrever, então, $m = 2r$, onde r é um inteiro.

Elevando ao quadrado, temos,

$$m^2 = 4r^2$$

ou,

$2n^2 = 4r^2$, já que $m^2 = 2n^2$.

Simplificando, vem

$$n^2 = 2r^2,$$

de onde concluímos que n^2 é par e, consequentemente, n é par.

Chegamos, dessa forma, a uma contradição, pois m e n não são ambos pares.

■

Proposição 1.9. Sejam

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \text{ tais que } x > 0 \text{ e } x^2 < 2\};$$

$$Y = \{y \in \mathbb{Q} \text{ tais que } y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}.$$

Não existe $\sup X$ em $\mathbb{Q}$ e não existe $\inf Y$ em $\mathbb{Q}$.

Prova: Vamos fazer esta demonstração em etapas.

1) O conjunto X não possui elemento máximo.

Seja x um elemento qualquer de X. Vamos mostrar que existe em X um outro elemento maior que x. Consideremos o número racional:

$$\frac{2-x^2}{2x+1}.$$

Como $x \in X$, $2-x^2 > 0$ e $x > 0$. Portanto $2x+1 > 0$ e, dessa forma,

$$\frac{2-x^2}{2x+1} > 0.$$

Tomamos um número $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < 1$ e $0 < r < \dfrac{2-x^2}{2x+1}$. A existência desse número racional r é garantida pela proposição 1.7.

Provemos que $x + r \in X$.

Temos, $(x+r) > 0$. Além disso,

$$0 < r < 1 \Rightarrow r^2 < r; \quad (1)$$

$$0 < r < \frac{2-x^2}{2x+1} \Rightarrow r(2x+1) < 2 - x^2. \quad (2)$$

Usando (1) e (2), vem

$$\begin{aligned}(x+r)^2 &= x^2 + 2rx + r^2 < x^2 + 2rx + r \\ &= x^2 + r(2x+1) < x^2 + 2 - x^2 = 2\end{aligned}$$

Portanto, $(x+r)^2 < 2$ e, dessa forma, $x + r \in X$.

Concluímos que X não possui elemento máximo.

2) O conjunto Y não possui elemento mínimo .

Seja $y \in Y$. Vamos mostrar que existe em Y outro elemento menor que y.

Consideremos o número racional

$$\frac{y^2 - 2}{2y}.$$

Como $y \in Y$, $y^2 > 2$ e $y > 0$. Portanto, $y^2 - 2 > 0$ e $2y > 0$ e, assim,

$$\frac{y^2 - 2}{2y} > 0 .$$

Tomamos um número $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$0 < r < \frac{y^2 - 2}{2y}.$$

Temos que $2ry < y^2 - 2$ ou $-2ry > 2 - y^2$.

Usando esse resultado, vem:

$$\begin{aligned} (y - r)^2 &= y^2 - 2ry + r^2 \\ &> y^2 - 2ry \\ &> y^2 + 2 - y^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Logo, $(y - r)^2 > 2$.

Para concluirmos que $(y - r) \in Y$, falta verificarmos, ainda, se $(y - r) > 0$.

Como $0 < r < \dfrac{y^2 - 2}{2y}$, temos que

$$r < \frac{y}{2} - \frac{1}{y}.$$

Como $y > 0$, segue que $r < \dfrac{y}{2} < y$ e, portanto, $(y - r) > 0$.

Concluímos que $(y - r) \in Y$ e, dessa forma, Y não possui elemento mínimo.

3) Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$.

Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Temos,

$$\begin{cases} x > 0 \text{ e } 0 < x^2 < 2 \\ y > 0 \text{ e } y^2 > 2 \end{cases}$$

Portanto, $0 < x^2 < 2 < y^2$ ou $0 < x^2 < y^2$. Como $x > 0$ e $y > 0$, segue que $x < y$.

4) $\sup X \notin \mathbb{Q}$

Vamos usar os resultados obtidos nas 3 etapas anteriores.

Suponhamos que existe $b = \sup X$ em $\mathbb{Q}$. Então:

i) $b > 0$.

ii) b não satisfaz $b^2 < 2$.

De fato, como X não tem elemento máximo (provamos na etapa 1), $b \notin X$.

ii) b não satisfaz $b^2 > 2$.

De fato, vamos supor que $b^2 > 2$.

Temos então que $b \in Y$. Usando a etapa 2, segue que $\exists\, a \in Y$ tal que $a < b$ (Y não tem elemento mínimo).

Utilizando o resultado obtido na etapa 3, concluímos que $\forall x \in X,\ x < a < b$.

Portanto, b não é a menor cota superior de X, ou seja, b não é o supremo de X, o que é uma contradição.

Por ii) e iii) temos que:

Se existir $b = \sup X$, então $b^2 = 2$.

Pela proposição 3, sabemos que não existe $b \in Q$ tal que $b^2 = 2$.

Logo, não existe $\sup X$ em $\mathbb{Q}$.

■

Comprovamos, assim, que existem conjuntos de números racionais que não possuem supremo em $\mathbb{Q}$. Existem lacunas em $\mathbb{Q}$. Você pode ser perguntar, intuitivamente falando, se as lacunas de $\mathbb{Q}$ podem ser completadas. A resposta é afirmativa, e o conjunto que contém $\mathbb{Q}$, e completa suas lacunas, é o conjunto dos números reais. Temos o seguinte axioma:

Axioma. Em $\mathbb{R}$ todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, possui supremo.

Nota: O Axioma axima implica que em $\mathbb{R}$ todo subconjunto limitado inferiormente possui ínfimo.

Nota: Existe em $\mathbb{R}$ um número p tal que $p^2 = 2$. Este número é representado por $\sqrt{2}$ e é um número irracional.

O conjunto dos números irracionais é definido como o complementar de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, e é denotado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Vimos anteriormente que $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável e que $\mathbb{R}$ é não enumerável. Como a união de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável, concluímos que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é não enumerável.

Entre os números irracionais mais conhecidos estão $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ e o número neperiano e.

Você saberia listar 10 números irracionais que são maiores que 500?

É fácil, pois se x é um número racional e y um número irracional então o produto de x por y é irracional.

Assim, podemos listar facilmente os 10 números pedidos. Por exemplo, poderíamos tomar: $500\sqrt{2}, 501\sqrt{2}, \ldots, 509\sqrt{2}$.

Vamos finalizar a unidade enunciando um teorema muito importante, onde usamos fortemente os conceitos de supremo e ínfimo vistos acima.

Proposição 1.10. (Princípio dos Intervalos Encaixados)

Seja $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ uma sequência decrescente de intervalos fechados e limitados, $I_n = [a_n, b_n]$. Então, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{\ \}$, isto é, existe pelo menos um número real x tal que $x \in I_n, \forall n$.

Mais precisamente, temos:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a,\ b],$$

onde $\begin{cases} a = \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \\ b = \inf\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\} \end{cases}$.

Prova: Como $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, temos que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_n \leq \ldots \leq a_{n+1} \leq \ldots$$

e

$$b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq \ldots$$

Além disso, $a_m \leq b_n,\ \forall m, n$.

Logo, cada b_n é uma cota superior do conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ e cada a_m é uma cota inferior do conjunto $B = \{b_1, b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$.

Existem, então, $a = \sup A$ e $b = \inf B$ em $\mathbb{R}$.

Como $a = \sup A$, segue que $a_m \leq a,\ \forall m$.

Como todo b_n é uma cota superior de A,

$$a \leq b_n,\ \forall n.$$

Temos, então,

$$a_n \leq a \leq b_n,\ \forall n.$$

ou seja, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

■

Exemplo. Verifique o princípio dos intervalos encaixados para a família de intervalos
$I_n = \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

Temos,

$$
\begin{aligned}
&I_1 = [-1, 1] \\
&I_2 = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\
&\vdots \\
&I_n = \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Os intervalos da família dada são fechados e limitados e satisfazem:

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

Logo, todas as hipóteses da proposição 1.11 são verificadas.

Além disso, temos que $a_n < 0, \forall n$ e $b_n > 0, \forall n$.

Logo, $0 \in I_n, \forall n$ e, assim, $0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Finalmente, é interessante constatar que

$$\sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} = \sup\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots\right\} = 0$$

e

$$\inf\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\} = \inf\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} = 0.$$

Portanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0,\ 0] = \{0\}$.

Nota: Para aprofundar seus conhecimentos, sugerimos a leitura e estudo de todo o capítulo III do livro "Curso de Análise" de Elon Lages Lima e da sessão "Os números reais - de Eudoxo a Dedekind" do 1º capítulo do livro "Introdução à Análise Matemática" de Geraldo Ávila.

Exercícios Complementares:

1) Mostre que X é um conjunto infinito se, e somente se, X pode ser colocado em correspondência biunívuca com um subconjunto próprio dele mesmo, isto é, se, e somente se, existe uma bijeção entre X e um subconjunto próprio dele mesmo.

2) Seja S o conjunto das circunferências de raio 1 e de centro (p, q), onde p e q são números inteiros positivos. S é enumerável? Justifique.

3) Mostre que a união de 2 conjuntos disjuntos enumeráveis é enumerável.

4) Considere o conjunto S das sequências (sucessões) cujos termos são os algarismos 0 e 1 e que eventualmente se anulam, isto é, uma sucessão $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ esta no conjunto S se $x_i \in \{0,1\}$ para todo i, e, a partir de certo ponto, todos os seus termos são iguais a zero, isto é, existe um K_x tal que $x_i = 0$ para todo $i > K_x$. Decida se S é enumerável e justifique sua resposta.

5) Dado o conjunto
$X = \left\{ \dfrac{2}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$:

   a) Dê exemplos de 3 cotas superiores e 3 cotas inferiores de X, se existirem.

   b) Determine, se existirem, o supremo e o ínfimo de X.

6) Repita o exercício 5 para os conjuntos:

   a) $X = \left\{ \dfrac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

   b) $Y = \{(-1)^n n,\ n \in \mathbb{N}\}$

   c) $Z = \{5 - 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$

7) Escreva em linguagem coloquial a caracterização de ínfimo dada pelas condições I.1′ e I.2′ do texto.

8) Dê 2 exemplos de conjuntos de números racionais que:

   a) Não possuem supremo em $\mathbb{Q}$.

   b) Não possuem ínfimo em $\mathbb{Q}$.

   c) Não possuem ínfimo nem supremo em $\mathbb{Q}$.

9) Identifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações que seguem, justificando as suas respostas.

a) Se X é um conjunto finito, o ínfimo de X e o supremo de X pertencem a X.

b) Se um conjunto X tem supremo então ele admite infinitas cotas superiores.

c) O ínfimo de um conjunto limitado de números irracionais é um irracional.

d) Qualquer subconjunto ilimitado de números racionais é denso em $\mathbb{R}$.

10) Em $\mathbb{R}$, dê um exemplo de um conjunto de números racionais que tem supremo irracional e de um conjunto de números irracionais que tem supremo racional.

11) Mostre que no princípio dos intervalos encaixados não podemos retirar as hipóteses:

a) os intervalos são limitados;

b) os intervalos são fechados.

Capítulo 2

Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

2 Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo você vai adquirir conhecimentos básicos de Topologia no $\mathbb{R}^n$*, com ênfase para* $n = 1, 2, 3$. *Isso oportunizará a você uma visão mais ampla e mais fundamentada das disciplinas do ensino médio, quando lecioná-las.*

Em particular, vamos explorar o conceito de métrica, que nos permite medir distâncias, tais como distância entre dois pontos e distância entre conjuntos. Veremos também as noções de conjunto aberto, conjunto fechado, interior, fecho e fronteira de um conjunto.

2.1 Introdução

Antes de iniciar o capítulo, vejamos o que Cantor e Hilbert afirmaram sobre o estudo de conjuntos:

> "Por 'conjunto' entendemos a entidade formada quando colocamos certos objetos, definidos e distintos m, da nossa intuição ou pensamento. Estes objetos são chamados os 'elementos de M'". (G. Cantor, 1895, Werke, p. 282, apud [6, Hairer-Wanner])

> "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós". (Hilbert, Math. Ann, vol 95, p. 170, apud [6, Hairer-Wanner])

Embarcaremos agora no paraíso criado por Cantor, munidos principalmente de nossa intuição geométrica, a qual será nossa guia durante toda esta unidade. Não esqueça que durante o seu estudo é de extrema importância que você resolva os exercícios propostos neste livro, utilizando uma linguagem matemática clara e precisa.

2.2 O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

> "[...] É muito util considerar números "complexos", ou números formados por várias unidades [...]" (Peano, 1888a, Math. Ann., vol. 32, p.450, apud [6, Hairer-Wanner])

Os números "complexos" aos quais Peano se refere são o que hoje conhecemos por vetores (nomenclatura sugerida por Hamilton (1853)). Sua importância matemática é enorme e seu estudo deslanchou em meados do século 19, quando matemáticos tiveram a ideia de denotar pares de números (ou n-uplas) por apenas uma letra, por exemplo $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, e considerar os mesmos como novos objetos matemáticos.

Começaremos agora nosso estudo, com toda a precisão necessária para um bom entendimento das ideias.

O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ consiste de todas as n-uplas ordenadas de números reais.

Simbolicamente, temos:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,/\,x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Um elemento do espaço $\mathbb{R}^n$ é denotado por $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e nos referimos a ele como um ponto de $\mathbb{R}^n$.

Em $\mathbb{R}^n$ podemos definir as operações adição e multiplicação por escalar, como segue:

Adição. Dados dois pontos de $\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, define-se:

$$x+y=(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n).$$

Multiplicação por escalar. Dado $a\in\mathbb{R}$ e $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, define-se:

$$ax=a(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(ax_1,ax_2,\ldots,ax_n).$$

Observação. Com as operações de adição e multiplicação por escalar o espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$.

É interessante você relembrar as propriedades de um espaço vetorial. Retome o texto da disciplina Álgebra Linear.

Como $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial, podemos introduzir o conceito de **norma**.

Definição 2.1. Uma **norma** em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\|\ \|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

$$N1: \|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$N2: \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$$

$$N3: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

A norma de $\mathbb{R}^n$ que mais vamos utilizar é a norma Euclidiana, dada por

$$\|\ \|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Observação. Veremos que outras normas podem ser definidas em $\mathbb{R}^n$. Sempre que não fizermos uma referência explícita à norma, estaremos subentendendo que a norma usada é a norma Euclidiana.

No nosso estudo, de forma geral, vamos trabalhar nos espaços $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Isso nos permite visualizar geometricamente os conceitos que vamos explorar.

Exemplo 2.1. Identifique, no espaço $\mathbb{R}^1$, o conjunto

$$X = \{x \in \mathbb{R}^1 / \|x\| < 1\}.$$

Observe que o espaço $\mathbb{R}^1$ nada mais é que o conjunto dos números reais, que identificamos geometricamente com a reta real.
Temos $\|x\| = |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.
Portanto, X é o intervalo aberto $(-1, 1)$, representado na figura 2.1.

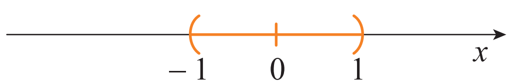


Figura 2.1

Exemplo 2.2. Identifique no espaço $\mathbb{R}^2$ o conjunto

$$S = \{x = (x_1, x_2) / \| x \| < 1\}.$$

Geometricamente o espaço $\mathbb{R}^2$ é o plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Se necessário, reveja a seção 3.7 do livro texto de Introdução ao Cálculo.

Temos $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 < 1$.

Portanto, S é o conjunto dos pontos interiores à circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 1, ilustrada na figura 2.2.

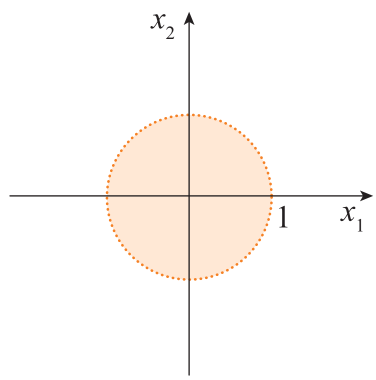


Figura 2.2

Exemplo 2.3. Identifique no espaço $\mathbb{R}^3$ o conjunto

$$S = \{x = (x_1, x_2, x_3) / \| x \| = 1\}.$$

$\mathbb{R}^3$ é o espaço cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que você utilizou no estudo da Geometria Analítica e no Cálculo para representar figuras geométricas espaciais como cubos, esferas e outras superfícies.

Temos $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Assim, neste caso, S é o conjunto dos pontos de uma esfera de centro na origem $(0,0,0)$ e raio 1, como mostra a figura 2.3.

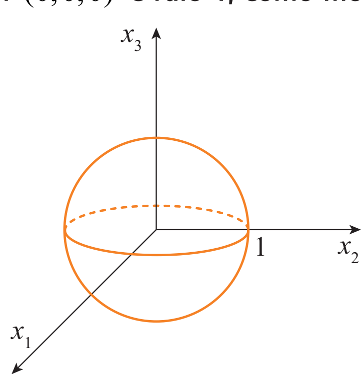


Figura 2.3

A noção de espaço métrico foi introduzida em 1906 por Maurice Fréchet e desenvolvida e batizada por Felix Hausdorff em 1914.

2.3 Espaços Métricos

Intuitivamente, um espaço métrico é um conjunto no qual temos uma maneira de medir a distância entre seus pontos.

Qual a sua noção de distância entre dois pontos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$?

Provavelmente, você vai visualizar a figura 2.4 e concluir que a distância entre 2 pontos é o comprimento do segmento de reta que os une, ou seja:

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}\,.$$

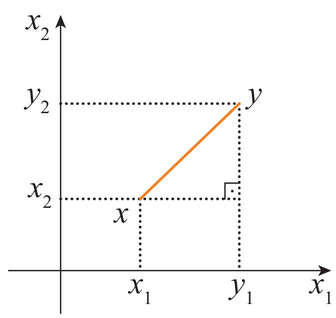


Figura 2.4

Isso está correto. No entanto, podemos ter mais que uma maneira de medir a distância. Algumas propriedades devem ser satisfeitas:

*M*1: A distância entre dois pontos nunca é negativa e só é zero a distância de um ponto a ele mesmo.

*M*2: A distância é simétrica, isto é, a distância de x até y é igual à distância de y até x.

*M*3: A distância entre 2 pontos x e z é sempre menor ou igual à soma das distâncias de x até y e de y até z, onde y é um ponto qualquer.

Nota: Qualquer função que satisfaz estas propriedades pode ser usada para medir distâncias.

Temos a seguinte definição:

Definição 2.2. Seja M um conjunto. Uma **métrica** em M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, onde $M \times M$ é o produto cartesiano de M por M: $M \times M = \{(x_1, x_2) / x_1, x_2 \in M\}$, tal que para quaisquer $x, y, z \in M$, temos:

$M1$: $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

$M2$: $d(x, y) = d(y, x)$;

$M3$: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

O par (M, d), onde M é um conjunto e d uma métrica, é chamado um **espaço métrico**.

Exemplo 2.4. $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |y - x|$.

Essa é a métrica que você utilizou nas disciplinas de Cálculo, quando estudou, por exemplo, limite de sequências. Se necessário, reveja a seção 1.3.4 do texto de Cálculo I [5, Gimenez-Starke].

A partir das propriedades dos números reais podemos verificar facilmente que d é uma métrica em $\mathbb{R}$.

Temos:

$M1$: $d(x, y) = |y - x| \geq 0$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |y - x| = 0 \Leftrightarrow y - x = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$M2$: $d(x, y) = d(y, x)$, pois $|y - x| = |x - y|$;

$M3$:
$$\begin{aligned} d(x, z) &= |z - x| \\ &= |z - y + y - x| \\ &\leq |z - y| + |y - x| \\ &= |y - x| + |z - y| \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Exemplo 2.5. Seja $M \neq \varnothing$ qualquer. A função $d(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ se } x = y \\ 1, \text{ se } x \neq y \end{cases}$ satisfaz as propriedades de métrica, sendo denominada **métrica trivial** ou **métrica** $0 - 1$.

Qual a deficiência que você identifica nesta métrica?

Ela não diferencia a distância entre pontos distintos. Por exemplo, se $M = \mathbb{R}$, $d(4, 9) = 1$, $d(5, 7) = 1$, etc.

Exercício Resolvido

1) A função $d(x,y) = x^2 + 2xy$ é métrica em $\mathbb{R}$? Justifique.

Resolução:

Note que d não é uma métrica em $\mathbb{R}$, pois não satisfaz a propriedade $M1$. Por exemplo, $d(1,-3) = -5 < 0$.

Exercício Proposto

1) A função $d(x,y) = 2|x - y|$ é métrica em $\mathbb{R}$? Justifique.

2.4 Métricas em $\mathbb{R}^n$

Sejam $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pontos de $\mathbb{R}^n$.
As métricas usualmente utilizadas no espaço $\mathbb{R}^n$ são:

i) Métrica Euclidiana

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}\,.$$

Nota: Observe que para esta métrica, a distância de x até y é dada pela norma euclidiana de $x - y$, isto é, $d(x,y) = \| x - y \|$.

ii) Métrica Retangular ou de Ângulo Reto

$$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$d_1(x,y) = | y_1 - x_1 | + | y_2 - x_2 | + \ldots + | y_n - x_n |.$$

iii) Métrica do Máximo

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$d_2(x,y) = \max\{| y_1 - x_1 |, | y_2 - x_2 |, \ldots, | y_n - x_n |\}.$$

Observações.

1) Em nosso estudo a Métrica Euclidiana será considerada a métrica usual de $\mathbb{R}^n$.

2) Pode-se provar que

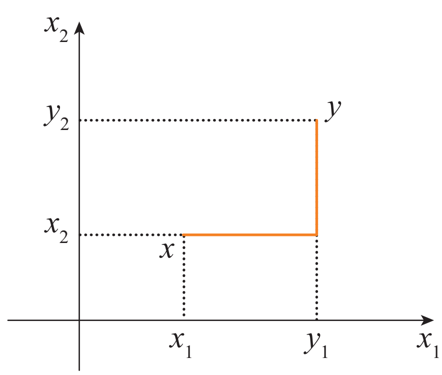
$$d_2(x,y) \le d(x,y) \le d_1(x,y) \le k d_2(x,y)\,,$$

onde k é uma constante. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, para mostrar que $d(x,y) \leq d_1(x,y)$ é suficiente mostrar que $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$. Mas esta desigualdade é equivalente a $a^2+b^2 \leq (|a|+|b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \Leftrightarrow 0 \leq 2|a||b|$, o que é verdade $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

Devido a estas desigualdades, dizemos que as três métricas são equivalentes. A equivalência é no sentido de que elas vão produzir os mesmos abertos e fechados em $\mathbb{R}^n$.

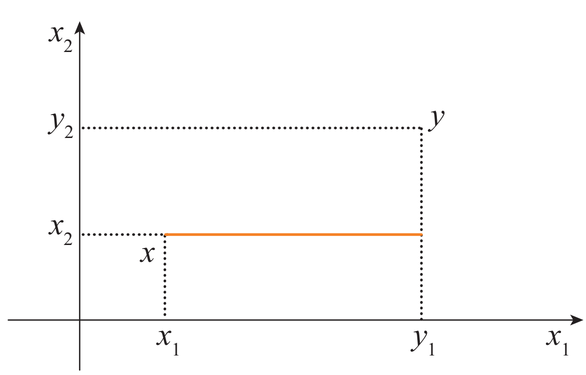
É importante você visualizar geometricamente essas medidas de distância. Para isso vamos utilizar o espaço $\mathbb{R}^2$. Retomando a figura 2.4, vemos que a distância Euclidiana entre dois pontos é a distância medida em linha reta. As figuras 2.5 e 2.6, respectivamente, ilustram a métrica retangular e a métrica do máximo.

Métrica Retangular
Também é conhecida como Métrica Metropolitana ou de Manhattan, devido às redes de transporte na forma de grades retangulares que ocorrem em muitas cidades americanas e mesmo brasileiras. Em muitos casos ela é a métrica mais adequada para medir as distâncias dos deslocamentos nos centros urbanos.



$$d(x,y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$$

Figura 2.5



$$d(x,y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$$

Figura 2.6

Exercício Resolvido

2) Usando as três métricas anteriores, identifique os pontos de $\mathbb{R}^2$ tais que sua distância até a origem seja igual a 1.

Resolução:

Sejam $o = (0,0)$ e $x = (x_1, x_2)$.

i) Para a métrica Euclidiana, temos

$$d(x,o) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

ii) Para a métrica retangular, vem

$$d_1(x,o) = 1 \Leftrightarrow |x_1 - 0| + |x_2 - 0| = 1 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| = 1.$$

iii) Para a métrica do máximo, temos

$$d_2(x,o) = 1 \Leftrightarrow \max\{|x_1 - 0|, |x_2 - 0|\} = 1 \Leftrightarrow \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1.$$

A figura 2.7 ilustra as 3 situações.

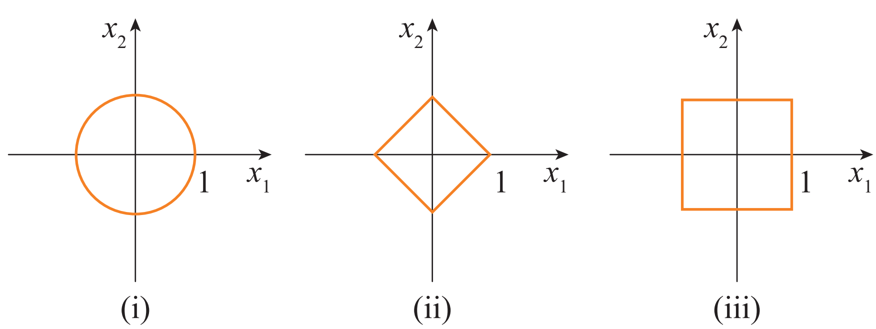


Figura 2.7

Exercício Proposto

2) Refaça a figura 2.7, usando as equações obtidas em (i), (ii) e (iii) e sobrepondo as 3 figuras no mesmo sistema de coordenadas.

Exercício Resolvido

3) Em $\mathbb{R}^2$, mostre que a métrica Euclidiana satisfaz a desigualdade triangular, isto é, mostre que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$.

Resolução:

Dados $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ e $z=(z_1,z_2)$, temos que provar que:

$$\sqrt{(x_1-z_1)^2+(x_2-z_2)^2} \le \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2}$$

Sejam $a_i=(x_i-y_i)$, $b_i=(y_i-z_i)$, $i=1,2$.

Então $x_i-z_i=(x_i-y_i)+(y_i-z_i)=a_i+b_i$ e a inequação acima é equivalente a

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

$$\Leftrightarrow (a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2 \le a_1^2+a_2^2+2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}+b_1^2+b_2^2$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2 \le \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}\,.$$

Para, mostrarmos esta última inequação, é suficiente mostrar que

$$|a_1b_1+a_2b_2| \le \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}\,,\ \forall a_i,b_i\in\mathbb{R},\ i=1,2\,.$$

Mas a inequação acima é a famosa equação de Cauchy-Schwartz em $\mathbb{R}^2$ ($|a\cdot b|\le\|a\|\cdot\|b\|$, para $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$), e podemos prová-la elevando ao quadrado em ambos os lados, agrupando termos, e notando que $(a_1b_2-a_2b_1)^2\ge 0$, $\forall a_i,b_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2$.

Concluímos que a desigualdade riangular é válida em $\mathbb{R}^2$.

Nota: Um argumento semelhante pode ser usado para provar a desigualdade triangular em $\mathbb{R}^2$.

2.5 Um Exemplo de Métrica num Conjunto de Funções

Seja X um conjunto não vazio. Seja M o conjunto das funções $f:X\to\mathbb{R}$ limitadas, isto é, tais que existe uma constante positiva $k\in\mathbb{R}$, de tal forma que $|f(x)|\le k$, $\forall x\in X$.

A função

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} \{ |g(x) - f(x)| \}$$

É importante você revisar bem a seção 2.6, que explora os conceitos de supremo e ínfimo, no texto de Introdução ao Cálculo [4, Gimenez-Starke].

é uma métrica em M.

A figura 2.8 ilustra a métrica dada para $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

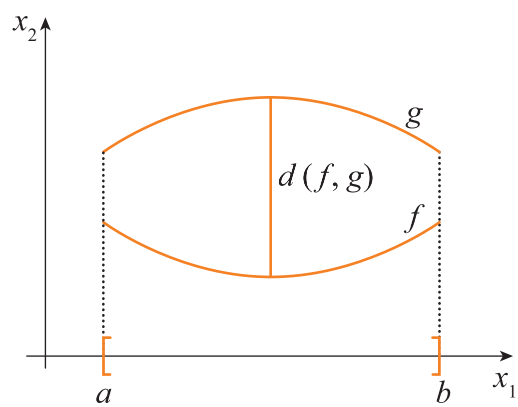


Figura 2.8

Observe que para todo $x \in X$, temos um número real $|g(x) - f(x)|$. O supremo do conjunto desses números é a distância de f a g (note que este supremo existe, pois f e g são limitadas).

Vamos verificar as propriedades de métrica.

Sejam $f, g, h \in M$.

*M*1: $d(f,g) \geq 0$ pela própria definição da métrica.

$$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in X} \{ |g(x) - f(x)| \} = 0 \Leftrightarrow |\ (\ ) - \ (\ )| = 0$$

$$\Leftrightarrow |g(x) - f(x)| = 0,\ \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x),\ \forall x \in X.$$

*M*2: $d(f,g) = d(g,f)$.

É imediata pelas propriedades de módulo de números reais.

M3: Seja $x \in X$. Temos

$$\begin{aligned} |g(x)-f(x)| &= |g(x)-h(x)+h(x)-f(x)| \\ &\leq |g(x)-h(x)|+|h(x)-f(x)| \\ &= |h(x)-f(x)|+|g(x)-h(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X}|h(x)-f(x)|+\sup_{x\in X}|g(x)-h(x)| \\ &= d(f,h)+d(h,g). \end{aligned}$$

Concluímos, assim, que $d(f,h)+d(h,g)$ é uma cota superior do conjunto

$$\{|g(x)-f(x)|, x \in X\}.$$

Segue que

$$d(f,g)=\sup_{x\in X}|g(x)-f(x)| \leq d(f,h)+d(h,g) \; .$$

Cabe a você agora resolver o exercício que segue.

Exercício Proposto

3) Seja $X=[0,1]\subset \mathbb{R}$. Determinar $d(f,g)$, sendo:

   d) $f(x)=x$ e $g(x)=1$;

   e) $f(x)=x^2$ e $g(x)=x$.

2.6 Métrica Induzida

Sejam (M,d) um espaço métrico e L um subconjunto de M. A restrição da métrica d a $L\times L$ é uma métrica sobre L.

Esta métrica em L é a métrica induzida por d sobre L.

Exemplo 2.6. Seja $L=[0,1]\times\mathbb{R}$, onde $[0,1]$ é o intervalo fechado $[0,1]\subset\mathbb{R}$.

A figura 2.9 ilustra o espaço L.

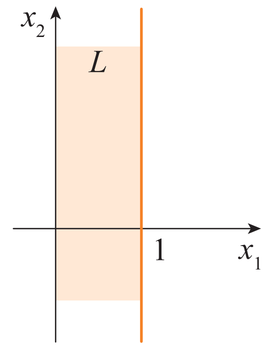


Figura 2.9

Podemos medir distâncias nesta faixa de $\mathbb{R}^2$ (isto é, em L) usando qualquer das métricas definidas sobre $\mathbb{R}^2$, por exemplo, a métrica Euclidiana.

2.7 Diâmetro de um Conjunto; Distâncias entre Conjuntos

Consideremos os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\};$$

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x_1 - 3)^2 + x_2^2 \leq 1\};$$

$$C = [0,1] \times [0,1].$$

Observe que C é o produto cartesiano do intervalo fechado $[0,1]$ por ele mesmo:

a) Qual a maior distância possível entre 2 pontos do conjunto A?

b) Qual a menor distância possível entre um ponto de A e um ponto de B?

c) Qual a maior distância possível entre dois pontos de C?

d) Qual a menor distância possível entre a origem e um ponto de B?

e) Se substituirmos

$$A \text{ por } A' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1^2 + x_2^2 < 1\} \text{ e}$$

$$B \text{ por } B' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x_1 - 3)^2 + x_2^2 < 1\},$$

as respostas serão as mesmas?

É provável que para responder estas questões você tenha representado geometricamente os conjuntos dados, conforme a figura 2.10.

