UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

BU

BS-CFM

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MODELADOS COM SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.

0.268.212-1

UFSC-BU

MARIA REGINA NUNES LAMIN

FLORIANÓPOLIS

2000.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

MARIA REGINA NUNES LAMIN

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MODELADOS COM SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Profª Joana B. O. Quandt

Florianópolis

2000.

Esta Monografia foi julgada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 05/SCG/2000.

Profº Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Joana B. O. Quandt
Orientador

AGRADECIMENTOS

Em especial à minha família, que sempre acreditou em mim, contribuindo em muito para a realização deste sonho.

À minha orientadora, professora Joana Benedita de Oliveira Quandt, por toda sua paciência, atenção e dedicação durante a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Como professora da rede estadual de ensino durante 10 anos, pude constatar a grande dificuldade dos alunos em resolver problemas.

Em se tratando de Ensino Médio esta dificuldade é maior, pois os professora abandonam a abordagem de problemas na exemplificação de conteúdos e na aplicação de exercício de fixação; é muito raro encontrar um livro de Matemática do Ensino Médio, até mesmo do Ensino Fundamental, que utilizem a resolução de problema, na abordagem dos temas.

A elaboração deste trabalho teve como principal objetivo apresentar situações problemas que possam ser modelados com Sistemas de Equações Lineares e que possam ser resolvidos por alunos do Ensino Médio; além disso alguns problemas foram escolhidos por um classe de alunos do Colégio Estadual José Maria Cardoso da Veiga, situado na Enseada de Brito, no município de Palhoça.

O trabalho foi organizado da seguinte forma:

Primeiro apresentou-se uma breve referência histórica sobre Sistemas Lineares e Determinates.

No capítulo 1 tratou-se do desenvolvimento teórico do assunto, notações, definições e teoremas; a terminologia usada nesta parte do trabalho é mesma que se usa em sala de aula no Ensino Médio sendo que procurou-se seguir o planejamento do curso do Colégio citado acima.

No capítulo 2 apresentou-se algumas situações do cotidiano como aplicações de Sistema Lineares em áreas como Nutrição, Economia, Engenharia e Física.

No capítulo 3, tem-se uma série de problemas que podem ser modulados com Sistemas Lineares que forma apresentados aos alunos da 2ª série 201 do Colégio Estadual José Maria Cardoso da Veiga.

O objetivo desta etapa é reativar a capacidade dos alunos de interpretar textos, organizar adequadamente os dados, relacionar os mesmo com o assunto estudado, neste caso, estabelecer os sistemas, aplicar os métodos adequados para resolver os problemas e analisar coerentemente as soluções obtidas.

Em anexo apresentou-se uma lista de problemas que podem ser modelados com Sistemas Lineares e suas respectivas respostas, e também a cópia xerox de parte de um livro de matemática da 7ª série do Ensino Fundamental[6], que trata do assunto Sistemas de Equações Lineares com o cuidado de apresentar problemas na exemplificação e com exercícios.

ASPECTOS HISTÓRICOS
SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES: ORIGENS E DESENVOLVIMENTO

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadros de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação – que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos *Nove capítulos sobre a arte da matemática,* um texto que data provavelmente do século III a.C.

Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a idéia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independente (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escrevemos como a_{12}, Leibniz indicava por 1_2.

A conhecida regra de Cramer para resolver sistemas de **n** equações a **n** incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin MacLaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente, em 1748 no seu *Treatise of algebra.* Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Cramer também chegou à regra (independentemente), mas depois, na sua Introdução à Análise das Curvas Planas (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

O francês Etienne Bézout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares — embora também os usasse na resolução destes sistemas. O importante teorema de Laplace, que permite a expansão de um determinante através dos menores de **r** filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: "Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo".

O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes — meses antes J. F. M. Binet (1786-1856) dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de Cauchy era superior.

Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi (1804-1851). Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje. Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito de jacobiano de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas. [4]

CAPÍTULO 1

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

1.1 Sistemas Lineares: Notações e Definições

1.1.1 Equação linear

Uma equação linear nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação que pode ser escrita na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais chamados de coeficientes da equação e b pode ser qualquer número real, sendo chamado de termo independente da equação.

Exemplo: $2x_1 - x_2 + x_3 = 5$

Observações:

a) quando o termo independente for nulo, trata-se de uma equação linear homogênea;
b) toda equação linear tem o expoente de todas as incógnitas unitários;
c) uma equação linear não apresenta termo misto (xy, xz, ...).

1.1.2 Solução de uma equação linear

Uma seqüência ordenada ou n-upla de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ se, e somente se, a expressão
$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira.

1.1.3 Sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares (ou sistema linear) é uma coleção de duas ou mais equações lineares envolvendo as mesmas variáveis, digamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Considere um conjunto de m equações lineares e n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} n$$

$a_{ij} \in R$; $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j \leq n$;

$b_i \in R$, $i = 1, \ldots, m$.

O sistema linear acima é dito sistema linear m por n e se indica por m x n.

Exemplo

$$S_1 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2z = -1 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$$

1.1.4 Matrizes associadas a um sistema linear

Considera-se o sistema linear S da definição anterior.

Associa-se a esse sistema duas matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema:

a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ de ordem m x n, é chamada matriz dos coeficientes ou matriz associada ao sistema.

a matriz $B = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ de ordem m x (n + 1), é chamada de matriz completa, ou matriz aumentada ou ainda matriz ampliada do sistema.

Exemplo:

Considerando o sistema S_1 do exemplo anterior, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (matriz dos coeficientes)}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \text{ (matriz completa, aumentada ou ampliada)}$$

1.1.5 Representação matricial de um sistema

Dado um sistema

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

considera-se as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Então o sistema linear S pode ser representado da seguinte forma:

$$Ax = b$$

1.1.6 Solução de um sistema linear

A seqüência ordenada (α_1, α_2, ..., α_n) é solução de um sistema linear de n variáveis quando é solução de cada uma das equações do sistema.

O conjunto de todas as soluções possíveis é chamado conjunto solução do sistema.

Exemplo:

O sistema S $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$, admite como solução a tripla ordenada (1, 2, 3) pois verifica cada uma das três equações.

1.1.7 Sistema possível e impossível

Se um sistema linear S tiver pelo menos uma solução será denominado possível ou compatível; caso não tenha nenhuma solução será denominado impossível ou incompatível.

Exemplos:

a) S $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$ é possível pois apresenta a tripla (1, 2, 3) como solução.

b) S $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x-y+4z=1 \\ 0x+0z+0z=6 \end{cases}$ é impossível pois a última equação não é satisfeita por nenhuma tripla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

1.1.8 Interpretação gráfica das soluções de um sistema linear do tipo 2 x 2

Num referencial cartesiano as equações do tipo ax + by = c com a e b não simultaneamente nulos, representam retas. Assim, em termos gráficos, resolver um sistema linear de duas equações e duas variáveis equivale a encontrar as posições relativas às retas que representam essas equações.