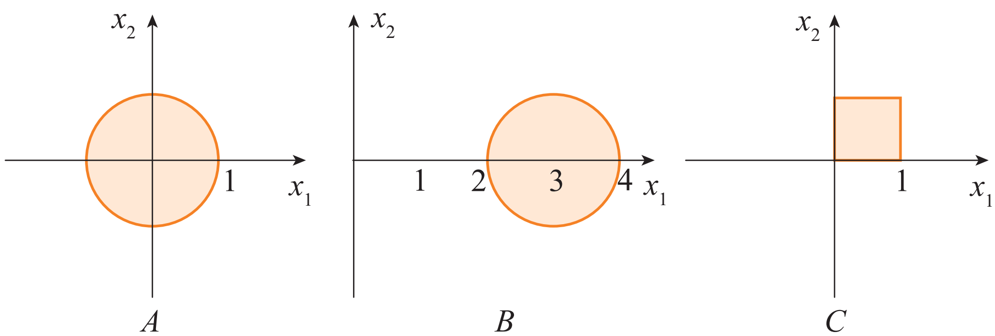


Figura 2.10

Analisando a figura, podemos obter facilmente as respostas: (a) 2; (b) 1; (c) $\sqrt{2}$; (d) 2.

As respostas para o item (e) não são tão imediatas. Vejamos as definições que seguem.

Definição 2.3 (Diâmetro de um conjunto). Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$, $A \neq \emptyset$. Dizemos que o **conjunto A** é **limitado** se existir um número real $k > 0$, tal que

$$d(x, y) \leq k, \ \forall x, y \in A.$$

Se A é limitado, chamamos de **diâmetro de A**, e denotamos por $\text{diam}(A)$, o número real

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \,/\, x, y \in A\}.$$

Exemplo 2.7. Em $\mathbb{R}$, o diâmetro do intervalo fechado $[a, b]$ é igual ao diâmetro do intervalo aberto (a, b), sendo igual a $b - a$, isto é,

$$\text{diam}([a, b]) = \text{diam}((a, b)) = b - a.$$

Exemplo 2.8. Os diâmetros dos conjuntos A, B e C, representados na figura 2.10 são:

$$\text{diam}(A) = 2\,;\ \text{diam}(B) = 2\,;\ \text{diam}(C) = \sqrt{2}\,.$$

Na figura 2.11, representamos os conjuntos A' e B'.

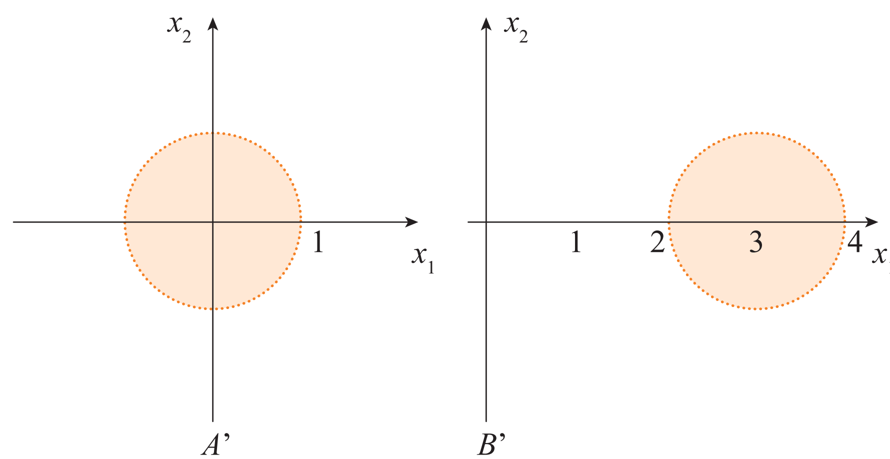


Figura 2.11

Temos $\text{diam}(A') = \text{diam}(B') = 2$.

Nota: Antes de ler o próximo exercício revise a noção de supremo.

Exercício Resolvido

4) Demonstre a afirmação do Exemplo 2.7.

Resolução:

Faremos para o intervalo $[a,b]$. O caso do intervalo (a,b) fica como exercício.

Primeiro note que $b-a$ é cota supeior para $d(x,y)$ com $x,y \in [a,b]$, pois se $x,y \in [a,b]$ então $y \le b$ e $x \ge a$. Logo, $b-a \ge x-y$.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Então $a, b-\frac{1}{n}$ pertencem a $[a,b]$ e $d\left(a, b-\frac{1}{n}\right) = (b-a) - \frac{1}{n} > (b-a) - \varepsilon$.

Logo, $(b-a) = \sup\{d(x,y),\ x,y \in [a,b]\}$.

Definição 2.4 (Distância de um ponto a um conjunto). Sejam (M,d) um espaço métrico, $A \subset M$, $A \neq \varnothing$ e p um ponto de M. **A distância de p até A** é o número real que denotamos por $d(p,A)$, dado por

$$d(p,A) = \inf\{d(p,x) / x \in A\}.$$

Nota:

1) O ínfimo existe, pois $d(p,x) \geq 0$, $\forall x \in A$.

2) Se $p \in A$, então $d(p,A) = 0$.

Exemplo 2.9. Considere o conjunto C, representado na figura 2.10. Dados $P_1(0,1)$, $P_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e $P_3(2,2)$, determinar a distância $d(P_i,C)$, $i = 1,2,3$.

Comprove este resultado, raciocinando geometricamente.

Temos que $d(P_1,C) = d(P_2,C) = 0$, pois $P_1, P_2 \in C$; e $d(P_3,C) = \sqrt{2}$.

Definição 2.5 (Distância entre dois conjuntos). Sejam (M,d) um espaço métrico, $A,B \subset M$, $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$. Definimos a **distância de A até B** como sendo o número real

$$d(A,B) = \inf\left\{d(x,y) / x \in A \text{ e } y \in B\right\}.$$

Nota:

1) Se $A \cap B \neq \varnothing$, então $d(A,B) = 0$.

2) $A \cap B = \varnothing$ não implica que $d(A,B) > 0$.

De fato, tome, por exemplo, os intervalos $A = [0,1)$ e $B = [1,2]$ em $\mathbb{R}$.

Temos $A \cap B \neq \varnothing$ e $d(A,B) = 0$.

Exemplo 2.10. Sejam:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} \quad \text{e} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ e } xy = 1\}.$$

Mostrar que a distância entre A e B é zero.

A figura 2.12 ilustra os conjuntos A e B em $\mathbb{R}^2$. A é o eixo dos x e B é o gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

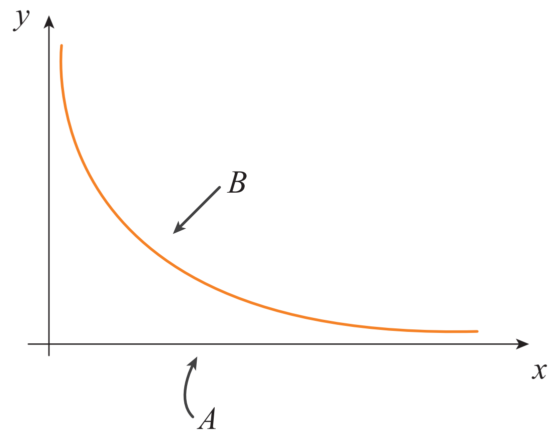


Figura 2.12

Queremos mostrar que $d(A, B) = 0$. Para isso, de acordo com a ε-caracterização de ínfimo, devemos mostrar que:

Para todo $\varepsilon > 0$, existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $d(p, q) < \varepsilon$.

Dê $\varepsilon > 0$. Então, pela propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$, existe um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Tomamos

$$p = (x_0, 0) \text{ e } q = \left(x_0, \frac{1}{x_0} \right).$$

Temos

$$p \in A \text{ e } q \in B$$

e

$$d(p, q) = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + \left(\frac{1}{x_0} - 0 \right)^2} = \frac{1}{x_0} < \varepsilon.$$

Logo, $d(A, B) = \inf\{d(x, y) / x \in A \text{ e } y \in B\} = 0$.

Exercício Proposto

4) Dê exemplos de conjuntos A e B, tais que:

a) $d(A,B)=3$ em $\mathbb{R}$;

b) $d(o,A)=2$ em $\mathbb{R}^2$; onde o é a origem.

c) $d(A,B)=1$ em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$.

2.8 Bolas Abertas

Vamos agora introduzir a noção de **bola aberta**, que é muito importante para introduzir o conceito **de conjunto aberto** e outras noções topológicas.

Definição 2.6. Sejam (M,d) um espaço métrico e $x \in M$. Seja r um número real positivo. A **bola aberta de centro x e raio r** é definida por

$$B(x,r)=\{y \in M \,/\, d(y,x)<r\}.$$

Em $\mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$B(x,r)=\{y \in \mathbb{R}^n / \| y-x \| < r\}.$$

Exemplo 2.11. Identifique, geometricamente, as bolas abertas:

1) $B(a,\varepsilon)$ em $\mathbb{R}$.

2) $B(a,\varepsilon)$ em $\mathbb{R}^2$, para as 3 métricas introduzidas.

Temos:

1) Em $\mathbb{R}$, com a métrica usual, a bola aberta de centro em a e raio ε é o intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ilustrado na figura 2.13.

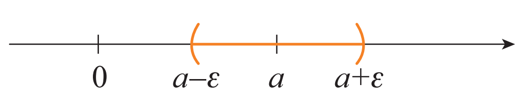


Figura 2.13

2) A figura 2.14 (a), (b) e (c) mostra as bolas abertas em $\mathbb{R}^2$, para as métricas Euclidiana, retangular e do máximo, respectivamente.

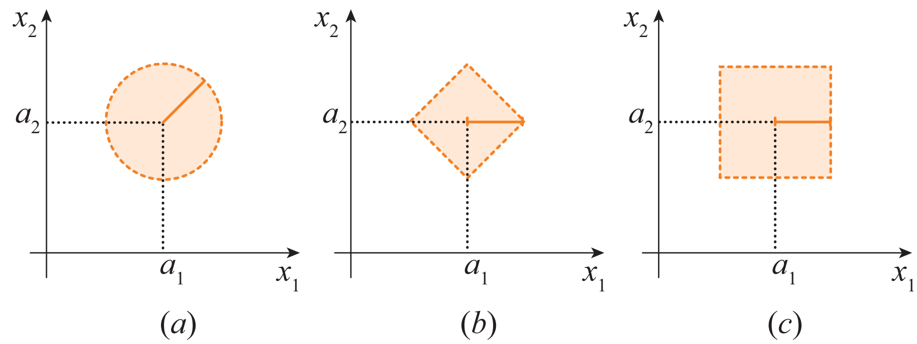


Figura 2.14

Propriedades das bolas abertas. Seja (M,d) um espaço métrico.

Propriedade B1. O diâmetro de $B(x,r)$ satisfaz

$$\operatorname{diam}(B(x,r)) \le 2r\,.$$

De fato, sejam $y,z \in B(x,r)$. Então,

$$d(y,x) < r \ \text{ e } \ d(z,x) < r\,.$$

Usando a propriedade $M3$, segue que

$$d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z) < r + r = 2r\,.$$

Assim, $2r$ é uma cota superior do conjunto das distâncias entre 2 pontos quaisquer da bola e, então, o seu diâmetro satisfaz:

$$\operatorname{diam}(B(x,r)) = \sup\{d(y,z) \,/\, y,z \in B(x,r)\} \le 2r\,.$$

Exemplo 2.12. Em $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 2r$, valendo, assim, a igualdade na propriedade B1.

Exemplo 2.13. Seja $M = \mathbb{R}$, com a métrica zero-um. Se $r < 1$, $B(x,r) = \{x\}$ (conjunto unitário). Logo, $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 0$ e vale, neste caso, a desigualdade estrita na propriedade B1.

Propriedade B2. Dadas as bolas $B(x,r_1)$ e $B(x,r_2)$,

$$r_1 \le r_2 \Rightarrow B(x,r_1) \subset B(x,r_2)\,.$$

Observação. A prova é trivial. Faça uma representação geométrica em $\mathbb{R}^2$, com a métrica usual.

Propriedade B3. Dado um ponto qualquer $y \in B(x,r)$, existe um número real r_1, tal que

$$B(y,r_1) \subset B(x,r).$$

Prova:

Seja $y \in B(x,r)$. Tome $r_1 = r - d(x,y)$, como representado na figura 2.15, para $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual.

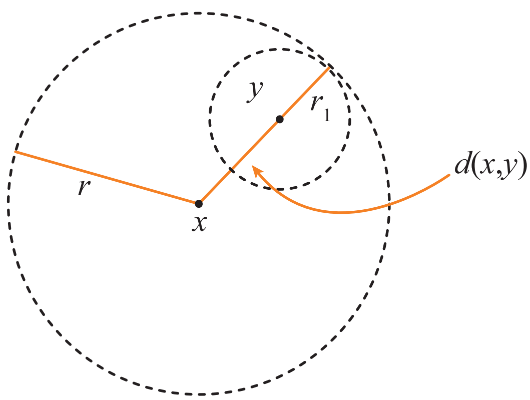


Figura 2.15

Seja $z \in B(y,r_1)$. Temos que

$$d(z,x) \le d(z,y) + d(y,x) < r_1 + d(y,x) = r - d(x,y) + d(y,x) = r.$$

Logo, $z \in B(x,r)$ e, portanto,

$$B(y,r_1) \subset B(x,r).$$

■

Propriedade B4. Sejam $B(x,r_1)$ e $B(y,r_2)$, tais que

$$B(x,r_1) \cap B(y,r_2) \neq \varnothing.$$

Se $z \in B(x,r_1) \cap B(y,r_2)$, então existe uma bola aberta com centro em z contida na interseção $B(x,r_1) \cap B(y,r_2)$.

A figura 2.16 ilustra esta propriedade para $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual.

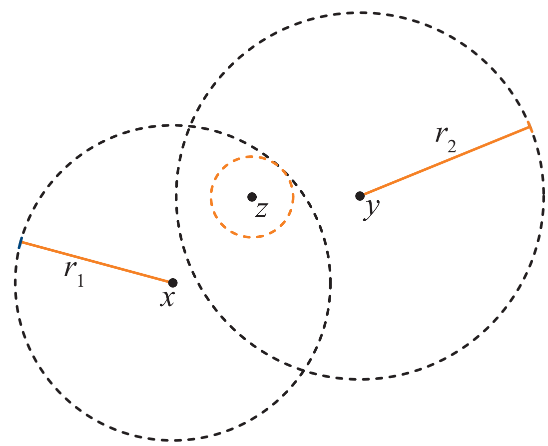


Figura 2.16

Prova:

Seja $z \in B(x,r_1) \cap B(y,r_2)$. Pela propriedade B3:

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ tal que } B(z,\delta_1) \subset B(x,r_1); \qquad (1)$$

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ tal que } B(z,\delta_2) \subset B(y,r_2). \qquad (2)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Por B2, $B(z,\delta) \subset B(z,\delta_1)$ e $B(z,\delta) \subset B(z,\delta_2)$.

Por (1) e (2), concluímos que

$$B(z,\delta) \subset B(x,r_1) \cap B(y,r_2).$$

■

Propriedade B5. Sejam $B(x,r_1)$ e $B(y,r_2)$. Se $r_1 + r_2 \leq d(x,y)$, então

$$B(x,r_1) \cap B(y,r_2) = \varnothing.$$

A figura 2.17 ilustra esta propriedade para $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual.

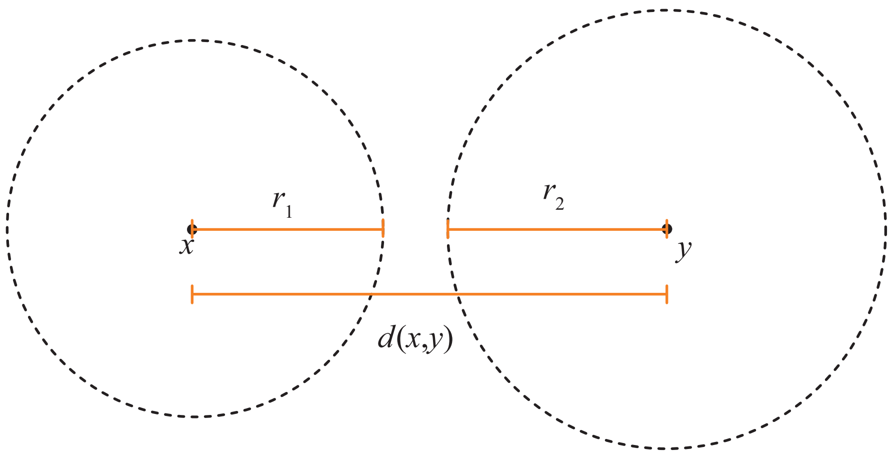


Figura 2.17

Prova (Por contradição):

Vamos supor que existe um ponto

$$z \in B(x,r_1) \cap B(y,r_2).$$

Então $d(x,z) < r_1$ e $d(y,z) < r_2$, e, portanto,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r_1 + r_2,$$

o que contraria a hipótese.

■

2.9 Conjuntos Abertos

Estudaremos nesta seção os conjuntos que são chamados de **abertos**. A nomenclatura provém do estudo dos intervalos abertos de $\mathbb{R}$. Em $\mathbb{R}$, é possível caracterizar os conjuntos abertos como aqueles que podem ser escritos como uma união disjunta, enumerável de intervalos abertos. Infelizmente não temos uma caracterização como esta para conjuntos abertos de um espaço métrico qualquer e, portanto, precisamos de uma definição que "funcione" em todos os casos. Para isto, utilizaremos o conceito de bola aberta. Vamos trabalhar, em geral, num espaço métrico (M,d), o que será omitido sempre que estiver claro no contexto. Vejamos:

Definição 2.7 (Interior de um Conjunto). Seja $A \subset M$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que um ponto $x \in A$ é um **ponto interior** de A, se existir uma bola aberta centrada em x e contida em A.

O conjunto de todos os pontos interiores de A é denominado **Interior** de A e é denotado por

$$\operatorname{Int}(A).$$

Simbolicamente, escrevemos

$$x \in \operatorname{Int}(A) \Leftrightarrow \exists B(x,r) \subset A.$$

Exemplo 2.14. Considere, em $\mathbb{R}^2$, o conjunto

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}.$$

Quais os pontos de A que são pontos interiores? Existem pontos de A que não são interiores? Quais?

A figura 2.18 ilustra este exemplo.

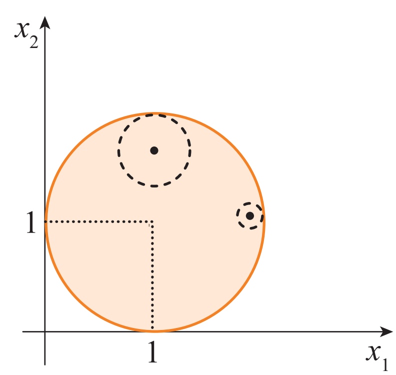


Figura 2.18

Todos os pontos internos à circunferência de centro em $(1,1)$ e raio 1 são pontos interiores. Os pontos sobre a circunferência pertencem ao conjunto A, mas não são pontos interiores.

Exemplo 2.15. Em $\mathbb{R}$, considere os intervalos:

a) Intervalo aberto (a,b);

b) Intervalo fechado $[a,b]$;

c) Intervalo aberto ilimitado $(a,+\infty)$;

d) Intervalo fechado ilimitado $[a,+\infty)$.

Em (a), todos os pontos são pontos interiores.

Em (b), temos que $\text{Int}([a,b])=(a,b)$. Os pontos a e b não são pontos interiores.

Em (c), todos os pontos são pontos interiores.

Em (d), temos que $\text{Int}([a,+\infty])=(a,+\infty)$. O ponto a não é ponto interior.

Exercício Proposto

5) Identifique, representando geometricamente, $\text{Int}(A)$, sendo:

a) $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / x_2\geq x_1\}$;

b) $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / x_1^2-x_2<0\}$;

c) $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / x_2>e^{x_1}\}$;

d) $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / x_1>0 \text{ e } x_2<\ln x_1\}$;

e) $A=\mathbb{Z}$ (conjunto dos inteiros em $\mathbb{R}$);

f) $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},n\right)$ em $\mathbb{R}$.

Exercício Resolvido

5) Mostre que $\text{Int}(A)\cap\text{Int}(B)=\text{Int}(A\cap B)$.

Resolução:

Seja $x\in\text{Int}(A)\cap\text{Int}(B)$. Então, pela definição de interior, existem r_1 e r_2 tais que $B(x,r_1)\subseteq A$ e $B(x,r_2)\subseteq B$. Pela propriedade de bolas abertas B4, $\exists r_3$ tal que $B(x,r_3)\subseteq B(x,r_1)\cap B(x,r_2)\subseteq A\cap B$.

Logo, $x\in\text{Int}(A\cap B)$ e provamos que $\text{Int}(A)\cap\text{Int}(B)\subseteq\text{Int}(A\cap B)$. A outra inclusão fica como exercício.

Exercício Proposto

6) Decida se $\text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$. Se for verdadeiro prove, caso contrário apresente um contra-exemplo.

Definição 2.8 (Conjunto Aberto). Seja $A \subset M$. Dizemos que A é **aberto** se todo ponto de A é um ponto interior de A.

Nota: O interior de A sempre está contido em A. Logo, se $A \subset \text{Int}(A)$, então A é aberto.

Exemplo 2.16. Toda bola aberta é um conjunto aberto.

De fato, esse resultado é uma consequência imediata da propriedade B3.

Exemplo 2.17. O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\}$ é aberto em $\mathbb{R}$, mas o conjunto $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$ não é aberto em $\mathbb{R}^2$.

A figura 2.19 ilustra esta situação

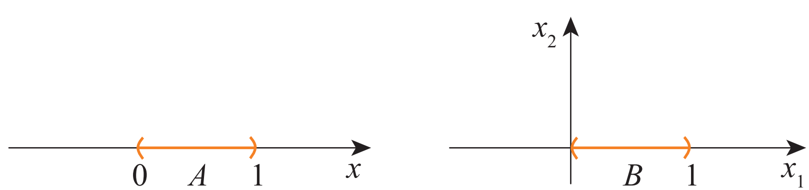


Figura 2.19

Observe que, com a métrica Euclidiana, uma bola aberta em $\mathbb{R}$ é um intervalo aberto e em $\mathbb{R}^2$ é o interior de um círculo.

Exemplo 2.18. Em $\mathbb{R}$, todo o conjunto aberto se escreve como uma união enumerável de intervalos abertos disjuntos.

O resultado acima é muito interessante. Para ter uma ideia da prova, suponha que $A \subseteq \mathbb{R}$ seja aberto. Para todo $x \in A$, seja I_x o maior intervalo aberto tal que $x \in I_x \subseteq A$. Note que se $x \neq y$, então

$I_x \cap I_y = \emptyset$ ou $I_x = I_y$. Então, $A = \bigcup I_x$ e esta união é enumerável, pois dentro de cada I_x podemos escolher um número racional distinto.

Em geral, provar que um conjunto, mesmo de $\mathbb{R}^2$, é aberto não é tarefa tão fácil. Às vezes precisamos ter alguma boa ideia para fazer isto. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 2.19. Mostrar que o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > y^2 + 1\}$ é aberto (ver figura 2.20) usando a definição de conjunto aberto.

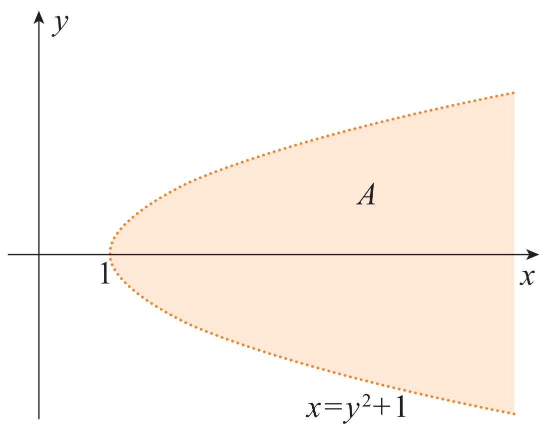


Figura 2.20

Para ver isto, seja $(a,b) \in A$. Sem perder a generalidade, supor $b \geq 0$. Tomar $\delta > 0$ tal que

$$a > (b+\delta)^2 + \delta + 1.$$

A existência de δ pode ser provada usando a fórmula de Bhaskara. Vamos mostrar que $B((a,b),\delta) \subset A$. Fazendo isso, segue que A é aberto.

Seja então $(x, y) \in B((a,b),\delta)$. Temos

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$$

e isto implica que $|x-a| < \delta$ e $|y-b| < \delta$. Assim,

$$-\delta < x - a < \delta,$$
$$-\delta < y - b < \delta.$$

Ou,

$$a-\delta < x < a+\delta,$$
$$b-\delta < y < b+\delta.$$

Logo, $x \geq a-\delta > (b+\delta)^2+\delta+1-\delta = (b+\delta)^2+1 > y^2+1$.

Isto é, $x > y^2+1$. Isso diz que $(x,y) \in A$ e, portanto, $B((a,b),\delta) \subset A$.

Propriedades dos Conjuntos Abertos:

Propriedade Ab1. O conjunto vazio e o espaço todo M são abertos.

Prova:
É imediata.

■

Propriedade Ab2. A interseção de dois abertos quaisquer é um aberto.

Prova:

Sejam A_1 e A_2 conjuntos abertos e

$$A_3 = A_1 \cap A_2.$$

Se $A_3 = \varnothing$, nada temos a provar.

Seja $z \in A_3$.

Devemos mostrar que existe uma bola aberta $B(z,r)$ tal que

$$B(z,r) \subset A_3.$$

Como $z \in A_1$ e A_1 é aberto, existe $r_1 > 0$ tal que

$$B(z,r_1) \subset A_1.$$

Da mesma forma, $\exists r_2 > 0$ tal que

$$B(z,r_2) \subset A_2.$$

Seja $r = \min\{r_1, r_2\}$.

Então, $B(z,r) \subset B(z,r_1) \subset A_1$ e $B(z,r) \subset B(z,r_2) \subset A_2$.

Logo, $B(z,r) \subset A_1 \cap A_2$ e, assim, $A_1 \cap A_2$ é aberto.

■

Propriedade Ab3. A união arbitrária de conjuntos abertos é um aberto.

Prova:

Sejam $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\tau}$ uma coleção de abertos e $A = \bigcup_{\alpha\in\tau} A_\alpha$.

Seja $z \in A$. Então, $z \in A_\alpha$, para algum α .

Como A_α é aberto, existe uma bola aberta $B(z,r) \subset A_\alpha \subset A$.

Logo, A é aberto.

■

Exercício Proposto

7) Usando indução matemática, mostre que a interseção finita de abertos é um aberto, isto é, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos abertos, então $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é aberto, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se necessário revise o capítulo 5, "Princípio de Indução" do texto de Fundamentos de Matemática I [2, Carvalho-Gimenez].

Nota: A interseção de uma coleção infinita de abertos pode não ser um aberto.

Exemplo 2.20. Em $\mathbb{R}$, tome $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Então, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$, que não é aberto.

2.10 Conjuntos Fechados

Conjuntos fechados são definidos simplesmente como conjuntos cujo complementar é aberto. No decorrer deste capítulo veremos algumas outras caracterizações de conjuntos fechados. Porém, vale a pena ressaltar que, mesmo em $\mathbb{R}$, descrever completamente quais são os conjuntos fechados de um espaço métrico é um problema complicado. Abaixo você pode ver o desenho do triângulo de Sierpinski em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (figura 2.21). Ambos são conjuntos fechados (pois os complementares são abertos) e dão uma ideia de quão complicados os conjuntos fechados podem ser.

Triângulo de Sierpinski
É uma generalização do conjunto de Cantor (o qual estudaremos mais tarde). Se você quiser saber mais, sugerimos uma busca na internet com as palavras "Triângulo de Sierpinski" ou, em inglês, "Sierpinski triangle"..

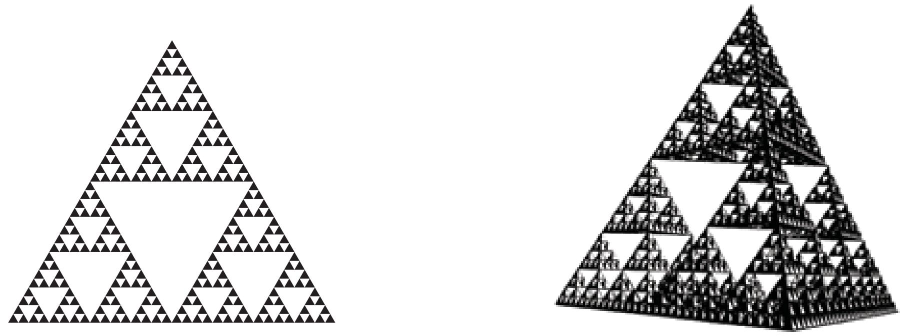


Figura 2.21

Definição 2.9. Seja $F \subset M$. Dizemos que F é **fechado** se o seu complementar, $C(F)$, for aberto.

Exemplo 2.21. O conjunto $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ é fechado em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.22. Os intervalos $[a,b]$, $(-\infty, b]$ e $[a, +\infty)$ são conjuntos fechados.

Exemplo 2.23. O conjunto $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ é fechado em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.24. Seja (M, d) espaço métrico onde d é a métrica descrita. Então todo subconjunto de M é fechado.

Nota: Assim como definimos bola aberta, podemos definir **bola fechada**.

$$B[x,r] = \{y \in M / d(y,x) \leq r\}$$

é uma bola fechada em M.

Em $\mathbb{R}^n$, podemos escrever:

$$B[x,r] = \{y \in \mathbb{R}^n / \| y - x \| \leq r\}.$$

Exercício Proposto

8) Mostre que toda bola fechada é um conjunto fechado.

Na linguagem cotidiana, quando nos referimos a portas, janelas, livros etc., as palavras "aberto" e "fechado" são antônimos. Porém, quando aplicadas a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ elas não o são.

- $\mathbb{R}^n$ e $\varnothing$ são abertos e fechados simultaneamente.
- Em um espaço métrico discreto (na métrica 0-1) todo conjunto é aberto e fechado ao mesmo tempo. Isto segue do fato que $B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$.
- Existem muitos conjuntos que não são abertos nem fechados. Um exemplo simples é o conjunto dos números racionais em $\mathbb{R}$.

Propriedades dos Conjuntos Fechados:

Propriedade Fe1. O conjunto $\varnothing$ e o espaço todo M são fechados.

Prova:

É imediata, pois $\varnothing$ e M são abertos.

■

Propriedade Fe2. A união de dois conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Prova:

Sejam F_1 e F_2 conjuntos fechados e $F = F_1 \cup F_2$.

Temos que

$$C(F) = C(F_1 \cup F_2) = C(F_1) \cap C(F_2).$$

Como F_1 e F_2 são fechados $C(F_1)$ e $C(F_2)$ são abertos,

pela propriedade Ab2, segue que $C(F)$ é aberto.

Logo, F é fechado.

■

Propriedade Fe3. A interseção de qualquer coleção de conjuntos fechados é fechada.

Prova:

Sejam $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\tau}$ uma coleção de conjuntos fechados e $F = \bigcap F_\alpha$.

Temos

$$C(F) = C(\bigcap F_\alpha) = \bigcup [C(F_\alpha)].$$

Como F_α é fechado, $C(F_\alpha)$ é aberto.

Pela propriedade Ab3, segue que $C(F)$ é aberto.

Logo, F é fechado.

■

Exercícios Propostos

9) Mostre que a união finita de fechados é um fechado (use indução matemática).

10) Em $\mathbb{R}^n$ todo conjunto unitário é fechado? E todo conjunto finito? Esses resultados são válidos para qualquer espaço métrico?

11) Através de um exemplo, mostre que a união de uma família arbitrária de fechados pode não ser fechada.

2.11 Pontos de Acumulação

Intuitivamente, um ponto x é um ponto de acumulação de um conjunto A se existirem outros pontos de A arbitrariamente próximos de x.

Temos a seguinte definição:

Definição 2.10. Seja $A \subset M$. Um ponto $x \in M$ é um **ponto de acumulação** de A se toda bola aberta centrada em x contiver algum ponto de A, que seja distinto de x.

Denotamos o conjunto dos pontos de acumulação de A por A'.

Simbolicamente, escrevemos:

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap \{A - \{x\}\} \neq \varnothing.$$

Observe que x não precisa pertencer a A para ser ponto de acumulação.

Mesmo sem ter sido usada esta nomenclatura, você já entrou em contato com o conceito de ponto de acumulação, quando você estudou limite de funções.

A nota da página 79 do texto de Cálculo I [5, Gimenez-Starke],

> "[...] calcular o limite de uma função num ponto b é examinar o comportamento da função em pontos extremamente próximo de b [...]",

traz implícita a exigência de que o ponto b deve ser um ponto de acumulação do domínio da função.

Exemplo 2.25. Em $\mathbb{R}$ um conjunto unitário não tem pontos de acumulação. Um conjunto finito também não tem pontos de acumulação.

Exemplo 2.26. Em $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}' = \varnothing$.

Exemplo 2.27. Seja A o intervalo $(0,1)$ em $\mathbb{R}$. Então, A' é o intervalo fechado $[0,1]$.

Exemplo 2.28. Seja $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ em $\mathbb{R}$. Então, $A' = \{0\}$.

Exemplo 2.29. Considere, em $\mathbb{R}$, o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$.

Qual é o conjunto $\mathbb{Q}'$?

A resposta é $\mathbb{R}$, isto é, todo número real a é um ponto de acumulação de $\mathbb{Q}$.

De fato, seja $x \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

Devemos mostrar que a bola aberta

$$B(x,r) = (x - r, x + r)$$

contém pelo menos um racional distinto de x.

Como o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é ilimitado em $\mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{r}$ ou, reescrevendo, $\frac{1}{n} < r$.

Os racionais $\frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$ dividem a reta real em intervalos de comprimento $\frac{1}{n} < r$, como ilustrado na figura 2.22.

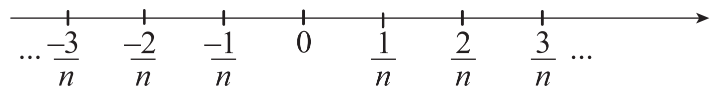


Figura 2.22

Logo, pelo menos um desses números racionais estará entre $x-r$ e $x+r$ e será distinto de x, pois o comprimento do intervalo $(x-r, x+r)$ é $2r > \frac{2}{n}$.

Para ter uma ideia de M, tente plotar o gráfico de $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no computador.

Exemplo 2.30. Em $\mathbb{R}^2$, seja $A = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right) : \ 0 < x < 1 \right\}$.

Então $A' = A \cup \{(0,y) : -1 \le y \le 1\} \cup \{(1, \operatorname{sen} 1)\}$.

Proposição 2.1. $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $F' \subset F$.

Prova:

$\Rightarrow$) F fechado $\Rightarrow$ $F' \subset F$.

Vamos usar a seguinte propriedade de conjuntos

$$A \subset B \Leftrightarrow C(B) \subset C(A),$$

onde $C(A)$ denota o complementar de A em M.

Seja $x \in C(F)$. Como $C(F)$ é aberto, existe $B(x,r) \subset C(F)$. Portanto, $B(x,r) \cap F = \varnothing$, o que implica que $x \in C(F')$ (x não é ponto de acumulação de F).

Logo, $F' \subset F$.

$\Leftarrow$) $F' \subset F \Rightarrow$ F é fechado.

Vamos mostrar que $C(F)$ é aberto.

Seja $x \in C(F)$. Como $F' \subset F$, então $x \notin F'$.

Portanto, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap F = \varnothing$, o que implica que $B(x,r) \subset C(F)$.

Logo, $x \in \mathrm{Int}(C(F))$ e, dessa forma, $C(F)$ é aberto.

Segue que F é fechado.

■

Exercícios Propostos

12) Encontrar S', sendo $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y < x^2 - 1\}$.

13) Decida quais dos seguintes conjuntos são fechados em $\mathbb{R}$:

a) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$;

b) $B = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$;

c) $C = \left\{1, 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots\right\}$;

d) $D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right\}$;

e) Domínio de f, sendo $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$;

f) Imagem de g, sendo $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

g) O conjunto de Cantor em $\mathbb{R}$.

2.12 Fecho de um Conjunto

Em linguagem cotidiana (ou coloquial), podemos pensar no interior de um conjunto A como o "maior" aberto contido em A. De forma análoga, podemos pensar no "menor" fechado que contém A.

Temos a definição:

Definição 2.11. Seja $A \subset M$. O **fecho** de A, denotado por $\overline{A}$, é o conjunto obtido pela união de A com seus pontos de acumulação.

Simbolicamente, escrevemos:

i) $\overline{A} = A \cup A'$;

ii) $a \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0$, $B(a,r) \cap A \neq \varnothing$.

Proposição 2.2. O fecho de qualquer conjunto é sempre um conjunto fechado.

Prova:

Seja $X \subset M$. Vamos mostrar que $C(\overline{X})$ é aberto.

Seja $a \in C(\overline{X})$. Então $a \notin X$ e $a \notin X'$ e, portanto, existe $r > 0$ tal que

$$B(a,r) \cap X = \varnothing \text{, isto é, } B(a,r) \subset C(X).$$

Vamos mostrar, agora, que $B(a,r) \subset C(\overline{X})$.

De fato, seja $y \in B(a,r)$. Pela propriedade de bolas abertas B3, existe $r_1 > 0$ tal que

$$B(y,r_1) \subset B(a,r) \subset C(X).$$

Assim, $B(y,r_1) \cap X = \varnothing$, o que implica que y não é ponto de acumulação de X. Segue que $y \in C(\overline{X})$.

Concluímos, assim, que $a \in \text{Int}(C(\overline{X}))$. Logo, $C(\overline{X})$ é aberto e, portanto, $\overline{X}$ é fechado.

■

Formalmente, a noção de que o fecho de A é o menor fechado que contém A é descrita pelo teorema abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [16, Rudin].

Teorema 2.1. Seja $A \subset M$. Então, $\overline{A}$ é o menor fechado que contém A, isto é,

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fechado}}} F.$$

Prova:

Note que o resultado segue do fato que se $A \subseteq B$ então $A' \subseteq B'$.

Exercício Resolvido

6) Determine os pontos de acumulação e o fecho de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

a) $\mathbb{Z}$

Resolução:

Note que $\mathbb{Z}$ não possui ponto de acumulação, pois para todo $n \in \mathbb{Z}$, $B\left(n, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$. Disto segue que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ (veja definição 2.11) e, portanto, $\mathbb{Z}$ é fechado.

b) $\mathbb{Q}$

Resolução:

Note que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, pois dado um número real x qualquer, toda bola aberta $B(x, \varepsilon)$ contém racionais diferentes de x. Pela definição 2.11, segue que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

c) $(0,2)$

Resolução:

Primeiro observe que se $x \notin [0,2]$ então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \cap (0,2) \neq \varnothing$ e, portanto, x não é ponto de acumulação de $(0,2)$. Por outro lado, é fácil ver que se $x \in [0,2]$, então $B(x,\varepsilon) \cap (0,2) \neq \varnothing$ para todo $\varepsilon > 0$. Logo, $(0,2)' = [0,2]$. Segue da definição 2.11 que $\overline{(0,2)} = [0,2]$.

Exercícios Propostos

14) Determine o fecho dos seguintes conjuntos em $\mathbb{R}$:

a) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$;

b) $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, n\right)$.

15) Mostre que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Dê um exemplo para mostrar que a inclusão no outro sentido não é válida.

16) Seja (M,d) um espaço métrico. É verdade que todos os pontos de $B[x,r]$ são pontos de acumulação de $B(x,r)$?

Exercício Resolvido

7) Seja $A \subset M$. Mostrar que

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \inf\{d(x,y) / y \in A\} = 0.$$

Prova:

$\Rightarrow$) Sejam $x \in \overline{A}$ e $\alpha = \inf\{d(x,y) / y \in A\}$.

Se $x \in A$, então $\alpha = 0$ (trivial).

Se $x \notin A$ mas $x \in A'$, então $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

Assim, $\forall r > 0$, existe $y \in A$ tal que $d(x,y) < r$.

Como $r > 0$ é qualquer, segue de $\alpha = 0$.

$\Leftarrow$) Seja $x \in M$ tal que $\alpha = \inf\{d(x,y) / y \in A\} = 0$.

Se $x \in A$, nada a provar.

Se $x \notin A$, pela definição de ínfimo, para qualquer $r > 0$, existe $y \in A$ tal que $d(x,y) < r$.

Segue que $y \in A \cap B(x,\varepsilon)$ e, então, $x \in A' \subset \overline{A}$.

■

Usando o conceito de fecho de um conjunto, podemos facilmente introduzir a definição de **conjunto denso**. Vejamos:

Definição 2.12. Seja $A \subset M$. Dizemos que A é **denso** em M se, e somente se, $\overline{A} = M$.

Intuitivamente, um conjunto A é denso em M quando seus pontos estiverem espalhados por toda parte de M.

Em $\mathbb{R}$, um conjunto A é denso quando todo intervalo aberto, por menor que seja o seu comprimento, contiver pontos de A.

Exemplo 2.31. $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.32. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.33. $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ não são densos em $\mathbb{R}$.

Vamos finalizar esta unidade com o conceito de **fronteira de um conjunto**. Este conceito pode ser visualizado intuitivamente no $\mathbb{R}^2$, onde para muitos conjuntos a fronteira desempenha o papel de limitante, como pode ser observado no mapa da figura 2.23.

Figura 2.23

Temos a seguinte definição.

Definição 2.13. Seja $A \subset M$, $A \neq \varnothing$. Dizemos que um ponto $x \in M$ é um **ponto de fronteira** de A se toda bola aberta centrada em x contém pontos de A e do complementar $C(A)$.

O conjunto de todos os pontos de fronteira de A é denominado **Fronteira** de A e é denotado por $Fr(A)$.

Simbolicamente, escrevemos

$$x \in \mathrm{Fr}(A) \Leftrightarrow \forall r > 0, \begin{cases} B(x,r) \cap A \neq \varnothing \\ \text{e} \\ B(x,r) \cap C(A) \neq \varnothing \end{cases}.$$

A figura 2.24 ilustra esta definição.

Exemplo 2.34. Encontrar Fr(A), sendo $A \subset \mathbb{R}^2$, o conjunto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - y^2 < 1\}.$$

O conjunto A está representado na figura 2.25. Observe que

$$x^2 - y^2 = 1$$

é a equação de uma hipérbole. A fronteira de A é o gráfico desta hipérbole, isto é,

$$\mathrm{Fr}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - y^2 = 1\}.$$

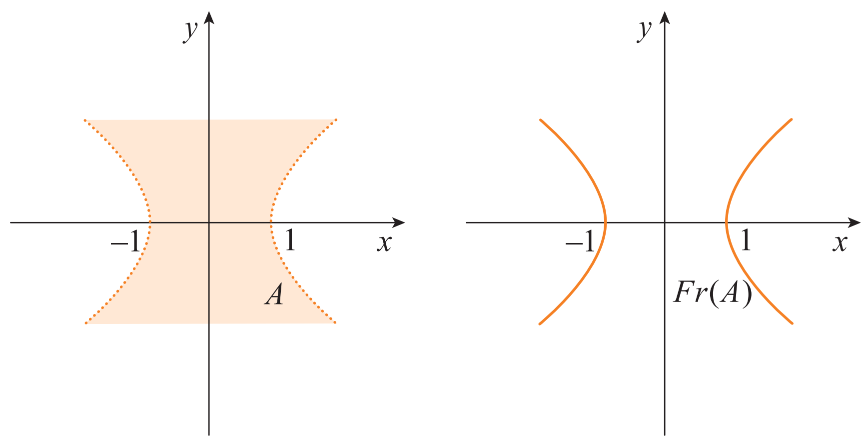


Figura 2.25

Exemplo 2.35. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto unitário. Veja que neste caso, $\mathrm{Fr}(A) = A$.

Exercícios Propostos

17) Verifique se são verdadeiras ou falsas as sentenças:

a) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Fr}(A) \subset \mathrm{Fr}(B)$;

b) $x \in \mathrm{Fr}(A) \Rightarrow x \in A'$, isto é, x é um ponto de acumulação de A;

c) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

18) Identifique e represente geometricamente a fronteira dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 1\}$;

b) $\mathrm{Int}(A)$ (sendo A o conjunto do item a);

c) $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$;

d) $B = [0,1]$ em $\mathbb{R}$;

e) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > x^2 - 4x + 3\}$.

Propriedades da Fronteira:

Propriedade Fr1. $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{C(A)}$.

Prova:

$$x \in \mathrm{Fr}(A) \Leftrightarrow \forall r > 0, \begin{cases} B(x,r) \cap A \neq \varnothing \\ \text{e} \\ B(x,r) \cap C(A) \neq \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ \text{e} \\ x \in \overline{C(A)} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{C(A)}$$

■

Propriedade Fr2. $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)$.

Prova:

$\Leftarrow$) Seja $x \in \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)$.

Se $x \in \mathrm{Int}(A)$, nada a provar, pois $\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.

Se $x \notin \mathrm{Int}(A)$ e $x \in \mathrm{Fr}(A)$, temos que $\forall \varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

Logo, $x \in \overline{A}$.

Concluímos, então, que $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A}$.

$\Rightarrow$) Seja $x \in \overline{A}$. Temos duas possibilidades exclusivas

i) $x \in A$, ou

ii) $x \notin A$ e $x \in A'$.

i) $x \in A$. Novamente temos duas possibilidades exclusivas

$$x \in \mathrm{Int}(A) \text{ ou } x \notin \mathrm{Int}(A).$$

Se $x \in \mathrm{Int}(A)$, nada a provar.

Suponha que $x \notin \mathrm{Int}(A)$. Então, toda bola aberta centrada em x contém pontos do complementar de A.

Como $x \in A$, temos

$$B(x,r) \cap A \neq \varnothing \text{ e } B(x,r) \cap C(A) \neq \varnothing, \ \forall r > 0.$$

Logo, $x \in \mathrm{Fr}(A)$.

ii) $x \notin A$ e $x \in A'$.

Como x é ponto de acumulação de A, qualquer bola aberta centrada em x contém pontos de A. Como $x \notin A$, o mesmo ocorre com $C(A)$.

Logo, $x \in \mathrm{Fr}(A)$.

Concluímos, então, que $\overline{A} \subset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)$.

■

Propriedade Fr3. Para todo conjunto $A \subset M$, $\mathrm{Fr}(A)$ é um conjunto fechado.

Prova:

Segue diretamente de Fr1, pois a intersecção de fechados é fechada.

■

Para finalizar, observe a figura 2.26, onde está representado o subconjunto de $\mathbb{R}^2$,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 1\}.$$

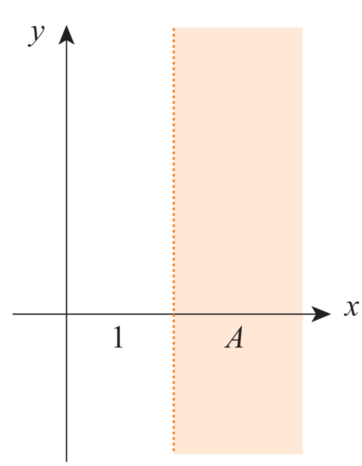


Figura 2.26

Temos

$$\text{Fr}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 1\}$$

$$\text{Int}(C(A)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 1\} .$$

Dado um ponto qualquer $p \in \mathbb{R}^2$, exatamente uma das três possibilidades a seguir ocorre:

$$p \in \text{Int}(A) \text{ ou } p \in \text{Fr}(A) \text{ ou } p \in \text{Int}(C(A)) .$$

Esse resultado pode ser generalizado.

Proposição 2.3. Seja $A \subset M$. Dado $p \in M$, tem-se 3 possibilidades exclusivas:

$$p \in \text{Int}(A) \text{ ou } p \in \text{Fr}(A) \text{ ou } p \in \text{Int}(C(A)) .$$

Assim, a ideia intuitiva de que a fronteira desempenha um papel de limitante entre um conjunto e seu exterior, como ilustrado na figura 2.23, vale para qualquer conjunto de um espaço métrico.

Exercícios Propostos

19) Dê exemplos de conjuntos A em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, identificando:
$$\text{Int}(A),\ A',\ \overline{A},\ \text{Fr}(A),\ C(A),\ \text{Int}(C(A)) .$$

20) Dê exemplos para ilustrar que:

a) $\text{Fr}(A) \subset \text{Fr}(B)$ mas $A \not\subset B$;

b) Um ponto de fronteira não é ponto interior.

Exercícios Complementares

1) Verifique quais das seguintes funções são métricas em $\mathbb{R}$:

a) $d(x, y) = |x + y|$;

b) $d(x, y) = |x| - |y|$;

c) $d(x, y) = (x - y)^2$.

2) Verifique quais das seguintes funções são métricas em $\mathbb{R}^2$:

a) $d(x, y) = 3|y_1 - x_1| + 3|y_2 - x_2|$;

b) $d(x,y) = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|$;

sendo $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

3) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente. Seja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Mostre que d é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

4) Seja X um conjunto não vazio e

$$M = \{f : X \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ é limitada}\}.$$

Em M considere a métrica

$$d(f,g) = \sup_{x \in X}\{|f(x) - g(x)|\}.$$

Tomando $X = [1,3]$, $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$, determine $d(f,g)$.

5) Em $\mathbb{R}$, considere a métrica usual. Verifique que valem as igualdades:

a) $d(p, \mathbb{Q}) = 0$, $\forall p \in \mathbb{R}$;

b) $d(\mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 0$;

Se a métrica considerada sobre $\mathbb{R}$ fosse a zero-um, estas igualdades continuariam válidas?

6) Seja A um conjunto não vazio de um espaço métrico. Mostre que $\text{diam}(A) = 0 \Leftrightarrow A$ é unitário.

7) Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Verifique que

$$0 \le d(a, \mathbb{Z}) \le \frac{1}{2}, \ \forall a \in \mathbb{R},$$

onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros.

8) Sejam p um ponto de um espaço métrico e $n \in \mathbb{N}$. Prove que a interseção das bolas abertas de centro em p e raio $\frac{1}{n}$ é o conjunto unitário $\{p\}$, isto é,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(p, \frac{1}{n}\right) = \{p\}.$$

9) Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$. Tomando $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual e A com a métrica induzida, desenhe as bolas abertas e fechadas que seguem:

a) $B(o,1)$;

b) $B_A(o,1)$;

c) $B[o,1]$;

d) $B_A[o,1]$;

onde B_A denota uma bola em A e o denota a origem.

10) Determine o interior dos seguintes conjuntos em $\mathbb{R}$:

a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

b) $\mathbb{Q} = \left\{ x = \dfrac{p}{q} / p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$;

c) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

d) Intervalo aberto $(1, 2)$;

e) $(1, 2) \cap \mathbb{Q}$;

f) Intervalo $[1, 2)$;

g) Intervalo fechado $[1, 2]$;

h) $[1, 2] \cup \{3\}$.

11) Identifique quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, com a métrica usual, são abertos e/ou fechados ou nem abertos nem fechados:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$;

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$;

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < 2 \text{ e } |y| \leq 2\}$;

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ e } y = 0\}$;

e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 1\}$;

f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x^2 > 1\}$;

g) $G = B(0, 2) \cup B(1, 2)$.

12) Determine os pontos de acumulação e o fecho de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $(0,2)$, $[0,2)$, $[0,2]$, $\mathbb{Q}\cap(0,1)$, $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$.

13) Num espaço métrico qualquer (M,d), mostre que se $A\subset M$ é aberto e $a\in M$, então $A\setminus\{a\}$ é aberto.

14) Seja (M,d) um espaço métrico onde M é finito. Prove que todo subconjunto de M é aberto.

15) Sejam x_n não vazios em $\mathbb{R}$. Dê exemplos mostrando que $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ pode ser vazio se os F_n forem apenas fechados ou apenas limitados.

16) Seja X' o conjunto dos pontos de acumulação de X. Dê exemplos de conjuntos X tais que:

a) X e X' sejam distintos;

b) X seja subconjunto próprio de X';

c) X' seja subconjunto próprio de X;

d) $X'=X$.

17) Com suas palavras, dê o significado das expressões:

a) $a\in X$ não é ponto interior de X;

b) X não é um conjunto aberto;

c) F não é um conjunto fechado;

d) $a\in X$ não é um ponto de fronteira;

e) $a\in X$ não é um ponto de acumulação de X.

18) Dê exemplos, em $\mathbb{R}^2$, de:

a) conjuntos abertos;

b) conjuntos fechados;

c) conjuntos nem abertos nem fechados.

19) Determine a fronteira dos conjuntos:

a) Em $\mathbb{R}: A_1 = [a_1; +\infty)$; $A_2 = [0,1) \cup \{3\}$; $A_3 = \mathbb{Z}$;

b) Em $\mathbb{R}^2: B_1 = \{(x,y) / xy = 1\}$; $B_2 = \{(x,y) / x > 0 \text{ e } y > 0\}$.

20) Encontre os pontos de acumulação dos seguintes conjuntos em $\mathbb{R}^2$:

a) $A = \{(m,n) / m,n \in \mathbb{Z}\}$;

b) $B = \{(p,q) / p,q \text{ são racionais}\}$;

c) $C = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) / n \in \mathbb{N} \right\}$;

d) $D = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) / m,n \in \mathbb{N} \right\}$;

e) $D = \left\{ \left(\frac{m}{n}, \frac{1}{n} \right) / m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$.

21) Prove que, em $\mathbb{R}^n$, vale:

a) $\text{Int}(A) = A \setminus \text{Fr}(A)$;

b) $\overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus \text{Int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

22) Quais afirmações são verdadeiras em um espaço métrico M? Justifique suas respostas.

a) $\text{Int}(\overline{A}) = \text{Int}(A)$;

b) $\overline{A} \cap A = A$;

c) $\overline{\text{Int}(A)} = A$;

d) $\text{Fr}(\overline{A}) = \text{Fr}(A)$;

e) $\text{Fr}(A) \subset M \setminus A$ se A é aberto.

23) Prove que em um espaço métrico, tem-se:

a) $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(M \setminus A)$;

b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;

c) $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$;

d) $\text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$;

e) $\text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.

Resumo

Neste capítulo você se familiarizou com as noções topológicas básicas em um espaço métrico, tais como: bolas abertas, conjuntos abertos, conjuntos fechados, pontos de acumulação, etc. Muitos exemplos foram desenvolvidos no espaço $\mathbb{R}^n$, em especial em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, de modo a desenvolver a sua intuição geométrica. Foram apresentados exercícios resolvidos e propostos, fundamentais para o seu aprendizado.

Capítulo 3

Convergência

3 Convergência

Neste capítulo iremos estudar sequências. Iniciaremos revendo brevemente o conceito de ***sequência de números reais****. A seguir, introduziremos a definição de* ***sequência em um espaço métrico****.*

Nosso interesse é estudar o comportamento de uma sequência. Em particular, queremos entender o comportamentodo n-ésimo termo da sequência, quando n tende a infinito. Para isso, precisamos definir a noção de ***convergência****.*

3.1 Sequências de Números Reais

Para motivar os estudos desta unidade, propomos o seguinte problema:

Que distância podemos atingir com uma pilha de livros (que pode ser infinita) equilibrada sobre o beirado de uma mesa antes desta pilha cair?

Assumiremos que todos os livros têm largura 2 e peso 1 e que podemos usar apenas um livro por "andar". Este problema é conhecido como o problema da "Torre Inclinada de Lire" e possui mais de uma solução possível.

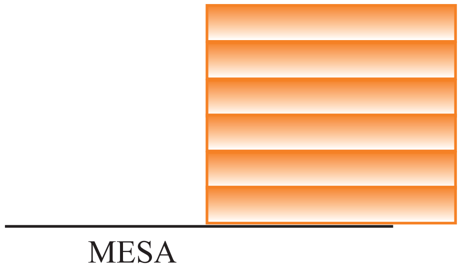


Figura 3.1

A primeira ideia que nos vem é simplesmente empilhar os livros verticalmente e equilibrar no beirado da mesa, de forma que parte deles fique para fora da mesa (Figura 3.1).

Apesar de este método funcionar, iremos atingir uma distância de, no máximo, aproximadamente 1. Poderíamos, então, pensar em usar contrapesos para atingir distâncias maiores.

Porém, o problema propõe que usemos apenas um livro por andar e, portanto, não podemos seguir esta ideia. Vamos, então, atacar o problema usando a matemática que já aprendemos nos cálculos.

Primeiro, lembramos que o centro de gravidade combinado c de dois objetos com massa M_1 e M_2, localizados em x_1 e x_2, respectivamente (Figura 3.2), é dado por

$$c = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2}{M_1 + M_2}.$$

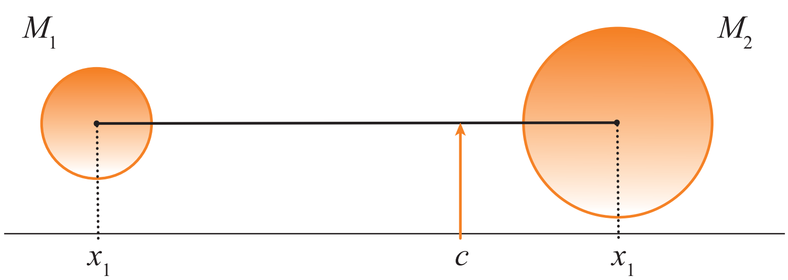


Figura 3.2

Para modelar nosso problema, vamos imaginar uma reta real se extendendo para a direita com origem exatamente no beirado da mesa (Figura 3.3).

Figura 3.3

Podemos assumir que nossa pilha de livros não cairá desde que o centro de gravidade da pilha com n-livros, c_n, seja menor ou igual a zero. Em particular, o mais à direita possível que o centro pode estar é na origem. Vamos, então, empilhar nossos livros da seguinte maneira:

Começamos com a mesa vazia e colocamos um livro sobre a mesa, de forma que sua extremidade direita esteja no zero. Como o livro tem largura 2 e massa 1, o centro de gravidade é -1. Podemos, então, deslocar o livro para a direita até que o centro de gravidade dele esteja sobre o zero e ele não cairá da mesa (Figura 3.4).

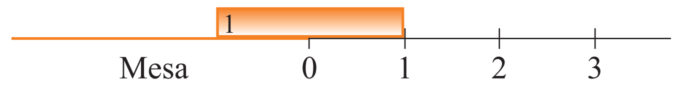


Figura 3.4

Portanto, a extremidade deste livro já alcançou a distância $D_1 = 1$ e o livro tem centro de gravidade no 0. Para colocarmos o próximo livro, levantamos o livro existente verticalmente e colocamos o segundo livro como feito anteriormente, ou seja, com a sua extremidade direita na origem. A pilha continuará equilibrada (Figura 3.5):

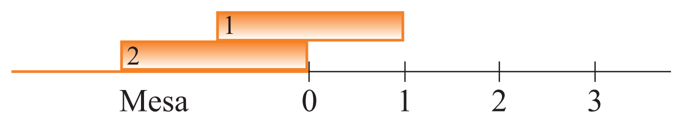


Figura 3.5

e o centro de gravidade desta pilha de dois livros é:

$$c = \frac{x_2 M_2 + c_1 M_1}{M_2 + M_1} = \frac{(-1)\cdot 1 + 0 \cdot 1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Agora, deslocamos esta pilha para a direita até que o seu centro de gravidade esteja no 0, ou seja, podemos deslocar a pilha por $\frac{1}{2}$ e teremos alcançado a distância $D_2 = 1 + \frac{1}{2}$ do beirado da mesa (Figura 3.6):

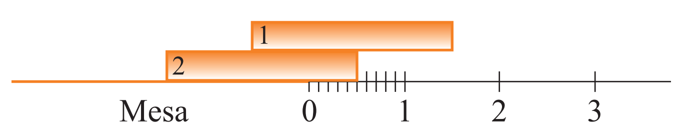


Figura 3.6

Procedendo desta maneira sucessivamente, teremos que uma pilha de n livros alcança a distância de $D_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Este é o termo geral da sequência das somas parciais da série harmônica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (mas não iremos estudar esta série neste curso). A divergência da mesma significa que, somando termos suficientes da mesma, podemos ultrapassar qualquer número real positivo. Ou seja, podemos atingir qualquer distância com nossa pilha de livros, desde que tenhamos paciência para empilhar o número suficiente de livros. A tabela abaixo mostra a quantidade de livros necessária para atingir determinada distância:

Distância Atingida	Livros Necessários
2	N = 4
4	N = 31
10	N = 12.367
22	N = 2.012.783.315
40	N = 132.159.290.357.566.703

Na figura 3.7 temos uma foto de um experimento feito com blocos de madeira. Você pode tentar o mesmo em casa!

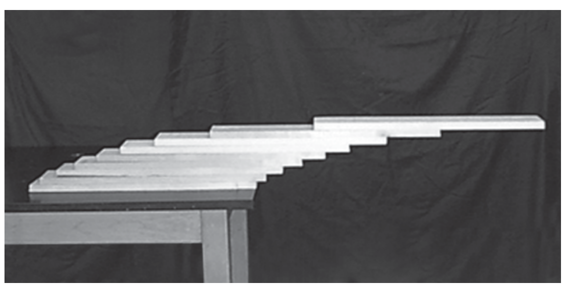


Figura 3.7

Este exemplo ilustrou como o trabalho com sequências infinitas é interessante. Esperamos que você fique entusiasmado e estude com afinco os conteúdos que serão explorados nesta unidade.

Uma sequência de números reais nada mais é do que uma lista infinita de números reais, arranjados em uma certa ordem. Mais precisamente, temos uma sequência (infinita) se para cada número natural n associamos um número real x_n, conforme definição que segue.

Definição 3.1. Uma **sequência de números reais** é uma função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\to x_n . \end{aligned}$$

Denotamos: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou simplesmente (x_n).

Exemplo 3.1. $(2, 4, 6, 8, \ldots) = (2n)$.

Exemplo 3.2. $(\cos\pi, \cos 2\pi, \cos 3\pi, \ldots) = (\cos n\pi)$.

Exemplo 3.3. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)$.

Na disciplina de Cálculo I, você estudou as sequências de números reais. Antes de continuar seu estudo, é interessante você revisar a seção 1.3 do livro-texto da referida disciplina.

Generalizando, podemos pensar em sequências no $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ... , $\mathbb{R}^n$, ou em um espaço métrico qualquer.

Exemplo 3.4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$

$$n \to \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}\right).$$

Os termos desta sequência são formados por pares ordenados de números reais, como segue:

$$\left(\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \cdots\right).$$

Exemplo 3.5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$

$$n \to \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Neste caso, os termos da sequência são formados por ternas ordenadas de números reais. Temos

$$\left((1,1,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \cdots\right).$$

3.2 Sequências em um Espaço Métrico

Definição 3.2. Seja (M, d) um espaço métrico. Uma **sequência** em M é uma função

$$f : \mathbb{N} \to M$$
$$n \to x_n.$$

Notação. Usamos a mesma notação utilizada para sequências de números reais, ou seja: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou (x_n).

O conjunto dos termos da sequência será denotado por $f(\mathbb{N})$, ou $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Nota: Veja que o conjunto dos termos da sequência difere da sequência, como ilustrado no seguinte exemplo:

Sequência: $(1+(-1)^n) = (0,2,0,2,\ldots)$.

Conjunto dos termos: $\{0,2\}$.

3.3 Limite de uma Sequência

A figura 3.8, ao lado, mostra Weierstrass (à direita) explicando o conceito de **convergência uniforme** para Cauchy, que está meditando sobre o contraexemplo de Abel. A seguir, introduziremos o conceito de **convergência**, porém o conceito de convergência uniforme (o qual é muito útil para o estudo de convergência de sequências e séries de funções) só é visto em cursos mais avançados.

Figura 3.8 - O conceito de convergência uniforme.

Para a sequência de números reais

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right),$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Intuitivamente, observando a figura 3.9, vemos que os termos da sequência tornam-se arbitrariamente próximos de zero quando n tende a infinito.

Figura 3.9

Formalmente, verifica-se a definição: $\forall \varepsilon > 0$, se $n_0 \in \mathbb{N}$ e $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$, então

$$|x_n - 0| < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0.$$

Esta definição pode ser visualizada na figura 3.10. A partir de n_0, todos os termos da sequência situam-se num intervalo aberto de centro em 0 e raio ε.

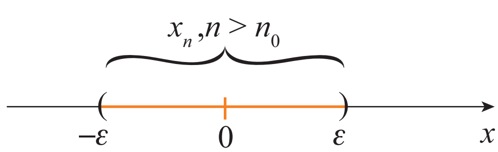


Figura 3.10

Também podemos dizer que, para $n > n_0$, a distância entre x_n e 0 é menor que ε.

Nota: Lembre que $|x_n - a|$ nos dá a distância de x_n até a.

Como podemos generalizar a definição de **limite de uma sequência** para um espaço métrico qualquer?

Definição 3.3. Sejam (M, d) um espaço métrico e (x_n) uma se-wquência em M. Dizemos que (x_n) **converge** para $a \in M$ se para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, a) < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0.$$

Escrevemos: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ou $x_n \to a$, ou ainda, $\lim x_n = a$.

Se (x_n) não converge, ela é dita **divergente**.

Nota: Utilizando bolas abertas, podemos escrever:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall r > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(a, r)$ para todo $n > n_0$.

A visualização geométrica é ilustrada na figura 3.11.

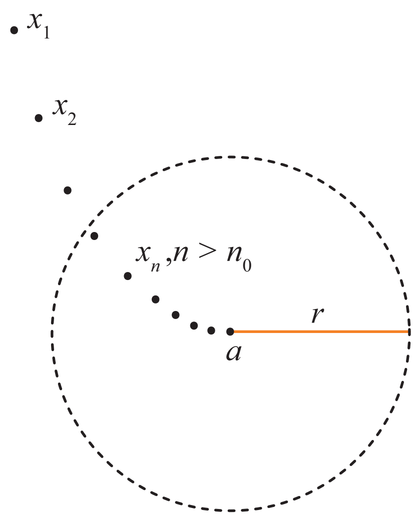


Figura 3.11

Exemplo 3.6. Seja (M,d) um espaço métrico. A sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_k, p, p, p, \ldots)$ é dita sequência estacionária.

Temos que $x_n \to p$.

De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 = k \in \mathbb{N}$. Para todo $n > n_0$, temos $d(x_n, p) = d(p,p) = 0 < \varepsilon$.

Exemplo 3.7. Seja $M = \mathbb{R}$, com a métrica usual. A sequência $\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)$ converge para o número real 1. Vejamos por quê: dê $\varepsilon > 0$.

Devemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{3n}{3n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

Agora, note que as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$\left|\frac{3n}{3n+1} - 1\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{3n - 3n - 1}{3n+1}\right| < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{3n+1} < \varepsilon,$$

$$3n + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right).$$

Assim, se tomarmos n_0 como o primeiro natural maior que $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$, temos que $n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{3n}{3n+1}-1\right| < \varepsilon$, como desejado.

Exemplo 3.8. Seja $M=\mathbb{R}^2$, com a métrica usual (isto é, a métrica Euclidiana). A sequência cujo termo geral é o par ordenado $(x_n, y_n) = \left(1+\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge para o par ordenado $(1,0)$.

Para simplificar a notação, denotamos: $z_n = (x_n, y_n)$; $a = (1,0)$.

Temos:

$$\begin{aligned} d(z_n, a) &= \sqrt{(x_n-1)^2+(y_n-0)^2} \\ &= \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}-1\right)^2+\left(-\frac{1}{n}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Nota: Observe que $(d(z_n,a))$ é uma sequência de números reais que converge para zero, pois é o produto da sequência $\frac{1}{n}$ (que converge para zero) pela constante $\sqrt{2}$ (ver teorema 7, da seção 1.3.4 do livro-texto de Cálculo I).

Logo, $\left(1+\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right) \to (1,0)$.

Exemplo 3.9. Seja (M,d) um espaço métrico. A sequência $(x_n) = (a,b,a,b,a,b,\ldots)$, onde $a \neq b$ é divergente.

Exemplo 3.10. Em $\mathbb{R}^2$, a sequência $(z_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$.

Exercício Proposto

1) Usando a definição, comprove o resultado do exemplo 3.10.

Nota: Segue da definição de limite de sequência que, em um espaço métrico qualquer, uma sequência $x_n \to a$ se, e somente se, a sequência de números reais $d(x_n, a) \to 0$.

Nos exemplos 3.8 e 3.10, temos sequências convergentes em $\mathbb{R}^2$. Observe os resultados e se questione:

Em $\mathbb{R}^2$, uma sequência $(x_n, y_n) \to (a,b)$ se, e somente se, $x_n \to a$ e $y_n \to b$?

A resposta é positiva. Temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1. A sequência $((x_1, y_1),(x_2, y_2),\ldots,(x_n, y_n),\ldots)$ converge para (a,b) em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, a sequência (x_n) converge para a e a sequência (y_n) converge para b em $\mathbb{R}$.

Prova:

$\Rightarrow$) Hipótese: $(x_n, y_n) \to (a,b)$.

Tese: $x_n \to a$ e $y_n \to b$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n, y_n) \to (a,b)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d((x_n, y_n),(a,b)) < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Então, para todo $n > n_0$, temos:

$$|x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = d((x_n, y_n),(a,b)) < \varepsilon$$

e

$$|y_n - b| = \sqrt{(y_n - b)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = d((x_n, y_n),(a,b)) < \varepsilon$$

Logo, $x_n \to a$ e $y_n \to b$.

$\Leftarrow$) Hipótese: $x_n \to a$ e $y_n \to b$.

Tese: $(x_n, y_n) \to (a,b)$.

Seja $\varepsilon > 0$.

Como $x_n \to a$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > n_1$.

Como $y_n \to b$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > n_2$.

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Para todo $n > n_0$, temos

Observe que se a e b são números positivos, então $\sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{a^2+b^2+2ab} = \sqrt{(a+b)^2} = a+b$.

$$\begin{aligned} d((x_n,y_n),(a,b)) &= \sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2} \\ &\le \sqrt{|x_n-a|^2+|y_n-b|^2+2|x_n-a||y_n-b|} \\ &= \sqrt{(|x_n-a|+|y_n-b|)^2} \\ &= |x_n-a|+|y_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $(x_n,y_n)\to(a,b)$.

■

Nota: A proposição 3.1 pode ser generalizada para $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.11. Em $\mathbb{R}^4$, a sequência $(z_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{n-1}{n},\frac{(-1)^n}{n},\frac{1}{2^n}\right)$ converge para $(0,1,0,0)$.

Observação Importante. A convergência depende da métrica.

Exemplo 3.12. De fato, em $\mathbb{R}$, com a métrica usual, $\left(\frac{1}{n}\right)\to 0$.

Se tomarmos a métrica $0-1$, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ não converge para zero, pois $d\left(\frac{1}{n},0\right)=1$, para todo n.

Com esta métrica, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge, pois, $\forall a\in\mathbb{R}$, $d\left(\frac{1}{n},a\right)=1$, exceto, possivelmente, para um determinado valor de n.

Um Exemplo de Sequência de Funções. Seja $C[0,1]$ o espaço das funções contínuas, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ com a métrica $d(f,g)=\max\limits_{0\le t\le 1}\{|f(t)-g(t)|\}$.

Neste espaço, considere a sequência (f_n), onde $f_n(t)=\frac{nt}{n+t}$ para todo $t\in[0,1]$.

Cada termo da sequência é uma função de t. Assim, o limite, se existir, será uma função de t.

O que ocorre se considerarmos t fixo e $n\to\infty$?

Podemos verificar facilmente que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nt}{n+t}=t.$$

Denote $f(t)=t$.

Afirmação: $\lim_{n\to\infty} f_n(t)=f(t)$ em $C[0,1]$.

De fato,

$$\begin{aligned} d(f_n,f) &= \max_{0\le t\le 1}\{|f_n(t)-f(t)|\} \\ &= \max_{0\le t\le 1}\left\{\left|\frac{nt}{n+t}-t\right|\right\} \\ &= \max_{0\le t\le 1}\left\{\left|\frac{-t^2}{n+t}\right|\right\} \\ &= \max_{0\le t\le 1}\left\{\frac{t^2}{n+t}\right\} \\ &\le \max_{0\le t\le 1}\left\{\frac{t^2}{n}\right\}=\frac{1}{n}\to 0. \end{aligned}$$

Nota: Observe que na seção 2.4 definimos uma métrica num espaço de funções usando o supremo. Neste exemplo usamos o máximo porque estamos trabalhando num espaço de funções contínuas definidas num intervalo fechado e limitado. Em um intervalo desse tipo toda função contínua assume valor máximo.

Exercício Proposto

2) Use um software gráfico e construa o gráfico das funções: $f(t)$, $f_n(t)$, $n=1,2,\ldots,5$.

Proposição 3.2. Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico (M,d). Se existir $\lim_{n\to\infty} x_n$ ele é único.

Prova:

Vamos supor que $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ e $\lim_{n\to\infty} x_n=b$. Seja $\varepsilon>0$.

Como $x_n\to a$, $\exists n_1\in\mathbb{N}$ tal que $d(x_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n>n_1$.

Como $x_n\to b$, $\exists n_2\in\mathbb{N}$ tal que $d(x_n,b)<\frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n>n_2$.

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Tome um $n > n_0$. Então, $d(x_n, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $d(x_n, b) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e, dessa forma,

$$d(a,b) < d(a,x_n) + d(x_n,b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Assim, $0 \le d(a,b) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

Logo, $d(a,b) = 0$ e, portanto, $a = b$.

■

Exercício Proposto

3) Verifique quais das sequências abaixo convergem. Para as sequências convergentes dê o limite:

a) $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}, \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ em $\mathbb{R}^2$;

b) $(a,b,a,b,a,b,\ldots)$, $a \ne b$ em $\mathbb{R}$;

c) $(1,2,3,\ldots,p,p,p,\ldots)$ em $\mathbb{R}$ com a métrica $0-1$;

d) A sequência (f_n), onde $f_n(t) = \dfrac{t}{n}$, no espaço $C[0,1]$ com a métrica $d(f,g) = \max\limits_{0\le t\le 1}\{|f(t) - g(t)|\}$.

3.4 Subsequências

Introduziremos agora a noção de **subsequências**. Se você achá-la difícil, não desanime! Veja o que escreveu Mittag-Leffler, ainda em 1875:

> "Eu acho realmente surpreendente que Mr. Weierstrass e Mr. Kronecker consigam atrair tantos estudantes – entre 15 e 20 – para aulas que são tão difíceis e em um nível tão avançado." (Carta de Mittag-Leffler, 1875, veja Dugac 1978, p. 69, apud [6, Hairer-Wanner])

Em $\mathbb{R}$, considere a sequência $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right) = \left(-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots\right)$.

Podemos, de uma maneira muito natural, destacar duas **subsequências**:

$$\left(-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{5},\cdots\right) \text{ e}$$

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\cdots\right).$$

A primeira é a restrição da sequência dada ao conjunto dos naturais ímpares e a segunda aos naturais pares.

Outras subsequências podem ser obtidas? Por exemplo, $\left(-1,\frac{1}{4},-\frac{1}{7},\cdots\right)$ é uma subsequência?

A resposta é positiva. Vejamos:

Definição 3.4. Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico (M,d).

Uma **subsequência** de (x_n) é uma restrição da aplicação

$$f:\mathbb{N}\to M$$
$$f(n)=x_n$$

a um subconjunto infinito $k=\{n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots / n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots\}$ de $\mathbb{N}$.

Denotamos: $(x_{n_1},x_{n_2},\ldots,x_{n_k},\ldots)$ ou (x_{n_k}).

Observação. Uma subsequência pode ser vista como uma sequência, através da aplicação

$$\begin{gathered}1\to x_{n_1}\\ 2\to x_{n_2}\\ \vdots\\ k\to x_{n_k}\\ \vdots\end{gathered}$$

Proposição 3.3. Seja (M,d) um espaço métrico. Se uma sequência (x_n) de pontos de M converge para a, então toda subsequência de (x_n) também converge para a.

Prova:

Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Como o conjunto de índices da subsequência $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ é infinito, existe k_0 tal que $n_{k_0} \geq n_0$.

Para $k > k_0$ temos $n_k > n_{k_0} > n_0$ e, assim, $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$.

Logo, $x_{n_k} \to a$.

■

Nota: Esta proposição é muito útil para mostrar que determinadas sequências divergem. De fato, basta exibir duas subsequências convergindo para valores distintos.

Exemplo 3.13. Em $\mathbb{R}$, a sequência $((-1)^{n+1}) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ diverge. De fato, basta destacar as subsequências:

$$(1, 1, 1, \ldots) \to 1$$
$$(-1, -1, -1, \ldots) \to -1.$$

As bolas abertas, estudadas detalhadamente no primeiro capítulo, constituem uma ferramenta muito importante quando estudamos convergência em espaços métricos. A proposição que segue ilustra bem isso.

Proposição 3.4. Sejam (x_n) uma sequência num espaço métrico (M, d) e $a \in M$. O ponto a é o limite de uma subsequência de (x_n) se, e somente se, para todo $r > 0$, a bola aberta $B(a, r)$ contiver uma infinidade de termos de (x_n).

Prova:

$\Rightarrow$) Vamos supor que existe (x_{n_k}) subsequência de (x_n) tal que $x_{n_k} \to a$.

Então para todo $r > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, a) < r$ para todo $k > k_0$. Logo, para $k > k_0$, $x_{n_k} \in B(a, r)$, ou seja, $B(a, r)$ contém uma infinidade de termos de (x_n).

$\Leftarrow$) Suponha que $\forall r$, $B(a, r)$ contém uma infinidade de termos de (x_n). Vamos construir uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n), convergindo para a, como segue:

Escolhemos x_{n_1} entre a infinidade de termos de (x_n) pertencentes a $B(a,1)$.

Como $B\left(a,\frac{1}{2}\right)$ também contém uma infinidade de termos (x_n), escolhemos $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in B\left(a,\frac{1}{2}\right)$.

Suponhamos ter escolhido, desta forma, $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$.

Como $B\left(a,\frac{1}{k}\right)$ contém uma infinidade de termos de (x_n), podemos escolher $n_k > n_{k-1}$ tal que $x_{n_k} \in B\left(a,\frac{1}{k}\right)$.

A subsequência (x_{n_k}) de (x_n), assim construída, satisfaz

$d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k}$.

Como $\frac{1}{k} \to 0$ quando $k \to \infty$, segue que $x_{n_k} \to a$.

■

3.5 Sequências Limitadas

Você estudou sequências limitadas em $\mathbb{R}$ na disciplina de Cálculo I. Tenha sempre este conteúdo disponível e caso necessário revise. As ideias intuitivas e geométricas lá apreendidas são generalizadas aqui para espaços métricos.

Observe as sequências de números reais $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$ e $(2n) = (2, 4, 6, 8, \ldots)$.

A 1ª sequência é limitada e a 2ª não é limitada. Como formalizar estes conceitos? Vejamos:

Definição 3.5. Seja (M,d) um espaço métrico. Dizemos que uma sequência (x_n) de pontos de M é **limitada** quando o conjunto dos seus termos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ é limitado, ou seja, está contido em uma bola, o que em termos formais significa que existem $L > 0$ e $x_0 \in M$ tal que $x_n \in B(x_0, L),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.14. A sequência $(1 + (-1)^n)$ é limitada em $\mathbb{R}$, pois o conjunto de seus termos $\{0, 2\}$ é limitado.

Exemplo 3.15. As sequências estacionárias são limitadas em qualquer espaço métrico.

Exemplo 3.16. Em $C[0,1]$ a sequência (f_n), onde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ é a função dada por $f_n(t) = t^n$, é limitada, pois $d(f_n, 0) = 1,\ \forall n$. (Note que 0 denota a função nula.)

Exemplo 3.17. $(n + (-1)^n n) = (0,4,0,8,0,12,\ldots)$ não é limitada, pois o conjunto de seus termos $\{0,4,8,12,\ldots\}$ não é limitado.

Exercício Proposto

4) Dê exemplos:

   a) Uma sequência não limitada em $\mathbb{R}^2$;

   b) Uma sequência limitada em $\mathbb{R}^3$;

   c) Uma sequência limitada num espaço métrico M com a métrica $0-1$. Existe uma sequência não limitada neste espaço?

Proposição 3.5. Num espaço métrico (M, d), toda sequência convergente é limitada.

Prova:

Seja $x_n \to a$. Então, para $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a,1).$$

O conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$ é um conjunto finito. Podemos tomar, então,

$$r_1 = \max_{1 \le n \le n_0} \{d(a, x_n)\}.$$

O conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}\}$ está contido na bola aberta $B(a, r_1)$.

Seja $r = \max\{1, r_1\}$.

Então todos os termos da sequência pertencem à bola $B(a, r)$. Concluímos que (x_n) é limitado.

■

Exercício Proposto

5) Dê um exemplo para mostrar que não vale a recíproca da proposição 3.5.

Observação. A proposição 3.5 é útil para mostrar que determinadas sequências divergem. Por exemplo, a sequência $(n+(-1)^n n)=(0,4,0,8,0,12,\ldots)$ diverge, pois não é limitada.

A seguir, vamos demonstrar um teorema muito famoso, válido para as sequências em $\mathbb{R}$, cujo enunciado você já utilizou na disciplina de Cálculo I.

Teorema 3.1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Prova:

Seja (x_n) uma sequência limitada de números reais. Então $\exists a,b \in \mathbb{R}$ tais que $x_n \in [a,b]$, $\forall n$.

Seja $A=\{t \in \mathbb{R} \,/\, t \le x_n \text{ para uma infinidade de índices } n\}$.

A figura 3.12 ilustra a definição do conjunto A.

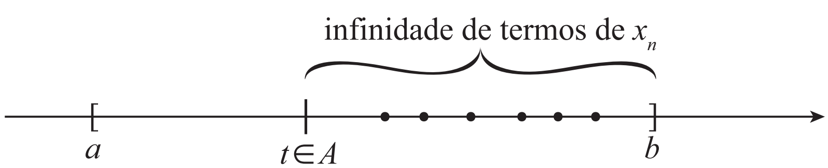


Figura 3.12

Temos:

i) $a \in A$, pois $a \le x_n$, $\forall n$;

ii) $\forall t \in A$, $t \le b$.

Logo, $A \neq \varnothing$ e é limitado superiormente.

Seja $C=\sup A$.

Vamos mostrar, agora, que existe uma subsequência de x_n que converge para C. Pela proposição 3.4 isso é equivalente a mostrar que: $\forall \varepsilon>0$, $B(C,\varepsilon)$ contém uma infinidade de termos de (x_n).

Seja $\varepsilon>0$. Como $C=\sup A$, $\exists t \in A$ tal que $C-\varepsilon<t$ (ver figura 3.13)

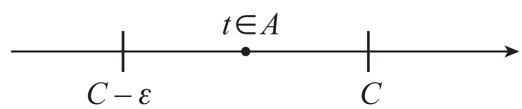


Figura 3.13

Como $t \in A$, podemos dizer que $C-\varepsilon < x_n$ para uma infinidade de termos x_n. Por outro lado, $C+\varepsilon \notin A$. Portanto, existe no máximo um número finito de termos x_n, tais que $x_n \geq C+\varepsilon$.

Concluímos, então, que para uma infinidade de termos x_n,

$$C-\varepsilon < x_n < C+\varepsilon \ .$$

Pela proposição 3.4 segue que C é o limite de uma subsequência de (x_n).

■

Observação. O Teorema 3.1 pode ser generalizado para $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, se (x_n, y_n) é uma sequência limitada em $\mathbb{R}^2$, então (x_i) é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$ e, portanto, possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente. Considerando agora a sequência (y_{n_k}), notamos que esta sequência é limitada em $\mathbb{R}$ e portanto possui subsequência $(y_{n_{kj}})$ convergente. Logo, $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$ é subsequência de (x_n, y_n) convergente.

Nota: Repare que a demonstração acima pode ser facilmente adaptada para $\mathbb{R}^n$ e, portanto, o Teorema 3.1 também vale para $\mathbb{R}^n$.

3.6 Caracterização dos Conceitos do Capítulo 2, através de Sequências

Proposição 3.6 (Ponto de Acumulação). Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto $a \in M$ é um **ponto de acumulação** de X se, e somente se, a é limite de uma sequência de pontos de $X - \{a\}$.

Prova:

$\Leftarrow$) Vamos supor que existe uma sequência (x_n) em $X - \{a\}$ tal que $x_n \to a$. Então para todo $r > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(a, r)$, para todo $n > n_0$.

Como $x_n \in X - \{a\}$, $\forall n$, temos que $B(a,r) \cap (X - \{a\}) \neq \varnothing$.

Logo, a é ponto de acumulação de X.

$\Rightarrow$) Vamos supor que $a \in X'$. Devemos mostrar que existe (x_n) em $X - \{a\}$ tal que $x_n \to a$.

Como $a \in X'$, $\forall r > 0$, $B(a,r) \cap (X - \{a\}) \neq \varnothing$. Assim, para $r = \dfrac{1}{n}$, podemos escolher um ponto

$$x_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap (X - \{a\}).$$

A sequência (x_n) está em $X - \{a\}$ e satisfaz

$$d(a, x_n) < \frac{1}{n}.$$

Como $\dfrac{1}{n} \to 0$ segue que $x_n \to a$.

■

Exercício Resolvido

1) Em $\mathbb{R}$, verifique que 0 é ponto de acumulação do conjunto

$$X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\right\}.$$

Resolução:

Basta observar que a sequência $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ está em $X - \{0\}$ e que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

Exercício Proposto

6) Decida se os pontos dados são pontos de acumulação dos seguintes conjuntos:

a) $a = 1$, $X = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

b) $a = (0,1)$,

$$X = \left\{(0,1), (1,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \cdots\right\} \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

c) $a = \sqrt{2}$, $X = \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

d) $a = \dfrac{7}{9}$ e $a = \dfrac{56}{99}$, $X = \{0, a_1 a_2 a_2 \ldots / \, a_i = 5, 6 \text{ ou } 7\}$ em $\mathbb{R}$.

Proposição 3.7 (Ponto Aderente). Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto $a \in M$ pertence ao fecho de X, $a \in \overline{X}$, se, e somente se, a é limite de uma sequência de pontos de X.

Prova:

$\Rightarrow$) Supor $a \in \overline{X}$. Então $a \in X$ ou $a \in X'$.

Se $a \in X$, podemos formar a sequência $(x_n) = (a, a, a, \ldots)$. Temos que (x_n) está em X e $x_n \to a$.

Se $a \in X'$, pela proposição 3.6, existe uma sequência (x_n) em $X - \{a\}$ tal que $x_n \to a$.

$\Leftarrow$) Supor que existe uma sequência (x_n) em X tal que $x_n \to a$.

Se $x_n \neq a$ para todo n, então (x_n) é uma sequência de pontos em $X - \{a\}$ com $x_n \to a$. Logo, a é ponto de acumulação de X e, assim, $a \in \overline{X}$, pois $X' \subset \overline{X}$.

Se existir algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = a$, então $a \in X \subset \overline{X}$.

Logo, em qualquer caso, $a \in \overline{X}$.

■

Definição 3.6. Num espaço métrico (M,d), um conjunto $X \subset M$ é dito **denso** em M se $\overline{X} = M$.

Intuitivamente, dizemos que X é denso em M quando os elementos de X estão espalhados por toda parte de M.

Exercício Resolvido

2) Verificar se $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Devemos responder a pergunta: todo número real a é o limite de uma sequência de racionais?

A resposta é positiva. De fato:

Se $a \in \mathbb{Q}$, basta tomar a sequência $(a, a, a, \ldots) \to a$.

Se $a \notin \mathbb{Q}$, a pode ser expresso como uma decimal infinita não periódica:

$$a = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots.$$

Tomamos a sequência:

$$x_1 = b_0$$
$$x_2 = b_0, b_1$$
$$x_3 = b_0, b_1 b_2$$
$$\vdots$$
$$x_n = b_0, b_1 b_2 \ldots b_{n-1}.$$

A sequência $x_n \to a$, pois

$$|x_n - a| = |b_0, b_1 b_2 \ldots b_{n-1} - b_0, b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n \ldots| = |0, 0 \ldots 0 b_n b_{n+1} \ldots| < \frac{1}{10^{n-1}} \to 0$$

Proposição 3.8 (Conjunto Fechado). Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. X é **fechado** se, e somente se, X contém todos os limites de sequências de pontos de X.

Prova:

$\Rightarrow$) Suponha que X é fechado. Seja (x_n) uma sequência em X, $x_n \to a$. Pela proposição 3.7, $a \in \overline{X}$. Como X é fechado, $\overline{X} = X$ e, assim, $a \in X$.

$\Leftarrow$) Vamos mostrar que $\overline{X} \subset X$. Seja $a \in \overline{X}$. Pela proposição 3.7, existe uma sequência (x_n) em X, $x_n \to a$. Aplicando a hipótese segue que $a \in X$.

Logo, $\overline{X} \subset X$ e então X é fechado.

■

Nota: A proposição 3.8 é muito útil para verificar que alguns conjuntos não são fechados.

Exemplo 3.18. O conjunto $X = [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ não é fechado em $\mathbb{R}$. De fato, a sequência $\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$ está em X e seu limite, zero, não pertence a X.

Exercício Proposto

7) Verifique que não são fechados os conjuntos:

a) $X = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \cdots\right\}$ em $\mathbb{R}$;

b) $X = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \cdots\right\}$ em $\mathbb{R}$;

c) $X = \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$;

d) $X = \{(x, y) / x^2 - y^2 < 1\}$ em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 3.9 (Ponto de Fronteira). Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Um ponto $a \in M$ é um **ponto de fronteira** de X se, e somente se, existem sequências (x_n) em X e (y_n) em $C(X)$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

Prova:

$\Rightarrow$) Seja $a \in \mathrm{Fr}(x_n)$. Então $a \in \overline{X}$ e $a \in \overline{C(X)}$, pois

$$\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} \cap \overline{C(X)}.$$

Pela proposição 3.7, a é o limite de uma sequência de pontos de X e, também, é o limite de uma sequência de pontos de $\overline{C(X)}$.

$\Leftarrow$) Vamos supor que $a = \lim x_n = \lim y_n$, com (x_n) em X e (y_n) em $C(X)$. Seja $\varepsilon = 1$. Como $a = \lim x_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$B(a, \varepsilon_1) \subset A, \ \forall n > n_0.$$

Como os termos de (x_n) pertencem a X, segue que

$$B(a, \varepsilon) \cap X \neq \varnothing.$$

Analogamente, como $a = \lim y_n$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$B(a, \varepsilon_1) \subset A, \ \forall n > n_1.$$

Como os termos de (y_n) pertencem a $C(X)$, segue que

$$B(a, \varepsilon) \cap C(X) \neq \varnothing.$$

Logo, $a \in \mathrm{Fr}(x)$.

∎

Vamos ilustrar o uso desta proposição no exercício que segue.

Exercício Resolvido

3) Verifique que o ponto $(0,0)$ é um ponto de fronteira do conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x < y\}$ em $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

A figura 3.14 ilustra o conjunto X.

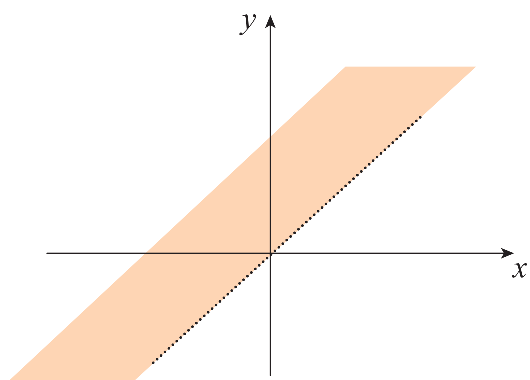


Figura 3.14

A sequência $\left(\frac{-1}{n},0\right) = \left((-1,0),\left(\frac{-1}{2},0\right),\left(\frac{-1}{3},0\right),\cdots\right)$ está em X e converge para $(0,0)$.

A sequência $\left(\frac{1}{n},0\right) = \left((1,0),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{3},0\right),\cdots\right)$ está em $C(X)$ e também converge para $(0,0)$.

Logo, $(0,0) \in \mathrm{Fr}(X)$.

Exercício Proposto

8) Determine a fronteira do conjunto X do exercício resolvido anterior. Escolha dois pontos distintos de $(0,0)$ e mostre que eles pertencem a fronteira de X usando a proposição 3.9.

Proposição 3.10 (Conjunto Aberto). Sejam (M,d) um espaço métrico e $A \subset M$. A é **aberto** se, e somente se, cumpre a seguinte condição:

$$(x_n \to a \in A) \Rightarrow x_n \in A \text{ para todo } n \text{ suficientemente grande.}$$

Prova:

$\Rightarrow$) Seja $x_n \to a \in A$. Como A é aberto, $\exists \varepsilon_1 > 0$ tal que $B(a,\varepsilon_1) \subset A$.

Como $x_n \to a$, para este $\varepsilon_1 > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$x_n \in B(a,\varepsilon_1) \subset A$ para todo $n > n_0$.

$\Leftarrow$) É bom destacar bem nossa hipótese e nossa tese, neste caso. Temos:

Hipótese: $(x_n \to a \in A) \Rightarrow x_n \in A$ para todo n suficientemente grande.

Tese: A é aberto.

Vamos mostrar que $C(A)$ é fechado. Para isso, vamos usar a proposição 3.8.

Seja (x_n) uma sequência em $C(A)$, $x_n \to a$. Usando a hipótese, concluímos que $a \in C(A)$. De fato, não podemos ter $a \in A$, pois então x_n pertenceria a A para n suficientemente grande.

Pela proposição 3.8, segue que $C(A)$ é fechado.

Logo, A é aberto.

■

3.7 Alguns Resultados Interessantes em $\mathbb{R}$

Vejamos agora alguns resultados interessantes no conjunto de números reais. É uma oportunidade importante para aplicar os novos conceitos e desenvolver algumas demonstrações que os utilizam.

3.7.1 O Conjunto de Cantor

Nesta seção estudaremos o conjunto de Cantor, conjunto este introduzido pelo matemático alemão Georg Cantor em 1883. Além de ter propriedades muito interessantes, e que de certa forma desafiam a nossa intuição, o conjunto de Cantor é um dos conjuntos mais importantes da matemática moderna, aparecendo em diversas áreas da matemática, como sistemas dinâmicos, análise e topologia.

O conjunto de Cantor K é um subconjunto fechado do intervalo $[0,1]$, construído da seguinte forma:

1ª Etapa: Retira-se do intervalo $[0,1]$ o seu terço médio aberto $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

2ª Etapa: Retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3},1\right]$.

Sobra, nesta etapa: $\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$.

***k*-ésima etapa:** Retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes na etapa anterior.

Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor.

A figura 3.15 ilustra o processo de construção do conjunto de Cantor.

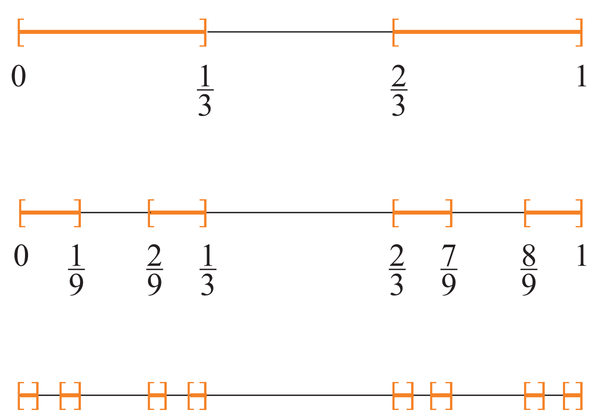


Figura 3.15

Observação. Note que todo $x\in[0,1]$ se escreve como $\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_4}{3^4}+\ldots$, onde $a_i\in\{0,1,2\}$.

Logo, o conjunto de Cantor consiste de todos os pontos onde $a_i\in\{0,2\}$.

3.7.1.1 Propriedades do Conjunto de Cantor (K)

1) K é fechado

Se indicarmos por $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n, \ldots$ os intervalos abertos omitidos, temos que

$$K = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [0,1] \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right)^C = [0,1] \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (I_n)^c \right).$$

Como I_n é aberto, $(I_n)^C$ é fechado para todo n. Pelas propriedades de conjuntos fechados segue que K é fechado.

2) $\text{Int}(K) = \varnothing$

Seja $x \in K$. Então $x \in \text{Int}(K)$ se existir um $\varepsilon > 0$, tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset K$.

Para ver que x não é ponto interior, devemos observar que depois da n-ésima etapa de construção de K restam apenas intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Como $\frac{1}{3^n} \to 0$, vemos que $\forall \varepsilon > 0$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subset K$.

3) K não é enumerável.

A prova pode ser encontrada em [12, Lima].

4) K não contém pontos isolados (todos os pontos de K são pontos de acumulação).

Vamos mostrar isso em duas etapas.

Etapa 1: Vamos observar primeiro os pontos extremos dos intervalos retirados na construção de K, isto é, os pontos

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \ldots .$$

Seja $c \in K$ um desses pontos, digamos, seja c a extremidade esquerda do intervalo (c, b) retirado para formar K (Figura 3.16). Quando (c, b) foi retirado, restou um certo intervalo $[a, c]$.

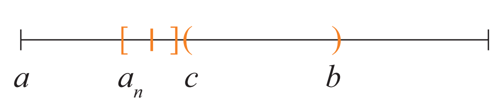


Figura 3.16

Nas etapas seguintes, restarão sempre terços finais de intervalos do tipo $[a_n, c]$, $a_n \in K$.

O comprimento $c - a_n \to 0$ e, assim, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.

Logo, c não é ponto isolado (é ponto de acumulação).

Etapa 2: Seja $c \in K$, agora, que não seja extremo de intervalo retirado.

Existem tais pontos? A resposta é positiva, pois K é não enumerável.

Vamos provar que c não é ponto isolado de K.

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, mostraremos que $(c, c + \varepsilon) \cap K \neq \varnothing$.

De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe algum ponto de K no intervalo $(c, c + \varepsilon)$, caso contrário, este intervalo estaria todo contido num dos intervalos removidos e (como $c \in K$) c só poderia ser extremo de um dos intervalos retirados.

5) A soma dos comprimentos dos intervalos removidos é 1.

   De fato, a soma dos comprimentos dos intervalos removidos é dada pela série geométrica $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, que converge para 1.

3.7.2 Outra Versão do Teorema de Bolzano-Weierstrass

Todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ possui um ponto de acumulação.

Prova:

Seja A um subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$. Como A é limitado, existe um intervalo $[a, b]$ tal que $A \subset [a, b]$.

Consideremos, agora, os intervalos

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Pelo menos um desses dois intervalos contém uma infinidade de ponto de A, pois A é infinito.

Denotamos este intervalo por $I_1 = [a_1, b_1]$. Dividimos, agora, o intervalo $[a_1, b_1]$ em dois

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right].$$

Novamente, um desses intervalos contém uma infinidade de pontos de A. Denotamos este intervalo por $I_2 = [a_2, b_2]$.

Continuando esta construção, obtemos uma sequência de intervalos encaixados e fechados

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots,$$

onde $I_n = [a_n, b_n]$, cujos comprimentos são:

$$\begin{aligned} &I_1 : \frac{b-a}{2} \\ &I_2 : \frac{b-a}{4} \\ &I_3 : \frac{b-a}{8} \\ &\vdots \\ &I_n : \frac{b-a}{2^n}. \end{aligned}$$

Pelo princípio dos intervalos encaixados, existe pelo menos um ponto p comum a todos os intervalos.

Afirmação: p é ponto de acumulação de A.

De fato, vejamos:

Dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que a bola aberta $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ contém algum ponto $a \in A$, $a \neq p$.

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Observe que este número existe, pois a sequência $\left(\frac{b-a}{2^n}\right) \to 0$.

Seja I_{n_0} o intervalo correspondente, conforme a construção realizada. Então,

$$\left[a_{n_0}, b_{n_0}\right] \subset (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \text{ e } p \in \left[a_{n_0}, b_{n_0}\right].$$

Como $\left[a_{n_0}, b_{n_0}\right]$ contém uma infinidade de pontos de A, o mesmo ocorre com $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$. Logo, p é ponto de acumulação de A.

■

Observação. Uma outra maneira de provar esta versão do teorema de Bolzano-Weierstrass é considerar uma sequência (x_i), tal que $x_i \neq x_j$, $\forall\, i, j$, de elementos de A (pode ser feito, pois A é ilimitado). Então, pela primeira versão do teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_i) possui subsequência convergente, digamos $x_{i_k} \to a$. Mas então a é ponto de acumulação de A.

3.8 Sequências de Cauchy

Definição 3.7. Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de M é dita uma **sequência de Cauchy** se, e somente se,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, $\forall m, n > n_0$.

Exemplo 3.19. A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$.

De fato, como $\dfrac{1}{n} \to 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > n_0$.

Assim, $\forall n, m > 0$

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Exercício Proposto

9) Considere um espaço métrico (M, d) com a métrica $0-1$. Caracterize as sequências de Cauchy em M.

No exemplo anterior vimos que a sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Esta sequência é convergente. Você pode se perguntar: toda sequência convergente é de Cauchy?

A resposta é positiva, conforme proposição que segue.

Proposição 3.11. Toda sequência convergente num espaço métrico (M,d) é uma sequência de Cauchy.

Prova:

Seja $(x_n) \to a$. Dê $\varepsilon = 1$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $m, n > n_0$, temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a + x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Nota: Não é válida a recíproca, isto é, nem toda sequência de Cauchy em um espaço métrico é convergente.

Exemplo 3.20. Seja M o intervalo aberto $(0,2)$ em $\mathbb{R}$, com a métrica usual de $\mathbb{R}$ induzida em M.

Neste espaço a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de Cauchy, mas não converge.

Exemplo 3.21. Seja $M = \mathbb{Q}$ com a métrica usual.

A sequência $(1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots)$ é de Cauchy em $\mathbb{Q}$, mas não converge em $\mathbb{Q}$. Observe que a sequência converge para $\sqrt{2}$ em $\mathbb{R}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Embora existam sequências de Cauchy que não convergem, a propriedade de Cauchy está intimamente ligada à convergência. A proposição que segue mostra uma dessas relações.

Proposição 3.12. Seja (M,d) um espaço métrico e (x_n) um sequência de Cauchy em M. Se (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) que converge para $a \in M$, então $x_n \to a$.

Prova:

Seja $\varepsilon > 0$. Como $x_{n_k} \to a$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall k > k_0$.

Como (x_n) é de Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall m, n > n_0.$$

Seja $n_1 = \max\{n_0, k_0\}$ e seja $n_k > n_1$ (n_k fixo).

Temos

$$d(x_n, a) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall n > n_1.$$

Logo, $(x_n) \to a$.

■

Proposição 3.13. Num espaço métrico (M, d) toda sequência de Cauchy é limitada.

Prova:

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Tome $\varepsilon = 1$. Para este ε existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < 1$, $\forall n, m > n_0$.

Assim, o conjunto $A = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots\}$ é limitado.

Seja $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}\}$. Como B é finito, B é limitado.

Logo, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = A \cup B$ é limitado.

■

Exercício Proposto

10) Verifique se a sequência (x_n) é sequência de Cauchy:

$x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ em $\mathbb{R}$.

Dica: Reveja o exemplo 3.20.

3.9 Espaços Métricos Completos

> "$\sqrt{3}$ *é, portanto, apenas um símbolo para um número que ainda tem que ser descoberto, mas não é sua definição. A definição, porém, é satisfatoriamente dada por meu método, digamos* (1.7,1.73,1.732,...)" G. Cantor 1889 apud [6, Hairer &Wanner].

Já comentamos que a propriedade de Cauchy está intimamente ligada à convergência. Mas vimos exemplos de sequências de Cauchy que não convergem em determinados espaços. Podemos dizer que, num espaço (M, d), se (x_n) é de Cauchy e não convergir, isto se deve ao espaço M e não à sequência (x_n).

Vejamos a seguinte definição.

Definição 3.8. Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que M é **completo** se toda sequência de Cauchy em M for convergente em M.

Nota: Observe que $\mathbb{Q}$ não é completo.

Teorema 3.2. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, com a métrica usual, é um espaço métrico completo.

Prova:

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pela proposição 3.13, (x_n) é limitada. Usando o Teorema de Bolzano-Weierstrass, podemos concluir que (x_n) possui uma subsequência convergente. Pela proposição 3.12, temos que (x_n) converge.

■

Nota Importante. A complitude de $\mathbb{R}$ também pode ser demonstrada sem o uso do Teorema de Bolzano-Weierstrass (e consequentemente sem o uso da propriedade do supremo), construindo-se $\mathbb{R}$ via cortes de Dedekind. Mais detalhes podem ser encontrados em [14, Marsden & Hoffman] ou [16, Rudin].

Exercícios Resolvidos

4) Seja M o intervalo aberto $(0,2)$ com a métrica usual induzida de $\mathbb{R}$. Verifique que M não é completo.

Resolução:

Para mostrar que M não é completo, você deve exibir uma sequência de Cauchy em M que não converge em M. Tome, por exemplo, a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$. Já mostramos que esta sequência é de Cauchy, mas não converge em M.

Observação. É interessante você dar exemplos de outras sequências de Cauchy em M que não convergem em M.

5) Seja (M, d) um espaço métrico, em que d é a métrica $0-1$. Verifique que (M, d) é completo.

Resolução:

No exercício proposto 9), você caracterizou as sequências de Cauchy em M. As sequências de Cauchy em M são as sequências estacionárias, isto é,

$$(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, p, p, p, \ldots)$$

que convergem para $p \in M$.

Logo, M é completo.

6) Seja M o intervalo fechado $[0,2]$ com a métrica usual induzida de $\mathbb{R}$. Verifique que M é completo.

Resolução:

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Então (x_n) é de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ é completo, $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to a$. Mas $[0,2]$ é fechado. Pela caracterização de conjunto fechado via sequências (proposição 3.8), $a \in M$.

Logo, (x_n) converge em M e, consequentemente, M é completo.

Exercício Proposto

11) Dê outros exemplos de subespaços de $\mathbb{R}$ que sejam:

i) completos;

ii) não completos.

Nota: Os exercícios anteriores devem ter levado você a cogitar se os resultados obtidos podem ser generalizados.

Temos a seguinte proposição.

Proposição 3.14 Todo subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, todo subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.

Prova:

$\Rightarrow$) Hipótese: (M,d) completo, $F \subset M$, F fechado.

Tese: F é completo.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em F. Então (x_n) é de Cauchy em M. Como M é completo, $(x_n) \to a \in M$. Como F é fechado, pela proposição 3.8, $a \in F$.

Logo, (x_n) converge em F e, dessa forma, F é completo.

$\Leftarrow$) Hipótese: (M,d) um espaço métrico, $F \subset M$, F completo;

Tese: F é fechado.

Seja (x_n) uma sequência de pontos de F, com $\lim x_n = a \in M$. Pela proposição 3.11, (x_n) é de Cauchy. Como F é completo, (x_n) converge em F, isto é, $\exists a' \in F$ tal que $\lim x_n = a'$.

Pela unicidade do limite (proposição 3.2), temos $a = a'$. Pela caracterização de conjunto fechado via sequência (proposição 3.8), concluímos que F é fechado.

■

Nota: Todo espaço métrico (M,d) admite um "completamento" ou "completado", ou seja, existe um espaço métrico $(\tilde{M},\tilde{d})$ tal que $M \subseteq \tilde{M}$ densamente e $\tilde{d} = d$ sobre M. Basta adicionar a M os limites das sequências de Cauchy em M.

Por exemplo, $[0,2]$ é o "completado" de $(0,2)$ como subespaço métrico de $\mathbb{R}$.

$\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ é o "completado" de $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ como subespaço de $\mathbb{R}$.

Um dos processos de construção dos números reais é através do "completamento" de $\mathbb{Q}$: acrescenta-se a $\mathbb{Q}$ os limites das sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$. Não apresentamos a construção de $\mathbb{R}$ neste texto. Admitimos a existência dos números reais como um axioma.

Você viu que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo. Você pode perguntar: e os espaços Euclidianos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$, são completos?

A resposta é positiva, conforme você pode constatar para $\mathbb{R}^2$ no exercício que segue.

Exercício Resolvido

7) Verifique que $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual é um espaço métrico completo.

Resolução:

Seja $(z_n) = ((x_n, y_n))$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^2$.

Então (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em $\mathbb{R}$ (verifique esse resultado de forma análoga à prova da proposição 3.1).

Como $\mathbb{R}$ é completo, $x_n \to a \in \mathbb{R}$ e $y_n \to b \in \mathbb{R}$. Usando a proposição 3.1, você conclui que $z_n \to (a,b)$.

Outra maneira de verificar que $\mathbb{R}^2$ é completo, é notar que se (x_n, y_n) é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^2$ então ela é limitada e então, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass para $\mathbb{R}^2$, existe subsequência convergente e portanto, pela Proposição 3.12, (x_n, y_n) é convergente.

Para concluir este capítulo, observamos que em muitos momentos um matemático ouve falar em espaços de Banach e em espaços de Hilbert.

O que são estes espaços afinal?

Espaços de Banach: É um espaço vetorial normado que é completo com a métrica induzida pela norma, isto é,

$$d(x,y) = \| x - y \|.$$

Espaços de Hilbert: É um espaço vetorial com produto interno, que é completo em relação à métrica oriunda deste produto interno. Por exemplo, em $\mathbb{R}^n$ com o produto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, temos

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

e

$$d(x,y) = \| x - y \|.$$

Se você tiver interesse pode aprofundar-se estudando em livros mais avançados de Análise Matemática, tais como: [14, Marsden & Hoffman] ou [16, Rudin].

Exercícios Complementares

Nos exercícios de 1 a 10, considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Se a afirmação dada é verdadeira, prove-a; se for falsa, dê um contraexemplo:

1) Toda sequência limitada é convergente;

2) Toda sequência convergente é limitada.

3) Se $x_n \to 0$ e (y_n) é limitada, então $z_n = x_n \cdot y_n \to 0$.

4) Se (x_n) converge e (y_n) diverge, então $(z_n = x_n + y_n)$ diverge.

5) Se (x_n) e (y_n) divergem, então $(z_n = x_n + y_n)$ diverge.

6) Se $(x_n) \to a$ e $a > 0$, então $x_n > 0$ para uma infinidade de índices.

7) Se $x_n < y_n$, $\forall n$ então $\lim x_n < \lim y_n$. Supor as duas sequências convergentes.

8) Se (x_n) é uma sequência tal que o conjunto de seus termos está contido no conjunto de Cantor, então (x_n) possui uma subsequência de Cauchy.

9) Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ converge para um elemento de $\mathbb{Q}$.

10) Se uma sequência monótona possui uma subsequência convergente, então ela é convergente (se necessário revise a noção de sequência monótona na seção 1.3 do texto de Cálculo I).

11) Estude a convergência das seguintes sequências em $\mathbb{R}^2$:

    a) (z_n) tal que $z_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}, \dfrac{n^2+1}{2n^2}\right)$;

b) (z_n) tal que $z_n = \left(\frac{n-1}{n}, \sqrt{2 - \frac{(n-1)^2}{n^2}} \right)$.

12) Seja (M,d) um espaço métrico e (x_n) um sequência em M que tem uma subsequência convergindo para *a* e outra para *b*:

a) se $a \neq b$, o que se pode dizer sobre (x_n);

b) se (x_n) converge, o que se pode dizer sobre a e b?;

c) dê exemplos das duas situações.

13) Num espaço métrico de sua escolha, dê um exemplo de uma sequência, sem pontos repetidos, que possua duas subsequências convergindo para pontos distintos.

14) Verifique que não são completos os seguintes subespaços métricos de $\mathbb{R}$:

a) o intervalo $[2,5)$;

b) $\mathbb{N} \cup \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$;

c) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

15) Verifique que não são completos os seguintes subespaços métricos de $\mathbb{R}^2$:

a) $X = [0,1] \times [0,1)$;

b) $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0 \text{ e } y > 0\}$;

c) $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

d) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 < (x-1)^2 + (y-2)^2 < 2\}$.

16) O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, como subespaço de $\mathbb{R}$ é completo? Justifique.

17) Se (M,d) é um espaço métrico tal que M é finito, mostre que M é completo.

18) Se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em $\mathbb{R}^2$, o que se pode afirmar a respeito da sequência $d(x_n, y_n)$?

Resumo

Neste capítulo você estudou a noção de convergência. Para facilitar seu aprendizado foi revista a definição de convergência para sequências de números reais. A seguir, a noção de convergência foi estendida para sequências em um espaço métrico qualquer.

Os principais conceitos do capítulo 2 foram retomados e caracterizados através de sequências. Também foram abordados alguns resultados interessantes de $\mathbb{R}$, como o princípio dos intervalos encaixados e o teorema de Bolzano-Weierstrass.

Você se familiarizou com o conjunto de Cantor, que é um dos conjuntos mais interessantes da análise matemática.

Finalmente, você concluiu o estudo deste capítulo vendo a noção de espaço métrico completo, que é caracterizado por meio das sequências de Cauchy. O resultado mais importante é: os espaços Euclidianos $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3, \ldots$ são espaços métricos completos.

Capítulo 4

Continuidade

4 Continuidade

Nosso objetivo nesta unidade é estudarmos funções contínuas e suas propriedades. Iniciaremos com uma breve motivação do assunto e a seguir introduziremos a definição de função contínua em um espaço métrico. Nosso interesse é estudar diversas caracterizações de funções contínuas e suas relações com conjuntos abertos, fechados, compactos e/ou conexos.

4.1 Introdução

Por que funções contínuas merecem nossa atenção?

Porque elas possuem algumas características especiais e ao mesmo tempo estão presentes em inúmeros eventos do nosso dia-a-dia. Por exemplo, quando vamos almoçar em um restaurante que oferece bufê por quilo, o preço que pagamos pelo nosso prato de comida depende continuamente do peso dos alimentos escolhidos. Se, por um acaso, o restaurante estiver com uma promoção onde os clientes que pesam exatamente 473g de comida ganham sua refeição de graça, temos que nossa função preço tem uma descontinuidade no 473g. A figura abaixo ilustra estes dois casos quando o preço da comida é R$10,00 o quilo.

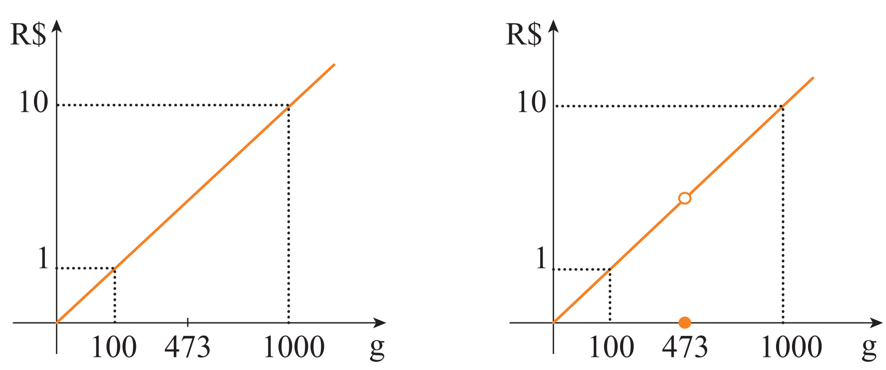


Figura 4.1

Outro exemplo de uma função contínua que aparece frequentemente no nosso dia-a-dia é a função temperatura. Se cada ponto da Terra é identificado por sua latitude e longitude, então a temperatura em cada ponto da Terra é uma função contínua de duas variáveis. Outros exemplos incluem velocidade do vento, pressão atmosférica, etc.

4.2 Funções Contínuas

Temos agora uma noção intuitiva de continuidade que precisamos formalizar. O primeiro matemático que tentou fazer isto foi Cauchy, em 1821 (Cour's d'Analyse, p. 43 *apud* [6, Hairer & Wanner]). Vejamos o que Cauchy escreveu:

> "(...) $f(x)$ será chamada uma função contínua, se (...) os valores numéricos da diferença
>
> $$f(x+\alpha)-f(x)$$
>
> diminuem indefinidamente junto com os valores de α (...)".

Ou seja, Cauchy estava pedindo que variações infinitamente pequenas de x acarretassem variações infinitamente pequenas de f. Porém esta definição não está completamente correta e a escola de Bolzano-Weierstrass se encarregou de corrigi-la. Vejamos o que Weierstrass escreveu em 1874:

> "Aqui, chamaremos a quantidade y de uma função contínua de x, se depois de escolhermos uma quantidade ε, a existência de δ pode ser provada, de maneira que para qualquer valor entre $x_0-\delta \ldots x_0+\delta$ o valor correspondente de y está entre $y_0-\varepsilon ... y_0+\varepsilon$".

Ou seja, Bolzano e Weierstrass pedem que a diferença $f(x)-f(x_0)$ seja **arbitrariamente** pequena, se a diferença $x-x_0$ for **suficientemente** pequena.

Podemos agora recapitular a definição de continuidade, via ε's e δ's, de uma função real f.

Definição 4.1. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $a \in X$. A função $f: X \to \mathbb{R}$ é dita **contínua em *a*** se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in A$ satisfazendo $|x-a| < \delta$ temos que $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Se f é contínua em todos os pontos do seu domínio, então f é dita **contínua**.

A definição de continuidade para espaços métricos é análoga à definição acima. Apenas trocamos a noção de distância em $\mathbb{R}$, ou seja, o módulo, pelas métricas apropriadas. Vejamos:

Definição 4.2. Sejam M e N espaços métricos. A função $f : M \to N$ é dita **contínua em** $\boldsymbol{a} \in M$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que se $d(x,a) < \delta$ então $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
Se f é contínua em todos os pontos $a \in M$, então f é dita **contínua.**

Observação. Note que M e N podem ter métricas diferentes, porém decidimos denotar ambas por d na definição acima, ficando claro pelo contexto quando d se refere à métrica em M e quando d se refere à métrica em N.

Observação. Em termos de bolas abertas temos que $f : M \to N$ é contínua em $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$, onde $\mathbb{R}$ tem a métrica usual, é contínua. Veja o gráfico na figura 4.2.

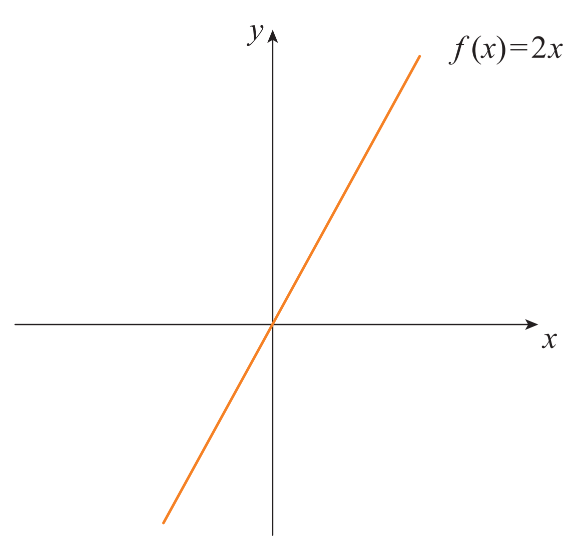


Figura 4.2

Note que dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ para satisfazer a definição de continuidade.

Exemplo 4.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$.

Então f é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}-\{0\}$ e f é descontínua no 0. Veja o gráfico na figura 4.3.

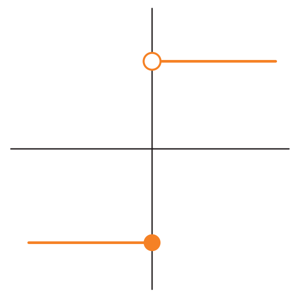


Figura 4.3

Exemplo 4.3. Seja $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x,x) \end{aligned}$.

Uma representação gráfica de f pode ser visualizada na figura 4.4.

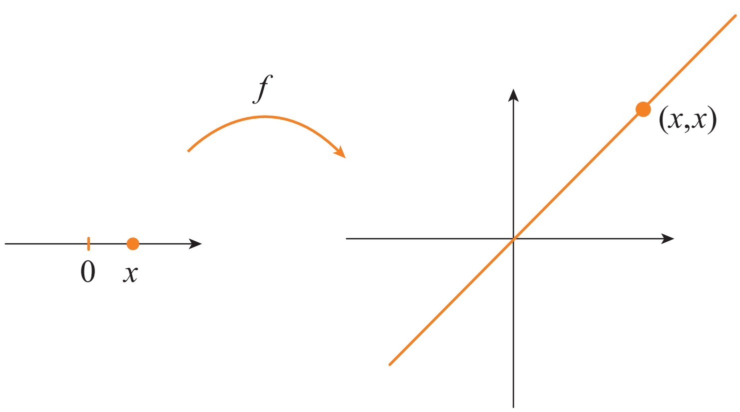


Figura 4.4

Vamos mostrar que f é contínua em $a\in\mathbb{R}$ usando a definição:

Dado $\varepsilon>0$, observe que

$$d(f(x),f(a))=d((x,x),(a,a))=\sqrt{(x-a)^2+(x-a)^2}=\sqrt{2}\,|x-a|.$$

Logo, tomando $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ temos que se $|x-a|=d(x,a)<\delta$ então

$$d(f(x),f(a))=\sqrt{2}\,|x-a|<\sqrt{2}\delta=\sqrt{2}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}=\varepsilon.$$

Logo, f é contínua em $a\in\mathbb{R}$. Como a era qualquer, temos que f é contínua.

Exemplo 4.4. Você viu um exemplo de uma métrica em um espaço de funções. Veremos agora um exemplo de função contínua envolvendo um espaço de funções.

Seja $l^\infty(\mathbb{N}) = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|a(n)| < \infty\}\}$, ou seja, $l^\infty(\mathbb{N})$ é o conjunto de todas as funções limitadas de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, ou equivalentemente, é o conjunto de todas as sequências limitadas.

Muniremos l^∞ com a métrica do sup, ou seja,

$$d(a,b) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|a(n) - b(n)|\}.$$

Definiremos agora,

$$\begin{aligned} f : l^\infty(\mathbb{N}) &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto a(1). \end{aligned}$$

Observe que f associa a cada sequência o seu primeiro termo.

Vamos mostrar que f é contínua em todo $a \in l^\infty(\mathbb{N})$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$.

Note que se $d(a,x) < \delta$ então $\sup_{n\in\mathbb{N}} \{|a(n) - x(n)|\} < \delta$ e, portanto,

$$|f(a) - f(x)| = |a(1) - x(1)| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|a(n) - x(n)|\} < \delta = \varepsilon.$$

Logo, f é contínua.

Vejamos agora as funções de Lipschitz:

Definição 4.3. Uma função $f : M \to N$ é uma **função de Lipschitz** (ou lipschitziana) se existe $k > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \le k d(x,y), \ \forall x, y \in M.$$

Tente mostrar, sem ler a resolução abaixo antes, que toda função de Lipschitz é contínua.

Exercício Resolvido

1) Toda função de Lipschitz é contínua.

Resolução:

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$.

Logo, se $d(x, y) < \delta$ então

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < k\delta = \varepsilon .$$

Exercícios Propostos

1) Mostre que $f : [2,4] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, é de Lipschitz e, portanto, contínua.

2) Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x|$, é Lipschitz com constante $k = 1$ e, portanto, contínua.

Nosso próximo exemplo nos diz que a função "distância" em um espaço métrico é contínua. Vejamos:

Exemplo 4.5. Seja (M, d) um espaço métrico e $p \in M$.

Defina $f : M \to \mathbb{R}$ por $f(x) = d(x,p)$.

Então f é contínua e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = p$.

Inicialmente, observe que

$$d(x, p) \leq d(x, y) + d(y, p)$$

e

$$d(y, p) \leq d(y, x) + d(x, p) .$$

Dessas desigualdades, segue que

$$-d(y, x) \leq d(y, p) - d(x, p) \leq d(y, x)$$

ou, de forma equivalente,

$$| d(y, p) - d(x, p) | \leq d(y, x) .$$

Agora, dê $\varepsilon > 0$. Tome $\delta = \varepsilon$.

Se $d(x,y)<\delta$ então $|d(y,p)-d(x,p)|\leq d(y,x)<\delta=\varepsilon$.
Logo, f é contínua em qualquer ponto $x\in M$.

Observação. Note que do exemplo acima podemos concluir que em todo espaço métrico com mais de um ponto, existem funções contínuas não constantes.

Você deve estar achando que nem sempre é fácil mostrar que uma função é contínua. Realmente, usando apenas a definição, em muitos casos, é difícil, senão impossível, decidir pela continuidade ou não de uma função. Portanto, precisamos de outras caracterizações de continuidade de uma função, e este será o foco dos teoremas que seguem.

Teorema 4.1. Seja $f:M\to N$ e $a\in M$. Então f é contínua em *a*, se, e somente se, para toda sequência (x_n) em M que converge para a, a sequência $(f(x_n))$ converge para $f(a)$ (em símbolos, f é contínua em a $\Leftrightarrow \forall (x_n): x_n\to a$, temos $f(x_n)\to f(a)$).

Prova:

$\Rightarrow$) Primeiro, vamos supor que f é contínua em a.

Seja (x_n) uma sequência em M tal que $x_n\to a$. Vamos mostrar que $f(x_n)\to f(a)$.

Dê $\varepsilon>0$. Como f contínua em a, existe $\delta>0$ tal que se $d(x,a)<\delta$ então $d(f(x),f(a))<\varepsilon$.

Uma vez que $x_n\to a$, temos que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que se $n\geq n_0$ então $d(x_n,a)<\delta$. Logo, se $n\geq n_0$ então $d(x_n,a)<\delta$ e $d(f(x),f(a))<\varepsilon$ e, portanto, $f(x_n)\to f(a)$.

$\Leftarrow$) Agora, vamos assumir a recíproca, isto é, vamos assumir que $\forall (x_n)$ tal que $x_n\to a$, temos $f(x_n)\to f(a)$.

Para provar que f é contínua em a, vamos supor que ela não é contínua em a e chegar a uma contradição.

Supor que f não é contínua em a, ou seja, $\exists\varepsilon>0$ tal que $\forall\delta>0$, $\exists\, x_i\in M$ tal que $d(x_i,a)<\delta$ e $d(f(x_i),f(a))\geq\varepsilon$.

Tomando $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ e assim sucessivamente, temos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in M$ tal que $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$.

Mas então $x_n \to a$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ o que contradiz nossa hipótese.

Logo, f é contínua em a.

■

Como uma consequência direta do teorema 4.1 acima, podemos agora mostrar facilmente que funções reais contínuas são "bem comportadas" com respeito às operações de soma, multiplicação e multiplicação por escalar.

Proposição 4.1. Sejam f e g funções reais contínuas em um espaço métrico M. Então:

i) $|f|$ é contínua em M.

ii) $f \pm g$ é contínua em M.

iii) cf é contínua em M, $\forall c \in \mathbb{R}$.

iv) $f \cdot g$ é contínua em M.

v) $\frac{f}{g}$ é contínua em M se $g(x) \neq 0, \ \forall x \in M$.

Faremos a prova do item (iv). Os outros ficam como exercício.

Prova:

iv) Seja $a \in M$, e (x_n) uma sequência em M tal que $x_n \to a$.

Como f e g são contínuas em a, as sequências $(f(x_n))$ e $(g(x_n))$ convergem para $f(a)$ e $g(a)$, respectivamente. Agora, pelas propriedades de limites de sequências reais, temos que a sequência

$$((f \cdot g)(x_n)) = (f(x_n) \cdot g(x_n)) \to f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a).$$

(Se necessário revise a primeira unidade do texto de Cálculo I) e, portanto, $f \cdot g$ é contínua.

■

Nota: A proposição 4.1 também pode ser provada pela definição de continuidade via ε e δ.

Exercício Proposto

3) Mostre os itens (i) e (ii) da proposição anterior usando a definição.

Observação. O teorema 4.1 também pode ser muito útil quando queremos mostrar que uma função não é contínua. Vejamos:

Exemplo 4.6. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases}1 \text{ se } x\in\mathbb{Q}\\ -1 \text{ se } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

Temos que f não é contínua em nenhum ponto.

De fato, se $a\in\mathbb{Q}$ então podemos tomar a sequência $(x_n)=\left(a+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$ que converge para a, mas é tal que $f(x_n)\to -1\neq f(a)=1$, pois $x_n\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Se $a\notin\mathbb{Q}$, basta tomar uma sequência (x_n) contida nos $\mathbb{Q}$ e tal que $x_n\to a$. Temos então que $f(x_n)\to 1\neq f(a)=-1$, pois $x_n\in\mathbb{Q}$.

Logo, mostramos que f não é contínua em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Exercício Resolvido

2) Verifique se a seguinte função é contínua ou não:

$$g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \text{ dada por } g(x)=\begin{cases}x+1, \text{ para } x>0\\ x, \text{ para } x<0\end{cases}.$$

Resolução:

Mostraremos que g é contínua em todo $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ usando o teorema 4.1. Supor $a>0$. Seja (x_n) uma sequência que converge para a. Então existe $N>0$ tal que para todo $n>N$, $x_n>0$ e, portanto,

$$g(x_n)=x_n+1$$

para todo $n>N$ e isto implica que $(g(x_n))$ converge para

$$a+1=g(a)+1.$$

Segue do teorema 4.1 que g é contínua em a. Analogamente, mostra-se que g é contínua em $a<0$.

Exercício Proposto

4) Decida se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 1, & \text{se } x=0\end{cases}$, é contínua. Justifique sua resposta.

Uma das operações entre funções que não foi contemplada na proposição anterior foi a composição de funções contínuas (o que você arriscaria afirmar a respeito desta operação?

Tente demonstrar o seu palpite!

Apesar de podermos atacar este problema usando apenas a definição de continuidade, o mesmo ficará mais fácil depois de vermos mais uma caracterização de função contínua. Mostraremos abaixo que f é contínua se, e somente se, a imagem inversa de abertos por f é aberta, o que é verdade se, e somente se, a imagem inversa de fechados por f é fechada. Vejamos:

Teorema 4.2. Seja $f:M\to N$. São equivalentes:

i) f é contínua.

ii) se $F\subset N$ é fechado, então $f^{-1}(F)$ é fechado.

iii) se $A\subset N$ é aberto, então $f^{-1}(A)$ é aberto.

Mostraremos o teorema via a seguinte sequência de implicações: i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)

i) $\Rightarrow$ ii) Suponha que f é contínua e seja F fechado em N.

Queremos mostrar que $f^{-1}(F)$ é fechado e, para isto, é suficiente mostrar que

$$\overline{f^{-1}(F)}\subseteq f^{-1}(F).$$

Seja $a\in\overline{f^{-1}(F)}$. Então, pela Proposição 4.7, existe uma sequência (x_n) em $f^{-1}(F)$ tal que $x_n\to a$.

Como f é contínua em a, $f(x_n) \to f(a)$ e como $x_n \in f^{-1}(F)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $f(x_n) \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $f(a)$ pertence ao fecho de $F, \overline{F}$. Como F é fechado, $\overline{F} = F$ e isto implica que $f(a) \in F$. Logo $a \in f^{-1}(F)$ como desejado.

ii) $\Rightarrow$ iii) Seja $A \subset N$ aberto.

Então A^C é fechado e por hipótese $f^{-1}(A^C)$ é fechado.

Como $f^{-1}(A^C) = [f^{-1}(A)]^C$ (por quê?), segue que $[f^{-1}(A)]^C$ é fechado e, portanto, $f^{-1}(A)$ é aberto como desejado.

iii) $\Rightarrow$ i) Vamos agora assumir que (iii) é válido e provaremos que f é contínua pela definição.

Seja $a \in M$ e $\varepsilon > 0$.

Lembre que $B(f(a), \varepsilon)$ (bola aberta de centro $f(a)$ e raio ε) é aberto de N e, portanto, (por hipótese) $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ é aberto em M.

Como $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ (tente desenhar o que está acontecendo, isto deve ajudá-lo). Veja a figura 4.5:

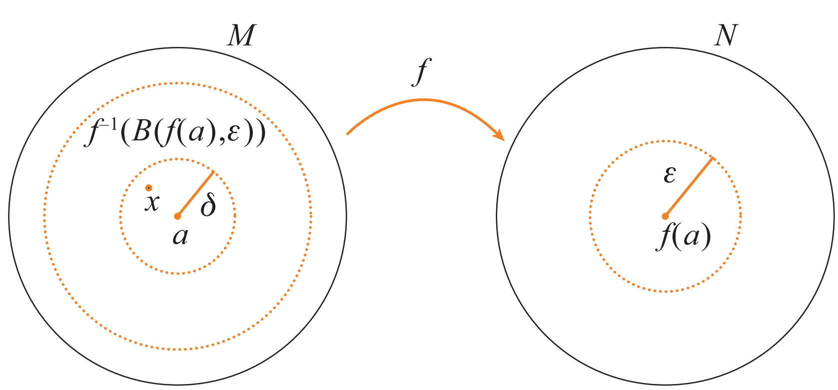


Figura 4.5

Agora, se $d(x, a) < \delta$ então $x \in B(a, \delta)$ e, portanto,

$$x \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)).$$

Logo, $f(x) \in (B(f(a),\varepsilon))$ e temos que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ como desejado.

■

Corolário 4.1. $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, $\forall b \in N$ e $\forall \varepsilon > 0$, $f^{-1}(B(b,\varepsilon))$ é aberto.

Prova:

É uma consequência imediata do teorema anterior e do fato que todo aberto de um espaço métrico se escreve com reunião de bolas abertas.

■

Considere agora as funções

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \begin{cases} 1 - x \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases},$$

cujos gráficos são dados na figura 4.6:

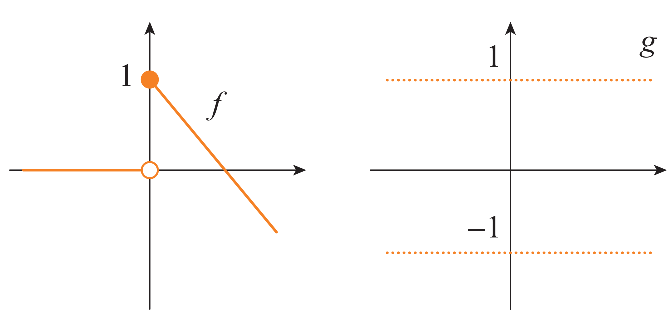


Figura 4.6

O que podemos dizer sobre a continuidade (de uma maneira global) de f e g?

Intuitivamente, f e g não parecem ser contínuas e o teorema anterior torna fácil provar esta afirmação. Basta notar que $f^{-1}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = f^{-1}\left(B\left(1,\frac{1}{2}\right)\right) = \left[0,\frac{1}{2}\right)$ que não é aberto em $\mathbb{R}$ e $g^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Q}$ que não é fechado em $\mathbb{R}$.

E a composição de funções contínuas? Você decidiu que esta operação (quando possível de se realizar) nos dá outra função contínua, certo? Você tentou mostrar este resultado usando apenas a definição de continuidade? Conseguiu? No que segue usaremos a caracterização de função contínua dada no teorema anterior para demonstrar que a composição de duas funções contínuas é uma função contínua.

Proposição 4.2. Sejam M, N e P espaços métricos, $f: M \to N$ e $g: N \to P$ contínuas. Então a função $g \circ f: M \to P$ é contínua.

Prova:

Seja A um aberto de P. É suficiente mostrar que $(g \circ f)^{-1}(A)$ é aberto em M. Note que $g^{-1}(A)$ é aberto em N (pelo teorema 4.2) e $f^{-1}(g^{-1}(A))$ é aberto em M (pelo teorema 4.2 novamente).

Mas $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ e, portanto, é aberto em M como desejado.

■

A proposição acima fala do comportamento global da continuidade com respeito à composição. E o comportamento local? Temos a seguinte proposição:

Proposição 4.3. Se $f: M \to N$ e $g: N \to P$ são contínuas em $a \in M$ e em $b = f(a) \in N$, respectivamente, então $g \circ f: M \to P$ é contínua em a.

Prova:

Dê $\varepsilon > 0$. Como g é contínua em b, $\exists \delta_1 > 0$ tal que se

$d(y,b) < \delta_1$, então $d(g(y), g(b)) < \varepsilon$.

Como f é contínua em a, para este $\delta_1 > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se

$d(x,a) < \delta$, então $d(y,b) < \delta_1$.

Logo, se $d(x,a) < \delta$ então $d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$ como desejado. A figura seguinte ilustra esta demonstração:

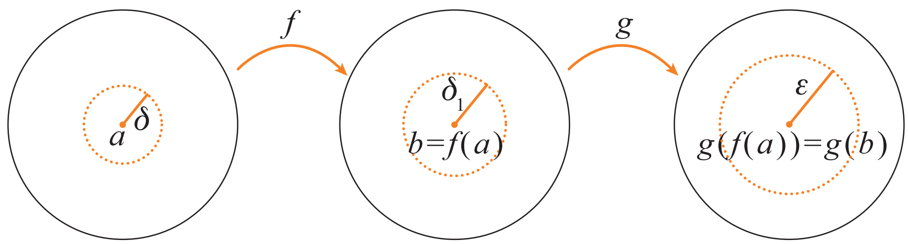


Figura 4.7

■

Exercício Resolvido

3) Prove, via sequências, a proposição 4.3.

Resolução:

Seja (x_n) sequência em M tal que $x_n \to a$. Como f é contínua em a, pelo teorema 4.1, $f(x_n) \to f(a)$. Como g é contínua em $f(a)$ segue que $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ e portanto $g \circ f$ é contínua em a.

Exercícios Propostos

5) Seja $f : A \to \mathbb{R}^n$ contínua em $x_0 \in A, A \subset (M, D)$, A aberto. Supor $f(x_o) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$. Provar que $f(x) \neq 0$ em alguma vizinhança do ponto x_0.

6) Analisar a continuidade de

$$f(x) = \frac{senx}{x}, x \neq 0 \ \text{ e } \ f(0) = 1, \ x \in \mathbb{R}.$$

7) Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua e $B \subset \mathbb{R}^n$ limitado. É $f(B)$ obrigatoriamente limitado?

4.3 Conjuntos Compactos

"Nós já comentamos e iremos reconhecer, por todo este livro, a importância de conjuntos compactos. Todos aqueles que estudam análise geral já viram que é impossível viver sem os compactos." (Frechet, 1928, Espaces abstraits, p. 66 apud [6, Hairer & Wanner]).

Como Frechet já observou em 1928, conjuntos compactos estão entre os conjuntos mais importantes da matemática.

De maneira coloquial, podemos dizer que conjuntos compactos são conjuntos que tentam se comportar como conjuntos finitos. (Por exemplo, você já viu no curso de Cálculo que toda função contínua em um compacto atinge o seu máximo e seu mínimo).

Nesta seção iremos caracterizar os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ como os subconjuntos fechados e limitados. Começaremos com a definição mais geral de compacidade. Para isto, precisamos introduzir a noção de cobertura.

Definição 4.4. Seja $X \subset (M,d)$. Dizemos que uma família $C = \{C_\alpha\}_{\alpha \in L}$ de conjuntos $C_\alpha \subset M$, onde L é um conjunto qualquer de indices, é uma **cobertura de *X*** se $X \subset \bigcup_{\alpha \in L} C_\alpha$. Se cada C_α é aberto, dizemos que C é uma **cobertura aberta de *X***.

Uma subcobertura de C é uma subfamília $C' = \{C_\alpha\}_{\alpha \in L'}$ onde $L' \subset L$ e $X \subset \bigcup_{\alpha \in L'} C_\alpha$.

O exemplo a seguir deve tornar a definição mais clara para você.

Exemplo 4.7. Em $\mathbb{R}$, considere os conjuntos:

$$X = [0,1],$$

$$C_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right),$$

$$C_3 = \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right).$$

A figura 4.8 ilustra este exemplo.

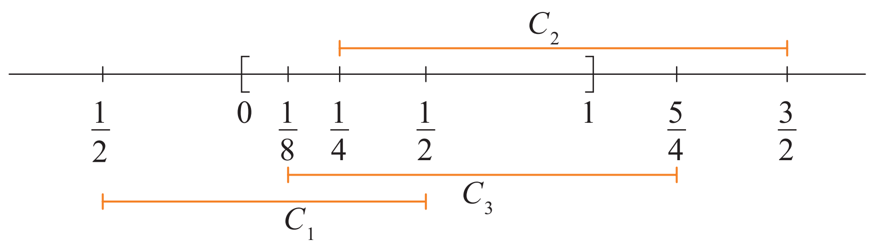


Figura 4.8

Note que:

$C = \{C_1, C_2, C_3\}$ é uma cobertura aberta de X.

$C' = \{C_1, C_2\}$ é uma subcobertura aberta de X.

$C'' = \{C_1, C_3\}$ é uma subcobertura aberta de X.

$C''' = \{C_2, C_3\}$ não é subcobertura de X.

Podemos, agora, ver a definição de conjuntos compactos.

Definição 4.5. Seja $K \subset (M, d)$. Dizemos que K é **compacto** se toda cobertura aberta de K contém uma subcobertura finita.

Você pode encontrar na literatura várias outras definições para conjuntos compactos. No decorrer da seção, veremos as várias caracterizações de conjuntos compactos que dão origem a estas outras definições. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.8. Seja $K = \{1, 2, \ldots, n\}$. K é compacto, pois se $C = \{C_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é uma cobertura aberta de K, então $1 \in C_{\alpha_1}$ para algum $\alpha_1 \in L$, $2 \in C_{\alpha_2}$ para algum $\alpha_2 \in L, \ldots, n \in C_{\alpha_2}$, para algum $\alpha_n \in L$. Logo, $\{C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \ldots, C_{\alpha_n}\}$ é uma subcobertura aberta finita de K.

Exemplo 4.9. Qualquer conjunto finito é compacto. A demonstração é análoga à feita no exemplo anterior.

Exemplo 4.10. Em $\mathbb{R}$, todo intervalo da forma $[a, b]$ é compacto (provaremos este fato mais para frente).

Exemplo 4.11. Seja $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\} \subset \mathbb{R}$.

Note que X é infinito e para qualquer $x \in X$ existe um intervalo aberto I_x de centro x tal que $I_x \cap (X \setminus \{x\}) = \varnothing$. A figura 4.9 ilustra a situação.

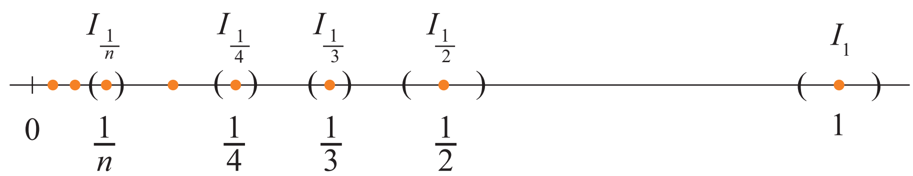


Figura 4.9

A família $C = \{I_x\}_{x \in X}$ é uma cobertura aberta de X que não possui subcobertura finita. Portanto, X não é compacto.

Exemplo 4.12. De maneira semelhante à desenvolvida no exemplo anterior, mostra-se que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não são compactos em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.13. $\mathbb{R}$ não é compacto. Considere a cobertura $\{(n, n+2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Tal cobertura não possui subcobertura finita.

Exemplo 4.14. $\mathbb{R}^n$ também não é compacto. Por exemplo, a cobertura aberta $\{B(o,n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ não possui subcobertura finita. Você consegue encontrar outras coberturas abertas de $\mathbb{R}^n$ que não possuem subcoberturas finitas?

Você deve estar achando que não é muito fácil decidir quando um conjunto é compacto ou não. Para isto, veremos duas novas caracterizações de conjuntos compactos.

Teorema 4.3 (Bolzano-Weierstrass). Seja (M, d) um espaço métrico. Então $A \in M$ é compacto se, e somente se, toda sequência em A possui uma subsequência convergente (que converge para um ponto de A).

Prova:

A prova deste teorema pode ser encontrada em [14, Marsden & Hoffman] ou [15, Munkres].

■

Como consequência deste teorema, podemos ver que $X=[0,1)$ não é compacto em $\mathbb{R}$, pois a sequência $\{x_n\}$, onde $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ converge para 1. Logo, todas as suas subsequências convergem para 1, mas 1 não pertence a X.

Mas e o conjunto $[0,1]$? Como provar que é compacto?

Para isso, usaremos o teorema a seguir.

Teorema 4.4 (Teorema de Heine-Borel). $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

Prova:

$\Rightarrow$) Suponha que K é compacto.

Então, pelo teorema 4.3, toda sequência em K possui uma subsequência convergente (em K).

Mas isto implica que K é limitado, pois senão, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in K$, tal que $\| x_n \| > n$ e a sequência $\{x_n\}$ não possui subsequência limitada. Logo, não possui subsequência convergente, o que contradiz a afirmação do parágrafo anterior.

Ainda K é fechado, pois senão, $\exists a \notin K$ tal que $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x_n \in K$, e isto implica que todas as subsequências de $\{x_n\}$ convergem para a, que não pertence a K, uma contradição. Logo, K é fechado.

$\Leftarrow$) Suponha que K é fechado e limitado.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência em K.

Como K é limitado, $\{x_n\}$ é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, generalizado para $\mathbb{R}^n$, existe uma subsequência convergente, cujo limite é um ponto de K (pois K é fechado). Segue, então, que K é compacto pelo teorema 4.3.

■

Nota: O teorema de Heine-Borel também pode ser provado diretamente, sem o uso do teorema 4.3 (Bolzano-Weierstrass) (ver [14, Marsden & Hoffman]).

Observação. Note que a caracterização de compactos dada no teorema de Heine-Borel só é válida em $\mathbb{R}^n$.

Por exemplo, se M é um conjunto infinito e d é a métrica discreta (isto é, $d(x,y)=0$, se $x=y$ e $d(x,y)=1$, se $x \neq y$) então (M,d) é limitado (por quê?) e fechado (por quê?), mas não é compacto (pois a cobertura $\left\{B\left(x,\frac{1}{2}\right), x \in M\right\}$ não possui subcobertura finita).

Exemplo 4.15. Usando o teorema de Heine-Borel, podemos concluir que qualquer bola fechada em $\mathbb{R}^n$ é compacta.

Observação. É interessante notar que a ida do teorema de Heine-Borel é valida em qualquer espaço métrico M, isto é, se $K \subseteq M$ é compacto então K é fechado e limitado. Vejamos:

Seja $x \in K$. Então a coleção de bolas abertas $\{B(x,n)\}_{n \in K}$ cobre K, e como K é compacto, existe uma subcobertura finita e portanto K é limitado.

Para notar que K é fechado, provamos que K^C é aberto. Para isto, tome $x \in A^C$ e considere a coleção de abertos $U_n = \left\{ y \in M : d(x,y) > \frac{1}{n} \right\}$.

Como, $\forall\, y \in M$, $y \neq x$, $d(x,y) \neq 0$, temos que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cobre K. Da compacidade de A, obtemos uma subcobertura finita, digamos $U_{n_1}, \ldots, U_{n_i}$, com $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$.

Mas então $B\left(x, \frac{1}{n_j}\right) \subset K^C$ e portanto K^C é aberto e K é fechado como desejado.

Nota: Não se assuste se a demonstração acima lhe pareceu difícil. Ela esta ai para que você tenha um gostinho do tipo de análise mais avançada que é vista usualmente nos cursos de Bacharelado.

Como comentamos no início desta seção, funções contínuas em conjuntos compactos possuem muitas características interessantes. Iremos agora explorar algumas destas características.

Teorema 4.5. Seja $f: M \to N$ uma função contínua e M um espaço métrico compacto. Então $f(M)$ é compacto em N.

Prova:

Para provar que $f(M)$ é compacto, vamos mostrar que toda sequência em $f(M)$ possui uma subsequência convergente.

Seja (y_n) uma sequência em $f(M)$. Então, $\forall y_n$, $\exists x_n \in M$ tal que $y_n = f(x_n)$.

Logo (x_n) é uma sequência em M, e como M é compacto, (x_n) tem uma subsequência (x_{n_k}), convergente para um a em M. Como f é contínua, $(f(x_{n_k}))$ é subsequência de $(f(x_n))$ que converge para $f(a)$. Logo, $f(M)$ é compacto.

■

Exercício Resolvido

4) Seja $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto. Prove que
$A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x, y) \in k\}$ é compacto.

Resolução:

Note que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$ é contínua e $A = f(K)$. Logo, pelo teorema 4.5, A é compacto.

Exercícios Propostos

8) Encontre uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e um compacto $K \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(K)$ não é compacto.

Corolário 4.2. Se $f: M \to N$ é contínua e M é compacto, então $f(M)$ é fechado e limitado.

Dica para fazer a prova: Leia com atenção a prova do teorema de Heine-Borel.

Corolário 4.3. Seja $f: M \to \mathbb{R}$ uma função contínua real em um espaço métrico compacto M. Então f atinge seu máximo e seu mínimo em M.

Prova:

Como $f(M)$ é limitado, existem $y_1 = \inf_{x \in M}\{f(x)\}$ e $y_2 = \sup_{x \in M}\{f(x)\}$. Como $f(M)$ é fechado, y_1 e y_2 pertencem a $f(M)$, isto é, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ com $x_1, x_2 \in M$. Logo $f(x_1) = \min_{x \in M}\{f(x)\}$ e $f(x_2) = \max_{x \in M}\{f(x)\}$.

■

4.4 Continuidade Uniforme

> "Aparentemente ainda não foi observado que (...) continuidade em um ponto (...) não é a continuidade (...) a qual pode ser chamada de continuidade uniforme, porque se estende uniformemente para todos os pontos e em todas as direções" (Heine 1870 apud [6, Hairer & Wanner].

A noção de continuidade uniforme começou a aparecer vagarosamente nas aulas de Dirichlet, em 1854, e Weierstrass, em 1861. A primeira publicação é devida a Heine [6, Hairer & Wanner].

Esta noção apareceu quando os matemáticos do século XIX procuravam por condições suficientes para garantir a integrabilidade de funções contínuas. Vejamos a definição:

Definição 4.6. Dizemos que $f: M \to N$ é **uniformemente contínua** em M se dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observação. Note que na definição de continuidade uniforme, uma vez dado $\delta > 0$, é necessário achar um $\delta > 0$ que funcione para "**todos**" os pontos do domínio da função f!

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.16. $f(x) = x$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Dado $\delta > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$ (se $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \delta = \varepsilon$). Ver figura 4.10.

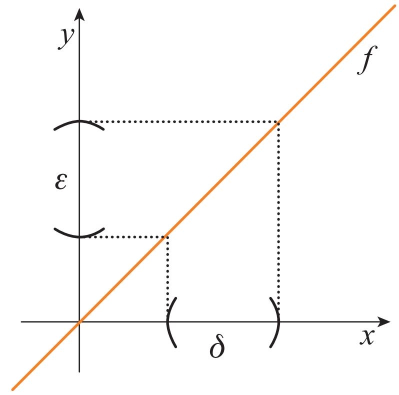


Figura 4.10

Exemplo 4.17. A função $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ dada por $f(x)=\dfrac{1}{x}$ não é uniformemente contínua em $[0,\infty)$. De fato, o δ da continuidade, em $x_0>0$, depende de ε e também diretamente de x_0, de modo que $\delta(x_0)\to 0$ se $x_0\to 0^+$.

A figura 4.11 ilustra este exemplo.

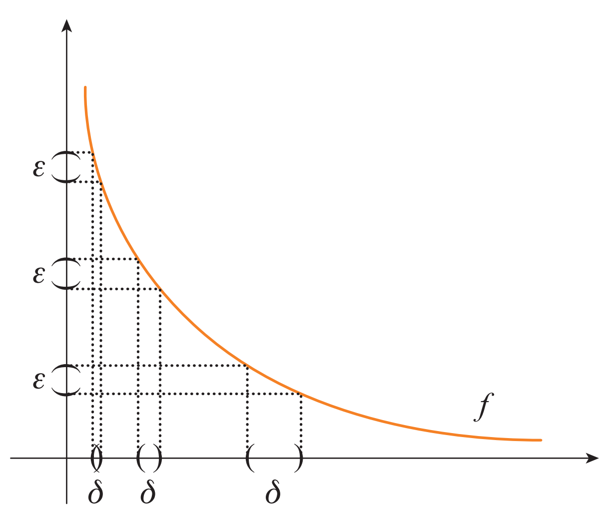


Figura 4.11

Exemplo 4.18. Se f é de Lipschitz, então f é uniformemente contínua. Vejamos:

> Dado $\varepsilon>0$, como f é de Lipschitz, $\exists k\neq 0$ tal que $d(f(x),f(y))\le kd(x,y)\ \ \forall x,y\in M$.

Tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, temos que: se $d(x,y) < \delta$ então

$d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y) < k \cdot \dfrac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.

Portanto f é uniformemente contínua.

Exemplo 4.19. A função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é Lipschitz e portanto é uniformemente contínua.

Observação. Note que a restrição de f ao intervalo $[1,\infty)$, por exemplo, é uniformemente contínua. Você consegue encontrar outros intervalos onde f é uniformemente contínua?

Exercícios Propostos

9) Decida se a função $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definida por $f(x) = x^2$ é uniformemente contínua.

10) Mostre que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é Lipschitz e portanto é uniformemente contínua.

Veremos agora um teorema (cuja primeira versão, para $\mathbb{R}^n$, é devida a Heine, 1872, [6, Hairer & Wanner]) que nos garante que toda função contínua em um compacto é uniformemente contínua.

Teorema 4.6. Seja $f:M \to N$ contínua e M compacto. Então f é uniformemente contínua em M.

Prova:

Dê $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, para todo $a \in M$ existe $\delta_a > 0$ tal que se $d(x,a) < \delta_a$ (isto é, $x \in B(a,\delta_a)$), então $d(f(x),f(a)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Agora, note que a coleção de bolas abertas de centro a e raio $\dfrac{\delta_a}{2}$; $\left\{B\left(a,\dfrac{\delta_a}{2}\right)\right\}_{a\in M}$, cobre M.

Como M é compacto, existe uma subcobertura finita, digamos,

$$B\left(a_1,\frac{\delta_1}{2}\right), B\left(a_2,\frac{\delta_2}{2}\right), \dots, B\left(a_n,\frac{\delta_n}{2}\right).$$

Seja $\delta = \min\left\{\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}, \cdots, \frac{\delta_n}{2}\right\}$. Mostraremos agora que se $x, y \in M$ são tais que $d(x,y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Como $x \in M$, $x \in B\left(a_i, \frac{\delta_i}{2}\right)$, isto é, $d(x, a_i) < \frac{\delta_i}{2}$, para algum i entre $1, 2, \ldots, n$.

Mas então, $d(y, a_i) \le d(y, x) + d(x, a_i) < \delta + \frac{\delta_i}{2} \le \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \delta_i$ e, usando a desigualdade triangular mais uma vez, temos, da continuidade em a_i, que

$$d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f(y)) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Exemplo 4.20. A função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ da por $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua em $[0, \infty)$. Vejamos:

Note que f restrita ao intevalo $[0,1]$ é uniformemente contínua pelo teorema 4.6, pois $[0,1]$ é compacto. Também a restrição de f ao intervalo $[1, \infty)$ é uniformemente contínua, pois se $x \ge 1$, $y \ge 1$, então
$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \le \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|\left|\sqrt{x} + \sqrt{y}\right| = \left|(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})\right| = \left||x| - |y|\right| \le |x - y|$
e portanto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$ na definição de continuidade uniforme.

Concluímos que $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uniformemente contínua.

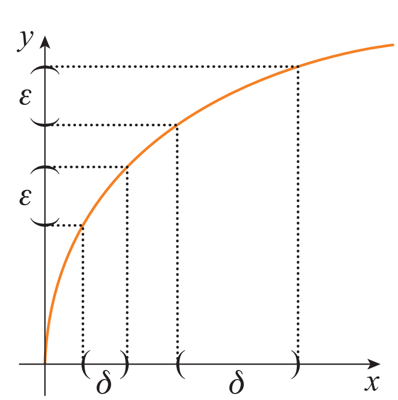


Figura 4.12

Exercícios Propostos

11) Dê um exemplo de espaços métricos M e N e uma função contínua $f: M \to N$ tal que N é compacto, mas M não é compacto.

12) Prove que $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

13) Sejam f e g funções reais uniformemente contínuas em um espaço métrico M. Mostre que cf e $f+g$ são uniformemente contínuas em M.

14) Mostre que a composição de funções uniformemente contínuas é uma função uniformemente contínua.

4.5 Conjuntos Conexos

Nesta seção estudaremos os conjuntos conexos e, mais adiante, algumas de suas aplicações, como o teorema do valor intermediário.

Intuitivamente, podemos pensar que conjuntos conexos são aqueles conjuntos que consistem de apenas um pedaço.

Segundo esta ideia, podemos afirmar que $\mathbb{R}$ (a reta real) é conexo, mas o subconjunto $[-1,0] \cup [1,2)$ não é conexo.

Mas como definir formalmente conjuntos conexos? Quais propriedades da reta real, que a tornam conexa, gostaríamos de capturar? A proposição abaixo nos dá esta resposta:

Proposição 4.4. Seja C um subconjunto aberto e fechado de $\mathbb{R}$. Então $C = \mathbb{R}$ ou $C = \varnothing$.

Prova:

Suponha que $C \neq \mathbb{R}$ e $C \neq \varnothing$. Então existem $x \in C$ e z pertencente ao complementar de C. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x < z$.

Seja $S = C \cap [x, z]$.

Note que S é fechado (pois é a intersecção de dois fechados) e limitado superiormente. Logo, S tem um supremo, digamos p, e $p \in S$.

Como $p \in S$, $p \leq z$. Mas $p \neq z$, pois $z \notin S$ (uma vez que $z \notin C$). Logo, $p < z$.

Por outro lado, C é aberto e $p \in C$. Logo existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B(p,\varepsilon) \subset C$.

Seja $t \in \mathbb{R}$ tal que $p < t < \min\{p+\varepsilon, z\}$.

Então $t \in C \cap [x,z] = S$. Mas isto é uma contradição, pois $t > p$ e p é o supremo de S (a contradição veio do fato que supomos que C é aberto e fechado e não é $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$).

Logo, nossa suposição é falsa e, portanto, $C = \mathbb{R}$ ou $C = \varnothing$.

A figura 4.13 ilustra uma das possíveis posições de t:

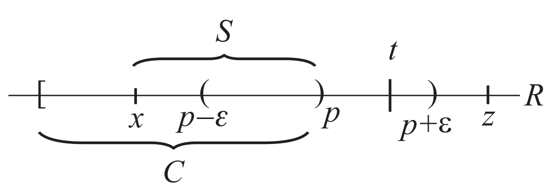


Figura 4.13

■

Podemos agora definir um conjunto conexo:

Definição 4.7. Seja (M,d) um espaço métrico. Se os únicos subconjuntos de M que são simultaneamente abertos e fechado são M e $\varnothing$, então M é dito **conexo**.

Exemplo 4.20. $\mathbb{R}$ é conexo.

Exemplo 4.21. Qualquer intervalo da reta é conexo (veremos a prova a seguir).

Exemplo 4.22. Se M é a métrica $0-1$, então (M,d) não é conexo para qualquer M, pois os conjuntos unitários $\{x\}$, onde $x \in M$, são abertos e fechados.

Exemplo 4.23. Seja $M = [0,1] \cup (2,3]$ e d a métrica usual de $\mathbb{R}$. Então (M,d) não é conexo e você pode verificar que $[0,1] \subset M$ é aberto e fechado.

O exemplo 4.23 acima nos mostra um conjunto desconexo. Ele é formado por dois "pedaços". Isto nos leva à seguinte definição:

Definição 4.8. Uma **separação** de um espaço métrico M é um par de conjuntos abertos, não vazios, disjuntos, cuja união é M.

Em símbolos, uma separação é um par de abertos U, V tal que $U \neq \varnothing$, $V \neq \varnothing$, $U \cup V = M$ e $U \cap V = \varnothing$.

Proposição 4.5. Um espaço métrico M é conexo se, e somente se, não existe uma separação de M.

Prova:

$\Rightarrow$) Primeiro vamos assumir que M é conexo.

Supor que U, V é uma separação de M. Então $U \neq \varnothing$ e $U^C = V$ é aberto. Logo U é fechado e a hipótese implica que $U = M$ e, portanto, $V = \varnothing$, o que é uma contradição. Logo, não existe separação de M.

$\Leftarrow$) Hipótese: Não existe uma separação de M.

Tese: M é conexo.

Vamos supor que M não é conexo. Seja C fechado e aberto de M e suponha que $C \neq M$ e $C \neq \varnothing$. Então C, C^C formam uma separação de M, o que contradiz a hipótese. Logo, $C = M$ ou $C = \varnothing$.

■

Com o resultado acima, podemos mostrar que o conjunto dos racionais, visto como subconjunto de $\mathbb{R}$, não é conexo. Precisamos então definir conexidade para subconjuntos de um espaço métrico. Temos a seguinte definição:

Definição 4.9. Um **subconjunto de um espaço métrico é conexo** se ele for conexo com a métrica induzida (lembre-se que os abertos são definidos em termos da métrica).

Você consegue achar uma separação para $\mathbb{Q}$?

Exemplo 4.24. $\mathbb{Q}$ não é conexo. Uma separação de $\mathbb{Q}$ é

$$\begin{aligned} U &= \{x \in \mathbb{Q} / x < \sqrt{2}\} \\ V &= \{x \in \mathbb{Q} / x > \sqrt{2}\} \end{aligned}.$$

Gostaríamos agora de construir novos conjuntos conexos, a partir dos conjuntos que conhecemos. Para isto, precisamos de alguns resultados. Vejamos:

Teorema 4.7. Se f é uma função contínua de um espaço métrico conexo M em um espaço métrico N, então $f(M)$ é conexo.

Prova:

Suponha que $f(M)$ não é conexo. Então existe uma separação U, V de $f(M)$ tal que

$f(M) = U \cup V$,

$U \cap V = \varnothing$,

$U \neq \varnothing$ e $V \neq \varnothing$,

U, V são abertos.

Mas então, como f é contínua $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ é uma separação de M (verifique!), o que contradiz a conexidade de M.

Logo, $f(M)$ é conexo.

■

O teorema acima é muito importante e nos permite encontrar um grande número de conjuntos conexos. Usaremos este teorema para mostrar que todos os intervalos da reta real são conexos. Assumindo este resultado, temos que o subconjunto $S = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right) : 0 < x < 1 \right\}$ de $\mathbb{R}^2$ é conexo.

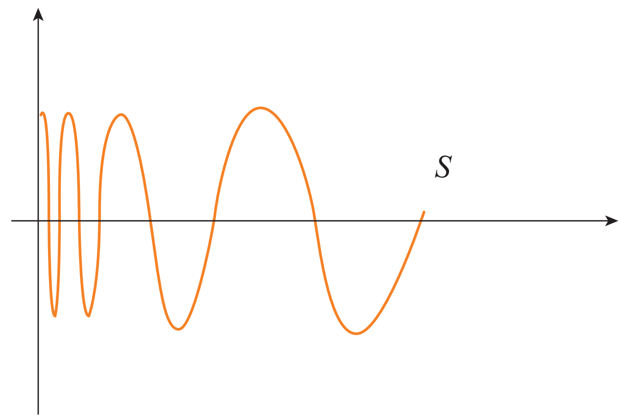


Figura 4.14

Por que S é conexo?

Simplesmente porque S é a imagem do conexo $(0,1)$ pela função contínua $f:(0,1)\rightarrow\mathbb{R}^2$ dada por $f(x)=\left(x,\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$.

Ainda mais interessante e muito surpreendente é o fato que o fecho de $\overline{S}=S\cup\{(0,t):t\in[-1,1]\}$ é conexo (veja a figura 4.15).

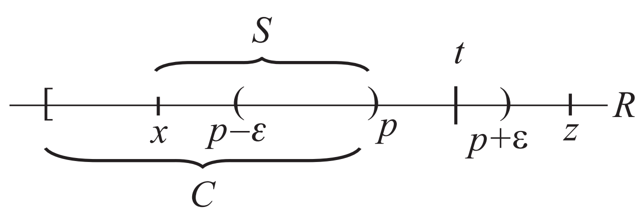


Figura 4.15

Este resultado segue da proposição abaixo.

Proposição 4.6. Seja C um subconjunto conexo de um espaço métrico M. Se $Y\subset M$ é tal que $C\subset Y\subset\overline{C}$, então Y é conexo. Em particular $\overline{C}$ é conexo.

Prova:

A prova desta proposição pode ser encontrada em [10, Kuhlkamp].

■

A proposição acima nos permite mostrar alguns resultados surpreendentes, que desafiam a nossa intuição. Com ela você pode fazer o seguinte exercício:

Exercício Proposto

15) Mostre que $S \cup \{(0,q) : q \in \mathbb{Q}; -1 \le q \le 1\}$, onde

$$S = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right) : 0 < x < 1 \right\} \text{ é conexo.}$$

Vamos agora, finalmente, mostrar que os intervalos de $\mathbb{R}$ são conexos.

Proposição 4.7. Todo intervalo aberto da reta real é conexo.

Prova Parcial:

Lembre que já mostramos que $\mathbb{R}$ é conexo. Para mostrar, por exemplo, que o intervalo $(-1,1)$ é conexo, basta verificar (faça!) que a função $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ é contínua e sobrejetora. Daí, o resultado segue do Teorema 4.7.

Uma vez provado que $(-1,1)$ é conexo, segue que $(0,1)$ é conexo, pois é a imagem pela função contínua

$$f : (-1,1) \to (0,1) \text{ definida por } f(x) = \frac{x+1}{2}$$

do intervalo conexo $(-1,1)$ (verifique!).

Finalmente, qualquer intervalo da forma (a,b) é conexo, pois é a imagem da função contínua

$$\psi : (0,1) \to (a,b) \text{ dada por } \psi(t) = (1-t)a + tb$$

(verifique!).

■

Exercício Proposto

16) Mostre que os intervalos abertos $(a,+\infty)$ e $(-\infty,b)$ são conexos.

Proposição 4.8. Qualquer intervalo da reta é conexo.

Prova:

Seja I um intervalo da reta. Pela proposição anterior o interior do intervalo I é conexo e então segue da proposição 4.6 que I é conexo.

■

Exercício Proposto

17) Mostre que a recíproca da proposição anterior é válida, isto é, mostre que se C é um conjunto conexo de $\mathbb{R}$, então C é um intervalo.

Dica. Suponha que C não é um intervalo e encontre uma separação para C.

Terminaremos nosso estudo com uma aplicação muito importante da conexidade: o teorema do valor intermediário.

4.6 Teorema do Valor Intermediário

O teorema do valor intermediário é um dos teoremas principais no estudo do Cálculo e dele dependem inúmeros resultados que você deve ter visto durante seu curso. Na sua versão mais simples, o teorema toma a seguinte forma:

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)<y<f(b)$ ou $f(b)<y<f(a)$ então existe $C\in(a,b)$ tal que $f(C)=y$.

Provaremos uma versão um pouco mais geral.

Teorema 4.8 (Teorema do Valor Intermediário). Seja M um espaço métrico conexo e $f:M\to\mathbb{R}$ contínua. Sejam $y_1,y_2\in f(M)$ e $y_1<y<y_2$. Então existe $x\in M$ tal que $f(x)=y$.

Prova:

Como M é conexo e f é contínua, $f(M)$ é conexo. Como $f(M)\subset\mathbb{R}$, $f(M)$ é um intervalo (ver o último exercício da seção anterior). Então dados $y_1,y_2\in f(M)$ e y tal que $y_1<y<y_2$, $y\in f(M)$. Logo, $\exists x\in M$ tal que $y=f(x)$.

■

Como uma aplicação do teorema do valor intermediário, provaremos que na linha do equador existem dois pontos opostos com a mesma temperatura (ver figura 4.16). Isto mesmo. Usaremos a teoria desenvolvida nesta seção para resolver um problema real. Para isto, vamos supor que a linha do equador é o círculo S^1 em $\mathbb{R}^2$, isto é,

$$S^1 = \{(\cos t, \operatorname{sen} t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

e que $f : S^1 \to \mathbb{R}$ é a função temperatura, a qual é contínua.

Note que S^1 é conexo, pois é a imagem da função contínua $h : [0, 2\pi] \to S^1$ dada por $h(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Agora, defina $g(x) = f(x) - f(-x),\ \forall x \in S^1$. Observe que g é contínua. Seja $p \in S^1$. Considere $g(p)$ e $g(-p)$. Note que

$$g(-p) = f(-p) - f(p) = -g(p).$$

Logo, ou $g(p) = 0$, o que implica que $f(p) = f(-p)$, ou $g(p)$ e $g(-p)$ tem sinais opostos. Neste caso, pelo teorema do valor intermediário, existe um ponto $u \in S^1$ tal que $g(u) = 0$ e isto implica que $f(u) = f(-u)$, ou seja, a temperatura no ponto u é igual no ponto $-u$.

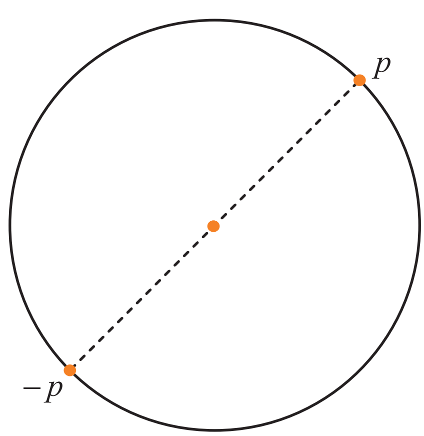


Figura 4.16

É possível também provar que existem dois pontos opostos na terra com a mesma temperatura e pressão atmosférica. Mas para isto é necessário o teorema de Borsur-Ulam (ver [15, Munkres]).

Aos interessados, sugerimos uma pesquisa sobre o assunto na Internet. Para terminar, seguem mais alguns exercícios.

Exercícios Complementares

1) Analise a continuidade das funções:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases};$$

b) $g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases};$$

c) $h:X\to\mathbb{R}$

$$h(x)=\begin{cases}2, & x<1\\ 1, & x=1\end{cases} \qquad X=\left\{1,1-\frac{1}{2},1-\frac{1}{3},\cdots\right\}.$$

2) Mostre que se $f:X\to\mathbb{R}$ é contínua em $a\in X$, então $|f|$ também o é.

3) Seja $X\subset\mathbb{R}$ finito. Seja $f:X\to\mathbb{R}$. Analise a continuidade de f.

4) Sejam $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínuas. Defina $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)[g(x^3)]^2$. h é contínua? Justifique.

5) Mostre que a função $f(x)=x^2$ definida para $|x|\le 17$ é lipschitziana, mas $f(x)=x^2$ definida em $-\infty<x<+\infty$ não é. Dê outros exemplos de funções lipschitzianas.

6) Uma função $f:M\to N$ satisfaz a "condição de Holder" de ordem k se existe um $c>0$ tal que $d(f(x),f(y))\le c[d(x,y)]^k$. Mostre que nestas condições f é contínua.

7) Sejam M, N espaços métricos, $f,g:M\to N$ contínuas e X denso em M. Se $f(x)=g(x)$, $\forall x\in X$, mostre que $f=g$.

8) Dê um exemplo de uma função contínua $f:M\to N$ e um aberto $X\subset M$ tal que $f(X)$ não é aberto.

9) Repita o exercício 8 para X fechado.

10) Seja M um espaço métrico e seja $X_A : M \to \mathbb{R}$ a função característica de um subconjunto $A \subset M$, isto é, $X_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $X_A(x) = 0$ se $x \notin A$. Mostre que X_A é contínua em $p \in M$ se, e somente se p não é um ponto da fronteira de A.

11) Defina uma bijeção $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

12) Identifique se é verdadeiro ou falso, justificando sua resposta: Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções contínuas tais que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$, então $f = g$.

13) Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma isometria, isto é, $d(f(x), f(y)) = d(x, y), \forall x, y \in M$. Provar que f é bijeção.

14) Seja $A = (0,1]$. Encontre uma cobertura aberta de A que não possui subcobertura finita.

15) Encontre uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(K)$ não é compacto. Repita o processo para K conexo.

16) Verifique se são compactos (métrica usual):

a) $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$;

b) $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$;

c) $B = \{2\} \cup [3,4]$ em $\mathbb{R}$;

d) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$ em $\mathbb{R}$;

e) $[1,2] \cap \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$;

f) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \le x \le 1 \text{ e } x \notin \mathbb{Q}\}$;

g) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 1\}$;

h) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy = 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 < 5\}$.

17) Seja M um espaço métrico com a métrica discreta. Mostre que M é compacto se, e somente se, M é finito.

18) Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico tais que A é compacto e B é fechado. Mostre que $A \cap B$ é compacto (quando $A \cap B \neq \varnothing$).

19) As seguintes afirmações a respeito de $\mathbb{R}^n$ são verdadeiras. Justifique-as:

a) $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$ é compacto;

b) $S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ é compacto;

c) Uma bola aberta $B(p,r)$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$ e $\forall r > 0$ não é um conjunto compacto.

20) Se A e B são subconjuntos compactos de um espaço métrico M, mostre que $A \cap B$ e $A \cup B$ são compactos.

21) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e limitada é obrigatoriamente uniformemente contínua?

22) Sejam $f : B \to \mathbb{R}^m$ contínua e injetiva e $B \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Provar que $f^{-1} : f(B) \to B$ é contínua.

23) Seja $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. É f obrigatoriamente limitada?

24) Seja M um espaço métrico. Mostre que são equivalentes:

a) M não é conexo;

b) Existem subconjuntos não vazios U e V de M tal que $M = U \cup V$, $\overline{U} \cap V = \varnothing = U \cap \overline{V}$.

25) Se A e B são subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$, dê exemplos para mostrar que $A \cap B$, $A \cup B$ e $A - B$ podem ser conexos ou desconexos.

26) Seja A um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e (x_n) uma sequência de Cauchy em A. Mostre que (x_n) converge para um ponto de A.

27) Dê exemplo de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um conjunto fechado $B \subset \mathbb{R}$ tal que $f(B)$ não é fechado. Isso é possível se B for também limitado?

28) Seja f uma função contínua de um espaço métrico compacto e conexo, M em $\mathbb{R}$. Mostre que $f(M)$ é um intervalo fechado.

29) Será a união de conjuntos conexos um conjunto conexo?

Resumo

Neste capítulo você aprofundou seu conhecimento sobre uma classe muito importante de funções: as funções contínuas.

Você também se deparou com algumas noções novas, tais como, conjuntos compactos, conjuntos conexos e continuidade uniforme.

Foram apresentados alguns teoremas importantes, que embasam o estudo de Cálculo, como o teorema do valor intermediário e o teorema que garante que toda função contínua em um espaço compacto atinge seus extremos.

Você concluiu seu estudo vendo uma aplicação prática do teorema do valor intermediário.

Respostas dos Exercícios

Capítulo 1

Exercícios Propostos

1) Como X e Y são enumeráveis, existem $f : X \to \mathbb{N}$ e $g : Y \to \mathbb{N}$ bijeções.

Definimos
$$h : X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$h(x,\ y) = (f(x),\ g(y))$$

Então h é injetiva. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, pela proposição 1.1, temos que $X \times Y$ é enumerável.

2) Vamos exemplificar com p=4. Você precisa encontrar 4 conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4, infinitos e disjuntos, tais que

$$\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

Obtenha os conjuntos agrupando os naturais de 4 em 4, em ordem crescente. Coloque o primeiro elemento de cada grupo no conjunto A_1, o segundo no conjunto A_2, o terceiro no A_3 e, finalmente, o quarto elemento no conjunto A_4. Veja:

$$\mathbb{N} = \left\{ \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4},\ \underbrace{5,\ 6,\ 7,\ 8},\ \underbrace{9,\ 10,\ 11,\ 12},\ldots \right\}$$

$$A_1 = \{1,\ 5,\ 9,\ \ldots\}$$

$$A_2 = \{2,\ 6,\ 10,\ \ldots\}$$

$$A_3 = \{3,\ 7,\ 11,\ \ldots\}$$

$$A_4 = \{4,\ 8,\ 12,\ \ldots\}$$

Podemos escrever:

$$A_1 = \{4n - 3,\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$A_2 = \{4n - 2,\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$A_3 = \{4n - 1,\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$A_4 = \{4n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

3) Supor X finito. O número de elementos de $f(X)$ é menor ou igual ao numero de elementos de X, já que f é uma função. Como f é uma sobrejetiva, $Y = f(X)$.

Supor Y finito. Como f é injetiva, o número de elementos de X é menor ou igual ao número de elementos de Y.

É interessante você fazer um diagrama para visualizar estes resultados.

4) Basta você definir

a) $f: \mathbb{N} \to P$

$$f(n) = \begin{cases} 2n-2, \text{ se } n \text{ é par} \\ -2n, \text{ se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

b) $f: \mathbb{N} \to I$

$$f(n) = 1 - 2n$$

c) $f: \mathbb{N} \to Q_p$

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2p}, \text{ se } n \text{ é par} \\ \dfrac{1-n}{2p}, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

"Brinque" com estas funções convencendo-se que elas são bijeções.

5)

a) Sim. Sejam

$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots\}$

Basta você definir

$f: X \to Y$

$f(x_i) = y_i$.

b) Não, pois um elemento de X não pode ter mais de uma imagem pela função g.

6) Use o processo diagonal de Cantor e proceda de forma análoga à apresentada no texto, para provar que o conjunto dos números reais entre 0 e 1 é não enumerável.

7) Temos que mostrar que as condições S.1 e S.2 são equivalentes as condições S.1′ e S.2′.

Suponha primeiro que S.1 e S.2 são válidas. Então é claro que S.1′ é verdadeira. Agora, dado $\varepsilon > 0$, se não existe x em X tal que $b - \varepsilon < x \leq b$, então, como S.1′ é válida, $x \leq b - \varepsilon$ para todo x em X. Portanto $b - \varepsilon$ é uma cota superior e S.2 implica que $b \leq b - \varepsilon$, uma contradição.

Por outro lado, suponha que b seja tal que S.1′ e S.2′ são válidas e seja c tal que $x \leq c$ para todo x em X. Se $b > c$ então, para $\varepsilon = \frac{b-c}{2}$, por S.2′, temos que existe x em X tal que $b - \varepsilon < x \leq b$. Mas isto implica que $x > \frac{b+c}{2} > c$, uma contradição. Logo $b \leq c$ como desejado e S.2 é válida.

Exercícios complementares

1) Primeiro suponha que X é infinito. Então podemos listar infinitos elementos distintos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ em e $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \cup \{x_1, x_2, \ldots\}^c$. Seja $Z = \{x_2, x_3, \ldots\} \cup \{x_1, x_2, \ldots\}^c$. Então Z é um subconjunto próprio de X e a função $f: X \to Z$, dada por $f(x_i) = x_{i+1}$ para $x_i \in \{x_1, x_2, \ldots\}$ e $f(x) = x$ para $x \in \{x_1, x_2, \ldots\}^c$ é uma bijeção.

Por outro lado, se X é finito então X tem n elementos e qualquer subconjunto próprio de X tem menos do que n elementos e portanto não existe bijeção entre X e este subconjunto.

2) Sim. Você pode definir uma bijeção.

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to S$$

$f(p, q) =$ circunferência de centro (p, q) e raio 1.

3) Considere 2 conjuntos X e Y enumeráveis. Podemos, então, listar seus elementos:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$
$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$$

Você pode criar uma lista com os elementos do conjunto $W = X \cup Y$, tomando, alternativamente, um elemento de X e um elemento de Y, na ordem crescente dos índices.

Ou seja,

$$w_1 = x_1,\ w_2 = y_1,\ w_3 = x_2, w_4 = y_2, w_5 = x_3, w_6 = y_3, \ldots$$

4) S é enumerável, pois é a união enumerável dos conjuntos enumeráveis S_i, onde S_i consiste do conjunto de todas as sucessões de zeros e uns cujos termos a partir do i-ésimo termo são iguais a zero.

5) Você pode escrever

$$X = \left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \ldots, \frac{2}{n}, \ldots\right\}$$

a) 2 é uma cota superior de X. Outros 2 exemplos de cota superior são: 3 e 5.

0, -1, -15 são exemplos de cotas inferiores.

b) $\sup X = 2$, $\inf X = 0$

6)

a) São exemplos de cotas superiores: 2, 50, 1500.

São exemplos de cotas inferiores: 1, 0, -1500.

$\sup X = 2$ e $\inf X = 1$.

b) O conjunto Y não admite cotas superiores nem inferiores.

c) São exemplos de cotas superiores: 2; 2,01; 2,001.

O conjunto Z não admite cota inferior.

$\sup Z = 2$; não existe $\inf Z$.

7) I.1′ – a é cota inferior de X.

I.2′ – Qualquer número maior que a não é cota inferior de X.

8)

a) $X = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x > 0 \text{ e } x^2 < 5\}$

b) $X = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x > 0 \text{ e } x^2 > 5\}$

c) $X = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x > 0 \text{ e } 3 < x^2 < 5\}$

Observe que nestes conjuntos, quando existem, o supremo e o ínfimo são irracionais. Você pode listar muitos outros exemplos.

9)

a) Verdadeira. O supremo de X é o elemento máximo de X e o ínfimo é o elemento mínimo de X.

b) Verdadeira. Se um conjunto tem supremo ele é a menor das cotas superiores e qualquer número maior que ele também é uma cota superior.

c) Falsa. Por exemplo, o conjunto $X = \left\{\frac{\sqrt{2}}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ tem ínfimo igual a zero.

d) Falsa. Por exemplo, o conjunto dos naturais é ilimitado, está contido em $\mathbb{Q}$, e não é denso em $\mathbb{R}$.

10) 1ª parte: Basta você tomar o exemplo do item (a) do exercício 8.

$X = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ é um conjunto de números irracionais e $\sup X = 0$.

11) Basta você mostrar exemplos de intervalos encaixados que não satisfazem apenas a hipótese listada e verificar que a conclusão não é válida.

a) Considere

$$I_n = [n, \infty).$$

Os intervalos I_n são fechados e encaixados.

No entanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$$

b) Considere

$$I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

Os intervalos I_n são limitados e encaixados. No entanto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi \, .$$

Capítulo 2

Exercícios Propostos

2)

a) $d(f,g) = \sup\limits_{x \in [0,\ 1]} |\, f(x) - g(x) \,| = \sup\limits_{x \in [0,\ 1]} |\, x - 1 \,| = 1 \, .$

b) $d(f,g) = \sup\limits_{x \in [0,\ 1]} |\, f(x) - g(x) \,| = \sup\limits_{x \in [0,\ 1]} |\, x^2 - x \,| \, .$

Note que o $\sup$ acima é atingido quando $(x^2 - x)' = 0$, isto é, quando $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Logo, $d(f,g) = \sup\limits_{x \in [0,\ 1]} |\, (x^2 - x) \,| = \left| \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} \right| = \left| \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} \right| = \dfrac{1}{4}$.

3) Possíveis exemplos são:

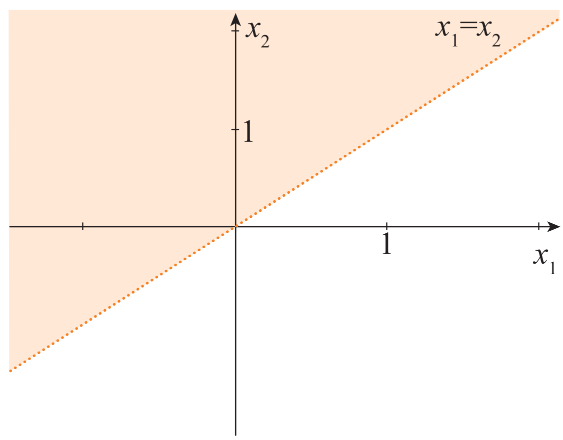
a) $A = \{0\}$, $B = \{3\}$;

b) $A = \{(0,\ 2)\}$;

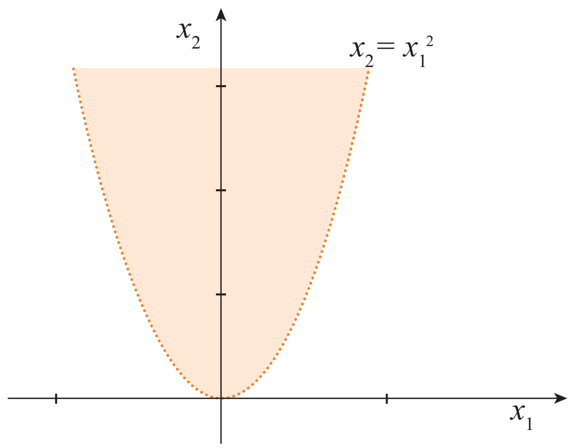
c) $A = \{(0,\ 0,\ 0)\}$, $B = \{(0,\ 0,\ 1)\}$ ou $A = \{(x, y) : x \leq 1\}$ e $B = \{(x, y) : x > y^2 + 2\}$.

4)

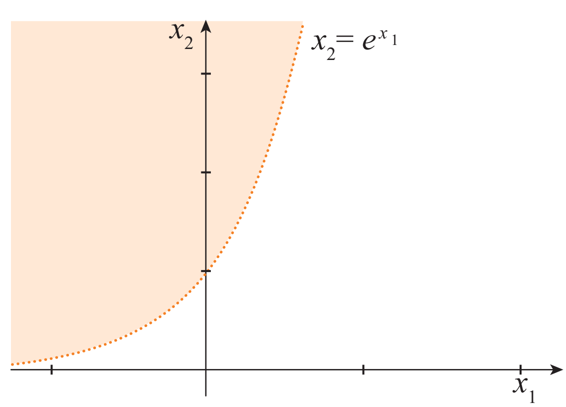
a) $Int(A) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 > x_1\}$.



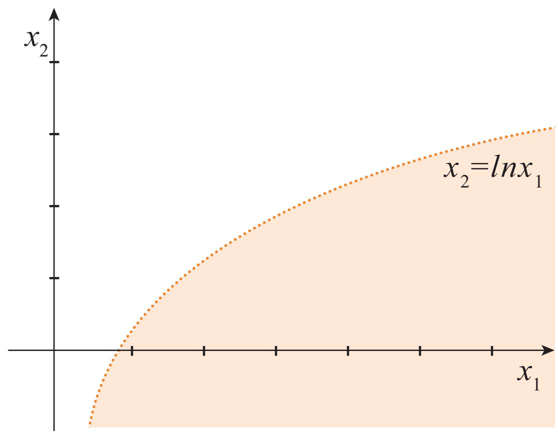
b) $Int(A) = A$.



c) $Int(A) = A$.



d) $Int(A) = A$.



e) $Int(A) = \varnothing$.

f) Note que $A = (0, +\infty)$. Logo, $Int(A) = A$.

6) Em $\mathbb{R}$, tome $A = \varnothing$, $B = \prod$. Então $\text{Int}(A) = \varnothing$, $\text{Int}(B) = \varnothing$ e

$\text{Int}(A \cup B) = \mathbb{R}$.

7)

a) $A_1 \cap A_2$ é aberto (Propriedade Ab2).

b) Supor que $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}$ é aberto.

c) Provar que $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ é aberto.

Como $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = (A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \cap A_n$, segue o resultado, novamente pela propriedade Ab2.

8) Seja $B[x,r]$ uma bola fechada. Vamos mostrar que seu complementar é aberto. Para isto, tome y e $C(B[x,r])$. Como a bola é fechada, temos que

$$\varepsilon = d(y, B[x,r]).$$

Mas, então,

$$B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset C(B[x,r]).$$

E, portanto, $C(B[x,r])$ é aberto, como desejado.

9) Por indução, já sabemos que para $n=2$ a propriedade vale (veja Fe 2).

Hipótese de indução: supor que a propriedade é válida para n, ou seja, se $F_1,...,F_n$ são conjuntos fechados, então $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ é fechado.

Para $n+1$: sejam $F_1,...,F_n,F_{n+1}$ fechados. Então,

$\bigcup_{i=1}^{n+1} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \cup F_{n+1}$, e como $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ é fechado pela hipótese de indução, segue que $\bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$ é fechado por Fe 2.

10) Em $\mathbb{R}^n$, todo conjunto finito é fechado, pois pode ser escrito como uma união finita de conjuntos unitários (que são fechados). O resultado segue válido para qualquer espaço métrico.

11) Em $\mathbb{R}$, sejam $F_n = \left[\frac{1}{n},1\right], n=1,2,3,...$. Então, $\bigcup_{n=1}^{\infty} Fn = (0,1]$, que não é fechado em $\mathbb{Q}$.

12) $S' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \le x^2 - 1\}$.

13)

a) Não é fechado, pois $0 \in A'$ e $0 \notin A$.

b) É fechado.

c) É fechado.

d) Não é fechado, pois $0 \in D'$ e $0 \notin D$.

e) Domínio de $f = \{x \in \mathbb{R} : x \ne 1\}$. Logo, não é fechado.

f) É fechado;

g) É fechado.

14)

a) $\overline{A} = \{0\} \cup A$.

b) $\overline{B} = [0,\infty)$.

15) Afirmação: $\overline{A\cap B}\subset \overline{A}\cap \overline{B}$.

Prova: Seja $x\in \overline{A\cap B}$.

Se $x\in A\cap B$, então é claro que $x\in \overline{A}\cap \overline{B}$.

Se $x\in (A\cap B)'$ então toda bola aberta que contém x contém pontos de $A\cap B$ distintos de x. Logo, toda bola aberta que contém x contém pontos de A e pontos de B e, portanto, $x\in A'\cap B'\subset \overline{A}\cap \overline{B}$, como desejado.

Agora, seja $A=(0,1)$ e $B=(1,2)$ em $\mathbb{R}$.

Então, $\overline{A\cap B}=\varnothing$ e $\overline{A}\cap \overline{B}=\{1\}$.

16) Sim para $\mathbb{R}^n$. Falso em geral. Por exemplo, considere M como métrica discreta.

17)

a) Falso. Por exemplo, se $A=(0,1)$ e $B=(-1,1)$ em $\mathbb{R}$, então $Fr(A)=\{0,\ 1\}$ e $Fr(B)=\{-1,\ 1\}$.

b) Falso. Por exemplo, se $B=(0,\ 1)\cup\{2\}$, então $2\in Fr(B)$, mas $2\notin B'$.

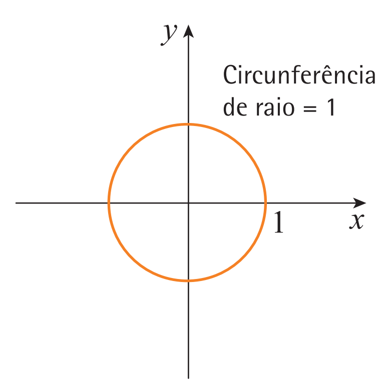
c) Seja $x\in \mathrm{Fr}(A\cup B)$. Então $\forall r>0$, $B(x,r)\cap(A\cup B)\neq\varnothing$ e $B(x,r)\cap(A\cup B)^C\neq\varnothing$. Logo $B(x,r)\cap A^C\neq\varnothing$ e $B(x,r)\cap B^C\neq\varnothing$, $\forall r>0$.

Suponha agora que existe $r_1>0$ tal que $B(x,r_1)\cap A=\varnothing$. Então, $\forall r<r_1$, $B(x,r)\cap A=\varnothing$ e portanto $B(x,r)\cap B\neq\varnothing$, $\forall r>0$ (pois, $B(x,r)\cap(A\cup B)\neq\varnothing$). Logo, $x\in \mathrm{Fr}(B)$.

Se não existe r_1 como suposto, então $x\in \mathrm{Fr}(A)$. Logo, $\mathrm{Fr}(A\cup B)\subseteq \mathrm{Fr}(A)\cup \mathrm{Fr}(B)$.

18)

a) $Fr(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$.



b) $Fr(Int(A))=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$.

c) $Fr(A)=[0,\ 1]$.

d) $Fr(B)=\{0,\ 1\}$.

e) $Fr(C)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=x^2-4x+3\}$.

19)

a) $A = (0, \infty)$ e $B = (-\infty, 0)$.

b) $A = (-1,\ 1)$ em $\mathbb{R}$. $Fr(A) = \{-1, 1\}$.

Exercícios Complementares

1) Neste exercício temos que verificar se as condições $M1$ a $M3$ da definição de métrica são satisfeitas.

a) Não é métrica, pois $d(2,-2) = 0$; logo, não satisfaz M1.

b) Não é métrica, pois $d(2,-2) = 0$; logo, não satisfaz $M1$.

c) Não é métrica. Note que

$$d(0,\ 1) = 1 > d\left(0, \frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

logo, $M3$ não é satisfeita.

2)

a) É métrica. b) Não é métrica.

3) Para verificar $M1$, note que

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow | f(x) - f(y) | = 0 \Rightarrow f(x) = f(y),$$

e como f é injetora (estritamente crescente), temos que $x = y$.

Para verificar $M3$, basta notar que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= | f(x) - f(y) | = | f(x) - f(z) + f(z) - f(y) | \leq \\ &\leq | f(x) - f(z) | + | f(z) - f(y) | \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

4) $d(f, g) = \sup\limits_{x \in [1,\ 3]} | x^2 - x - 1 |$.

Como $(x^2 - x - 1)'$ não se anulam em $[1,\ 3]$, o sup é atingido em um dos extremos. Portanto, $d(f, g) = 5$.

5)

a) Seja $p \in \mathbb{R}$. Se $p \in \mathbb{Q}$, ok.

Se $p \notin \mathbb{Q}$, use a representação decimal infinita de p: $p = a,\ a_1\ a_2 \ldots a_n \ldots$ e considere a sequência de números racionais

$$
\begin{array}{l}
a \\
a, a_1 \\
a, a_1\ a_2 \\
\vdots \\
a, a_1\ a_2 \ldots a_n \\
\vdots
\end{array}
$$

Como esta sequência converge para p, dado qualquer $\varepsilon > 0$, a partir de um n_0, a distância entre os termos desta sequência e p são menores que ε.

Logo, $\inf\{d(p,x) / x \in \mathbb{Q}\} = 0$.

b) O raciocínio é análogo ao item a.

6) Se A não é unitário, sejam $x, y \in A$. Então, $\operatorname{diam}(A) \geq d(x,y) > 0$. Logo, $d(x,y) = 0 \Rightarrow A$ é unitário. A recíproca é clara.

7) Seja $a \in \mathbb{R}$. Então, existe um número inteiro m tal que $m \leq a \leq m+1$.

Logo, $d(a, \{m, m+1\}) \leq \dfrac{1}{2}$ e, portanto, $d(a, \mathbb{Z}) \leq \dfrac{1}{2}$.

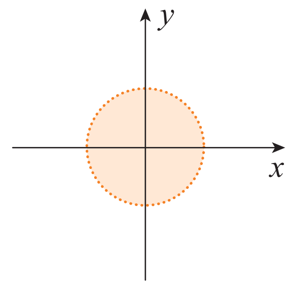
8) Como $p \in B\left(p, \dfrac{1}{n}\right) \forall n \in \mathbb{N}, p \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(p, \dfrac{1}{n}\right)$.

Se $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(p, \dfrac{1}{n}\right)$, então $d(x,p) < \dfrac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$.

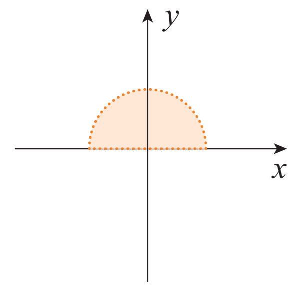
Logo, $d(x,p) = 0$ e, portanto, $x = p$.

9)

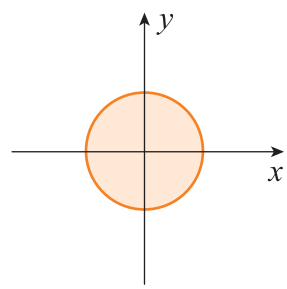
a)



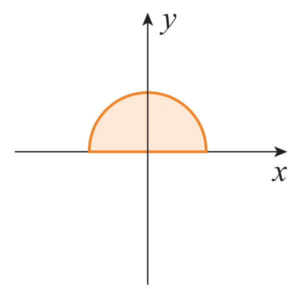
b)



c)



d)



10)

a) $int(\mathbb{Q}) = \varnothing$.

b) $int(\mathbb{Q}) = \varnothing$.

c) $\mathbb{Q}$.

d) $\text{int}((1,\ 2)) = (1,\ 2)$.

e) $\mathbb{Q}$.

f) $(1,\ 2)$.

g) $(1,\ 2)$.

h) $\text{int}([1,\ 2] \cup \{3\}) = (1,\ 2)$.

11)

a) Fechado.

b) Aberto.

c) Nem aberto nem fechado.

d) Fechado.

e) Aberto.

f) Aberto.

g) Aberto.

12) $\mathbb{Z}' = \varnothing : \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

$(\mathbb{R} - \mathbb{Q})' = \mathbb{R};\ \overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$((0,\ 2))' = [0,2];\ \overline{(0,\ 2)} = [0,2]$

$([0,2))' = [0,2];\ \overline{[0,2)} = [0,\ 2]$

$([0,2])' = [0,2];\ \overline{[0,2]} = [0,2]$

$(\mathbb{Q} \cap (0,\ 1))' = [0,\ 1];\ \overline{\mathbb{Q} \cap (0,\ 1)} = [0,\ 1]$

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}' = \{0\};\ \overline{\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$

13) Se $a \notin A$, então é claro que $A - \{a\} = A$ é aberto.

Se $a \in A$. Seja $x \in A - \{a\}$. Como A é aberto, existe $r_1 \in \mathbb{R}$ tal que $B(x, r_1) \subset A$. Seja $r = \min\{d(x,a), r_1\}$. Então, $B(x,r) \subset A - \{a\}$ e, portanto, $A - \{a\}$ é aberto.

14) Seja $A = \{a_1, \ldots a_n\} \subseteq M$. Tome $r = \min\{d(a_i, a_j);\ i, j = 1, 2, \ldots, n\}$. Então, se $a \in A$, $B(a,r) = \{a\} \subseteq A$ e portanto A é aberto.

15) Sejam $F_n = [n, \infty),\ n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$. Então, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

Sejam $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right),\ n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$. Então, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

16)

a) $X = (0,\ 1)$ em $\mathbb{R}$.

b) $X = Q$ em $\mathbb{R}$.

c) $X = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ em $\mathbb{R}$.

d) $X = \mathbb{R}$.

19)

a) $Fr(A_1) = \{a_1\}$, $Fr(A_2) = \{0,\ 1,\ 3\}$, $Fr(A_3) = \mathbb{Z}$.

b) $Fr(B_1) = B_1$, $Fr(B_2) =$

$= \{(x, y : x = 0, y > 0)\} \cup \{(x,y) : y = 0, x > 0\} \cup \{0,0\}.$

20)

a) $A' = \varnothing$.

b) $B' = \mathbb{R}^2$.

c) $C' = \{(0,\ 0)\}$.

d) $D' = \left\{\left(0, \dfrac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\left(\dfrac{1}{m}, 0\right), m \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(0,0)\}$.

e) $E' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ e } y = 0\}$.

21)

a) Note que se $x \in \text{int}(A)$, então existe uma bola aberta $B(x,r)$ completamente contida em A, e que, portanto, não contém pontos do complementar de A. Logo, $x \notin Fr(A)$.

Por outro lado, se $a \in A \setminus Fr(A)$, então existe uma bola aberta $B(a,r)$ completamente contida em A e, portanto, $a \in \text{int}(A)$.

b) Seja $x \in \overline{A}$. Então, por definição, $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \forall \varepsilon > 0$. Logo, $x \notin \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ e, portanto, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

Por outro lado, seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

Então, $x \notin \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ e, portanto, toda bola aberta $B(x,r)$ contém pontos do complementar de $\mathbb{R}^n \setminus A$, ou seja, de A. Logo, $x \in \overline{A}$.

22)

a) Falso. Por exemplo, seja $A = \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ com métrica usual. Então, $\overline{A} = \mathbb{R}$ e $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, mas $\text{int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$.

b) Verdadeiro. Segue diretamente da definição de fecho.

c) Falso. Em $\mathbb{R}$, tome $A = [0,\ 1)$. Então, $\overline{\text{int}(A)} = [0,\ 1] \neq A$.

d) Falso. Em $\mathbb{R}$, tome $A = \mathbb{Q}$. Então, $Fr(\overline{\mathbb{Q}}) = Fr(\mathbb{R}) = \varnothing$ e $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

e) Verdadeiro. Note que, se $x \in A$, como A é aberto, então existe uma bola aberta $B(x,r)$ completamente contida em A e, portanto, $x \notin Fr(A)$.

23)

a) Segue diretamente da definição de fronteira de um conjunto.

b) Seja $x \in \overline{A \cap B}$. Então, para toda bola aberta $B(x,r)$, temos que $B(x,r) \cap (A \cap B) \neq \varnothing$ e, portanto, $B(x,r) \cap B \neq \varnothing$ e $B(x,r) \cap B \neq \varnothing$. Logo, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

c) Seja $x \in \overline{A \cup B}$. Então, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$ e $x_n \in A \cup B \ \forall n$. Sejam $C = \{n \in \mathbb{N} / x_n \in A\}$ e $D = \{n \in \mathbb{N} / x_n \in B\}$. É claro que C ou D é um conjunto infinito. Sem perda de generalidade, suponha que C é infinito. Então, a subsequência $(x_k)_{k \in C}$ converge para x e $x_n \in A \ \forall n \in C$. Logo, $x \in \overline{A} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

d) Segue diretamente da definição de interior de um conjunto que $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

Seja, agora, $x \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$. Como $x \in \operatorname{int}(A)$, existe $B(x,r_1) \subseteq A$ e como $x \in \operatorname{int}(B)$, existe $B(x,r_2) \subseteq B$. Tome $r = min(r_1, r_2)$. Então, $B(x,r) \subset A \cap B$ e, portanto, $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$, como desejado.

e) Seja $x \in \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$. Então, $x \in \operatorname{int}(A)$ ou $x \in \operatorname{int}(B)$. Supor, sem perda de generalidade, que $x \in \operatorname{int}(A)$. Então, existe uma bola $B(x,r) \subseteq A$. Logo, $B(x,r) \subset A \subset A \cup B$ e, portanto, $x \in \operatorname{int}(A \cup B)$.

Capítulo 3

Exercícios Propostos

1) Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 > 0$ tal que $\dfrac{1}{N_0} < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Então, se $n > N_0$, temos que:

$$d(z_n,(0,\ 0)) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon .$$

3)

a) A sequência converge para $(0,\ 0)$.

b) Diverge.

c) Converge para p.

d) (f_n) converge para a função nula $O(t) = 0\ \forall\ t \in [0,\ 1]$.

4)

a) $(x_n) = ((0,\ n))$.

b) Se $x_n = (1,1,1)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, então (x_n) é limitada.

c) Toda sequência em M é limitada.

5) Em $\mathbb{R}$ com a métrica usual $(x_n) = ((-1)^n)$ é limitada mas não é convergente.

6)

a) $a = 1$ é ponto de acumulação de *X*. Note que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

b) $a = (0,\ 1)$ é ponto de acumulação de X. Note que

$$a = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right).$$

c) $a = \sqrt{2}$ é ponto de acumulação de $\mathbb{Q}$. Tome a sequência de racionais $1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ldots$

d) Para $a = \dfrac{7}{9}$.

Note que $a = 0,777\ldots$

Seja

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,7666\ldots \\ x_2 &= 0,7766\ldots \\ x_3 &= 0,7776\ldots \\ &\vdots \\ x_n &= 0,777\ldots7666\ldots \end{aligned}$$

Então $x_n \in X - \{a\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to a$. Logo, a é ponto de acumulação de X.

Para $a = \frac{56}{99}$.

Note que $a = 0{,}56565656...$

Tome

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}567777...\\
x_2 &= 0{,}56567777...\\
x_3 &= 0{,}565656777...\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Então $x_n \to a$, $x_n \in X - \{a\}$ e, portanto, a é ponto de acumulação de X.

7)

a) Não é fechado, pois $1 \notin X$ e $1 \in \overline{X}$.

b) Não é fechado, pois $0 \notin X$.

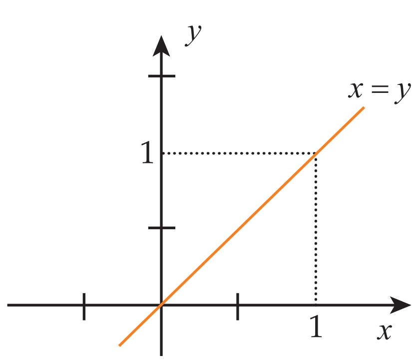
c) Não é fechado.

d) Não é fechado.

8)

$Fr(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$.

$(1,\ 1) \in Fr(X)$, pois $(1,\ 1) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}, 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1, \frac{n}{n+1}\right)$.



9) As sequências de Chauchy são as sequências estacionárias, ou seja, sequências da forma $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, c, c, c, c, c, c, ...)$.

10)

a) $[0,\ 1],[2,\ 3]$.

b) $(0,\ 1),\ (2,\ 3)$.

Exercícios Complementares

1) Falso. Por exemplo, $((-1)^n)$.

2) Verdadeiro. A prova está feita na proposição 2.5.

3) Verdadeiro. Como (y_n) é limitada, $\exists\, M > 0$ tal que $|y_n| < M\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, como (x_n) converge para 0, $\exists N_0$ tal que se $n \geq N_0$, então $|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Logo,

$$\forall n \geq N_0, \quad |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon .$$

4) Verdadeiro. Supor que (Z_n) converge. Então $(y_n = Z_n - X_n)$ converge, o que contradiz a hipótese.

5) Falso. Por exemplo, tome

$x_n = (1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ldots)$ e $y_n = (-1,\ -2,\ -1,\ -2,\ -1,\ -2,\ldots)$.

Então $x_n + y_n = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots)$.

6) Verdadeiro. Para $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, existe $N_0 > 0$, tal que

$$\forall n > N_{0,} \quad |x_n - a| < \varepsilon = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{2} < x_n - a < \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{a}{2} < x_n \quad \forall n \geq N_0.$$

7) Falso. Por exemplo, seja $(x_n) = \left(-\dfrac{1}{n}\right)$ e $(y_n) = \left(+\dfrac{1}{n}\right)$. Então $\lim x_n = 0 = \lim y_n$.

8) Verdadeiro. Como (x_n) está contida no conjunto de Cantor, (x_n) é limitada. Logo, por Bolzano-Weierstrass, (x_n) possui uma subsequência convergente (a qual também é de Cauchy).

9) Falso. Basta pegar uma sequência em $\mathbb{Q}$ convergente para $\sqrt{2}$ (por exemplo).

10) Verdadeiro. Vamos supor que (x_n) seja uma sequência não decrescente e (x_{n_k}) é uma subsequência que converge para a. Mostraremos que (x_n) converge para a.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 > 0$ tal que $\forall n_k > N_0$, $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Seja n_{k_1} tal que $n_{k_1} > N_0$. Então se $m > n_{k_1}$, temos que existe n_{k_m} tal que

$$\begin{aligned}
&x_{n_{k_1}} \le x_m \le x_{n_{k_m}} \\
&\Rightarrow -\varepsilon < x_{n_{k_1}} - a \le x_m - a \le x_{n_{k_m}} - a < \varepsilon \\
&\Rightarrow |x_m - a| < \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $m > n_{k_1}$.

11)

a) $\mathbb{Z}_n \to \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

b) $\mathbb{Z}_n \to (1,\ 1)$.

12)

a) (x_n) é divergente.

b) $a = b$.

c) Analise $(x_n) = ((-1)^n)$.

13) Em $\mathbb{R}$, seja $x_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$.

(x_n) satisfaz as condições pedidas.

14) Ver a proposição 2.14.

a) $[2,5)$ não é fechado em $\mathbb{R}$.

b) O conjunto não é fechado em $\mathbb{R}$.

c) O conjunto não é fechado em $\mathbb{R}$.

15) Nenhum dos conjuntos é fechado em $\mathbb{R}^2$. (Ver proposição 2.14)

16) Sim, pois é fechado em $\mathbb{R}$. (Ver proposição 2.14)

17) Se M é finito, então toda sequência de Cauchy é estacionária (da forma $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, c, c, c, c, c, c, ...)$, logo, convergente.

18) Se (x_n) e (y_n) são de Cauchy em $\mathbb{R}^2$, então $x_n \to a$ e $y_n \to b$, onde $a,\ b \in \mathbb{R}^2$. Logo, $d(x_n, y_n) \to d(a,\ b)$.

Capítulo 4

Exercícios Propostos

1) Note que

$$d(f(x), f(y)) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = |x-y| \times \frac{1}{|xy|} \leq \frac{1}{4}|x-y| = \frac{1}{4}d(x,y).$$

Logo, f é de Lipschitz com constante $\frac{1}{4}$.

2) $d(f(x), f(y)) = ||x| - |y|| \leq |x-y| = d(x,y)$.

3) Sejam $f: M \to \mathbb{R}$ e $g: M \to \mathbb{R}$ contínuas em a.

i) Mostrar que $|f|$ é contínua em a.

Como f é contínua em a, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $d(x,a) < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Mas, então para este δ, $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon \cdot$

ii) Mostre que $f+g$ é contínua em a.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que se $d(x,a) < \delta_1$, então $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Também $\exists \delta_2 > 0$ tal que se $d(x,a) < \delta_2$ então $|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Logo, se $d(x,a) < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |f(x) - f(a) + g(x) - g(a)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

4) Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e $K = \{0\}$. Então K é compacto e $f^{-1}(0) = \mathbb{R}$ não é compacto.

5) Note que não existe $\lim\limits_{x \to o} \cos \frac{1}{x}$. Logo, f não é contínua (em 0).

6) Seja d_0 a distância entre $f(x_0)$ e 0 em $\mathbb{R}^n$. Considere a bola aberta $B\left(f(x_0), \frac{d_0}{2}\right)$. Então $f^{-1}\left(B\left(f(x_0), \frac{d_0}{2}\right)\right)$ é uma vizinhança de x_0, onde f não se anula.

7) f é contínua em 0, pois $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1 = f(0)$.

8) Não. Por exemplo, seja $f: (0,\ 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

9) Não é uniformemente contínua.

10) Note que f é contínua em $[a, b]$, que é compacto em $\mathbb{R}$. Logo, pelo Teorema 4.6, f é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Para provar que f é Lipschitz em $[a, b]$, note que:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| \\ &= |x+y||x-y| \leq \\ &\leq \max\{|2a|, |2b|\}\, d(x, y). \end{aligned}$$

11) Seja $M = [0,\ 1]$ com a métrica $0-1$.

$N = [0,\ 1]$ com a métrica usual de $\mathbb{R}$.

Então

$$\begin{aligned} f : M &\to N \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

é contínua, M não é compacto e N é compacto.

12) Supor que f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Então, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - y| < \delta$, então $|x^2 - y^2| < \varepsilon = 1$.

Bom, considere pontos da forma $x_n = n + \delta/2$ e $y_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $|x_n - y_n| < \delta$ e, portanto,

$$\begin{aligned} & |x_n^2 - y_n^2| < 1 \\ \Rightarrow & \left| n^2 + n\delta + \frac{\delta^2}{4} - n^2 \right| < 1 \\ \Rightarrow & \left| n\delta + \frac{\delta^2}{4} \right| < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Logo, f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

13) Faremos para $f+g$. O caso cf é análogo.

Suponha que f e g são uniformemente contínuas e $f, g: M \to \mathbb{R}$.

Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1$ tal que, se $d(x,y) < \delta_1$, então $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists \delta_2$ tal que $d(x,y) < \delta_2$, então $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Logo, se $d(x,y) < \delta$, então:

$$d((f+g)(x),(f+g)(y)) = |(f+g)(x) - (f+g)(y)| =$$
$$= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

14) Sejam $f: M \to \mathbb{N}$ e $g: N \to P$ uniformemente contínuas.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, se $d(x,y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Para este $\delta > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que, se $d(x,y) < \delta_1$, então $d(g(x), g(y)) < \delta$.

Logo, se $d(x,y) < \delta_1$, então $d(f(g(x)), f(g(y))) < \varepsilon$.

15) Basta notar que $S \subset S \cup \{(0,q) : q \in \mathbb{Q}; -1 \leq q \leq 1\} \subset \overline{S}$ e usar a Proposição 4.6.

16) $(a, +\infty)$ é conexo, pois é a imagem de $(0,\ 1)$ pela função contínua $f: (0,\ 1) \to (a, +\infty)$, dada por $f(x) = a - 1 + \frac{1}{x}$.

Analogamente, $(a, +\infty)$ é uma imagem de $(0,\ 1)$ pela função contínua $g: (0,\ 1) \to (a, +\infty)$, dada por $g(t) = b + 1 - \frac{1}{t}$, e, portanto, conexo.

17) Seja S um conexo de $\mathbb{R}$. Suponha que S não é um intervalo.

Então existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que existem $a,\ b \in S$ e $a < t < b$.

Agora, $U = (-\infty, t) \cap S$ e $V = (t, +\infty) \cap S$ formam uma separação de S.

Logo, S não é conexo.

Exercícios Complementares

1)

a) É contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) É contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$.

c) É contínua em $X - \{1\}$.

2) Suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a.

Como f é contínua em a, $\exists \delta > 0$ tal que se $d(x,a) < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Logo, para este δ, temos que $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, sempre que $d(x,a) < \delta$.

3) f é contínua em X, pois se F é fechado em $\mathbb{R}$, então $f^{-1}(F)$ é um conjunto finito de pontos de $\mathbb{R}$ e, portanto, fechado.

4) h é contínua, pois é a multiplicação e composição de funções contínuas.

5) Note que, se $|x| < 17$, então,

$$d(f(x), f(y)) = |x^2 - y^2| = ||x - y||x + y|| = |x - y||x + y| \leq 34\ d(x,y)$$

e, portanto, f é lipschitziana em $[-17,\ 17]$.

Porém, em $(-\infty, \infty)$ f não é lipschitziana, pois $d(f(x), f(y)) = |x + y|\ d(x,y)$.

6) Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{c}}$.

Logo, se $d(x,a) < \delta$, então $d(f(x), f(a)) \leq c[d(x,a)]^k < c\delta^k = \varepsilon$.

7) Seja $m \in M \setminus X$. Como X é denso em M, existe uma sequência x_n em X tal que $x_n \to m$.

Logo, $f(m) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(m)$.

8) Tome $M = N = \mathbb{R}$ e $f : M \to N$ uma função constante. A imagem de qualquer intervalo aberto por f é um conjunto unitário que não é aberto.

9) $M = N = \mathbb{R}$; $X = \mathbb{R}$ e $f : M \to N$, dada por $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

Então, $X = \mathbb{R}$ é fechado, mas $f(X) = [0,1)$ não é fechado.

10) Supor que X_A é contínua em p.

Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Então, $\exists \delta > 0$ tal que, se $d(x,p) < \delta$, temos $|X_A(x) - X_A(p)| < \frac{1}{2}$. Isto implica que $X_A(x) = X_A(p)$, $\forall x \in B(p,\delta)$ e, portanto, se $p \in A$, então $x \in A$ $\forall x \in B(p,\delta)$ e, se $p \notin A$, então $x \notin A$ $\forall x \in B(p,\delta)$.

Logo, p não é ponto de fronteira.

Agora, vamos supor que p não é ponto de fronteira de A.

Suponhamos que $p \in A$ (o caso $p \notin A$ é análogo). Como $p \notin frA$, existe $\delta > 0$ tal que $B(p,\delta) \subset A$.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, tome o δ acima.

Temos que, se $d(x,p) < \delta$, então $|X_A(x) - X_A(p)| = 0 < \varepsilon$.

Portanto, X_A é contínua em p.

11) $f(x)=\begin{cases} x \text{ se } x\in\mathbb{Q} \\ x+2 \text{ se } x\in I \end{cases}.$

12) Verdadeiro. Seja $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Existe uma sequência $x_n\in\mathbb{Q}$ tal que $x_n\to x$. Como f e g são contínuas, temos que $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=g(x)$.

13) Primeiro vamos mostrar que f é injetora.

Note que, se $x\neq y$, então $d(x,y)>0$ e, então, $d(f(x),f(y))=d(x,y)>0$ e, portanto, $f(x)\neq f(y)$.

Agora vamos provar que f é sobrejetora.

Primeiro, note que f é contínua (prove!) e, portanto, $f(M)$ é compacto.

Seja agora $y_1\in M\setminus f(M)$. Considere a sequência $y_1, y_2=f(y_1), y_3=f(y_2), y_4=f(y_3),...$ Como $f(M)$ é compacto, y_n possui uma subsequência (y_{n_k}) convergente.

Como (y_{n_k}) é convergente, é de Cauchy e, portanto, para $\varepsilon=\frac{1}{2}$,

$\exists M_2>0$ tal que se $n_{M_2}>M$, então, para $j=1,2,3,\ldots$, temos que

$$\begin{aligned} & d(y_{n_{M_2}}, y_{n_{M_2+j}})<\frac{1}{n} \\ & \Leftrightarrow d(f^{n_{M_2}}(y_1), f^{n_{M_2+j}}(y_1))<\frac{1}{n} \\ & \Leftrightarrow d(f^{n_{M_2+j}-n_{M_2}}(y_1), y_1)<\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Tome $z_1=f^{n_{M_2+1}-n_{M_2}}(y_1)$. Repita para $\varepsilon=\frac{1}{3}$ e tome $z_2=f^{n_{M_3+j}-n_{M_3}}(y_1)$, onde $n_{M_3+j}-n_{M_3}\geq n_{M_2+1}-n_{M_2}$, e sucessivamente para $\varepsilon=\frac{1}{n}, n=4,5,6,\ldots$. Logo, (z_n) converge para y_1 e, portanto, $y_1\in\overline{f(M)}$, mas $f(M)$ é fechado (sendo compacto) e concluímos que $y_1\in\overline{f(M)}=f(M)$, como desejado.

14) $A=(0,\ 1]$

Sejam $U_n=\left(\frac{1}{n},1\right]\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Então, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não admite subcobertura finita.

15) Seja $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x>0\end{cases}$.

Então f é contínua e $f^{-1}([0,\ 2])=(-\infty,\ 2)$, que não é compacto.

Seja $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$.

Então $f^{-1}(\{0\})=(-\infty,\ 0)\cup[2,+\infty]$, que não é conexo.

16)

a) Não é compacto (não é limitado).

b) Não é compacto (não é limitado).

c) Compacto.

d) Compacto.

e) Não é compacto (não é fechado).

f) Não é compacto (não é fechado).

g) Não é compacto (não é limitado).

h) Não é compacto (não é fechado).

17) $\Rightarrow$)Supor que M não é finito, digamos $M=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$. Então $\left\{B\left(x_i,\frac{1}{2}\right)\right\}_{i=1,2,3,\ldots}$ é uma cobertura aberta que não possui subcobertura finita e, portanto, M não é compacto.

A volta é trivial.

18) Seja $\{x_n\}$ uma sequência em $A \cap B$. Então, x_n é uma sequência em A e, como A é compacto, possui uma subsequência convergente para $x \in A$. Como B é fechado e x_n também está em B, temos que $x \in B$ e, portanto, $A \cap B$ é compacto.

19)

a) B é fechado e limitado.

b) S^{n-1} é fechado e limitado.

c) $B(p, r)$ não é fechado.

20) Sejam A, B compacto.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência em $A \cap B$.

Como A é compacto, $\{x_n\}$ possui uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge para $x \in A$.

Como $\{x_{n_k}\}$ é uma sequência em B (que é compacto), esta possui uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge para $y \in B$. Como $\{x_{n_k}\}$ é subsequência de $\{x_{n_k}\}$, temos que $y = x$ e, portanto, $A \cap B$ é compacto.

Para mostrar que $A \cup B$ é compacto, seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de $A \cup B$.

Então $\{U_\alpha\}$ cobre A e, portanto, existe uma subcobertura $\{U_{\alpha_1}, \ldots U_{\alpha_n}\}$ finita de A.

$\{U_\alpha\}$ também cobre B e, portanto, existe uma subcobertura finita $\{U_{\beta_1}, \ldots U_{\beta_n}\}$ de B.

Logo $\{U_{\alpha_1}, \ldots U_{\alpha_n}, U_{\beta_1}, \ldots, U_{\beta_n}\}$ é subcobertura finita de $A \cup B$.

21) Não. Por exemplo, $f(x) = sen(x^2)$ (analise o comportamento da função quando $x \to \pm\infty$).

22) Primeiro note que $f^{-1}: f(B) \to B$ existe, pois f é injetora. Para mostrar que f^{-1} é contínua, vamos mostrar que a imagem inversa de um fechado por f^{-1} é fechado.

Seja $F \subseteq B$ fechado. Temos que

$$\begin{aligned}(f^{-1})^{-1}(F) &= \{x \in B : f^{-1}(x) \in F\} \\ &= \{x \in B : x \in f(F)\} = B \cap f(F).\end{aligned}$$

Agora, note que B é fechado (pois é compacto). Ainda, F é compacto (pois é um fechado contido em um compacto) e, usando o fato de que f é contínua, $f(F)$ é compacto e, logo, fechado.

Portanto, $B \cap f(F)$ é fechado (é a intersecção de dois fechados), como desejado.

23) Sim, f é obrigatoriamente limitada. Para provar isto, suponha que f não é limitada.

Seja $x_1 \in (0,\ 1)$. Como f não é limitada, $\exists x_2 \in (0,\ 1)$ tal que $f(x_2) > f(x_1) + 1$.

De novo, como f não é limitada, $\exists x_3 \in (0,\ 1)$ tal que $f(x_3) > f(x_2) + 1$.

Procedendo dessa forma, criamos uma sequência (x_n) tal que $x_n \in (0,\ 1)\ \forall n$ e $f(x_n) > f(x_{n-1}) + 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Como (x_n) é limitada, o teorema de Bolzano-Weierstrass implica que (x_n) possui uma subsequência convergente (e, portanto, de Cauchy).

Agora, para provar que f não é uniformemente contínua, basta tomar $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Para este ε fixo e $\forall \delta > 0$, pelo feito acima, sempre encontramos $x_{n_k}, x_{n_{k+1}} \in (0,\ 1)$ tais que

$$\left|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\right| < \delta \ \text{ e } \ \left|f(x_n) - f(x_{n_{k+1}})\right| > 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Logo, f não é uniformemente contínua, como desejado.

24) $(a) \Rightarrow (b)$. Supor que M não é conexo.

Então existem aberto U e V tal que

$U \neq \varnothing,\ V \neq \varnothing,\ U \cup V = M$ e $U \cap V = \varnothing$

Vamos mostrar que $U \cap \overline{V} = \varnothing$.

Seja $u \in U$, como U é aberto, existe $B(u, \varepsilon) \subset U$ e, portanto, $B(u, \varepsilon) \cap V = \varnothing$, o que implica que $u \notin \overline{V}$.

Analogamente, mostra-se que $U \cap \overline{V} = \varnothing$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Supor que existem $V \neq \varnothing$ e $V \neq \varnothing$ subconjuntos tais que $M = U \cup V, \overline{U} \cap V = \varnothing = U \cap \overline{V}$.

Falta mostrar que U e V são abertos.

Seja $u \in U$. Então, $u \notin \overline{V}$ (pois $U \cap \overline{V} = \varnothing$), portanto, existe $B(u, \varepsilon)$ tal que $B(u, \varepsilon) \cap V = \varnothing$, o que implica que $B(u, \varepsilon) \subset U$, como desejado.

Logo, U é aberto. Mostra-se que V é aberto analogamente.

25) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\}$,

$$V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{1}{4},\ -1 \le y \le 0\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \le x \le 1,\ -1 \le y \le -\frac{1}{2}\right\} \cup$$
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{3} \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0\right\}.$$

Então, $U \cap V = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, que não é conexo.

Para $A \cup B$, basta tomar $A = [0,\ 1]$, $B[2,\ 3]$. Então $A \cup B$ não é conexo.

Para $A \setminus B$, tome $A = [3,\ 5]$ e $B[2,\ 3]$. Então $A \setminus B = [0,\ 2] \cup (3,\ 5]$, que não é conexo.

26) Como A é compacto, (x_n) possui uma subsequência convergente, digamos $x_{n_k} \to a$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall n,\ m \geq N_1$ (pois (x_n) é de Cauchy).

Ainda, $\exists N_2 > 0$ tal que $d(x_{n_k}, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall n_k \geq N_2$.

Tome $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Se $n > N$, então $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, a) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

27) Seja $f(x) = arc\ tg\ x$, $B = \mathbb{R}$. Então, $f(B) = (-1,\ 1)$, que não é fechado.

Se B fosse limitado (e fechado), então seria compacto, logo $f(B)$ seria compacto e, portanto, fechado e limitado.

28) Como M é conexo e f é contínua, temos que $f(M)$ é conexo em $\mathbb{R}$ e, portanto, é um intervalo.

Como M é compacto e f é contínua, temos que $f(M)$ é compacto em $\mathbb{R}$, logo é fechado e limitado.

29) Não. Por exemplo, em $\mathbb{R}$, $U = (0,\ 1)$ e $V = (2,\ 3)$ são conexos, mas $U \cup V$ não é conexo.

Referências

1) BOYER, C. B. **História da matemática.** Trad. de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

2) CARVALHO, N. T. B.; GIMENEZ, C. S. C. **Fundamentos da matemática I.** Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2007.

3) EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad. de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

4) GIMENEZ, C. S. C.; STARKE, R. **Introdução ao cálculo.** Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2007.

5) GIMENEZ, C. S. C.; STARKE, R. **Cálculo I.** Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2008.

6) HAIRER, E.; WANNER, G. **Analysis by its history.** New York: Springer, 1995.

7) DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia.** São Paulo: Atual, EdUSP, 1982.

8) JOHNSONBAUGH, R.; PFAFFENBERGER, W. E. **Foundations of mathematical analysis.** New York: Marcel Dekker, 1981.

9) KOSMALA, W. A. J. **A friendly introduction to analysis.** 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2004.

10) KÜHLKAMP, N. **Introdução a topologia geral.** 2. ed. Florianópolis: EdUFSC, 2002.

11) LIMA, E. L. **Análise real.** v. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989.

12) LIMA, E. L. **Curso de análise.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.

13) LIMA, E. L. **Espaços métricos.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1978.

14) MARSDEN, J. E.; HOFFMAN, M. J. **Elementary classical analysis.** 2. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1993.

15) MUNKRES, J. R. **Topology:** A first course. New Jersey: Prentice Hall, 1975.

16) RUDIN, W. **Princípios de análise matemática.** Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico; Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1971.

17) IRA (Interactive Real Analysis). Disponível em: <http://www.mathcs.org/analysis/reals/>. Acesso em: 18/06/2012.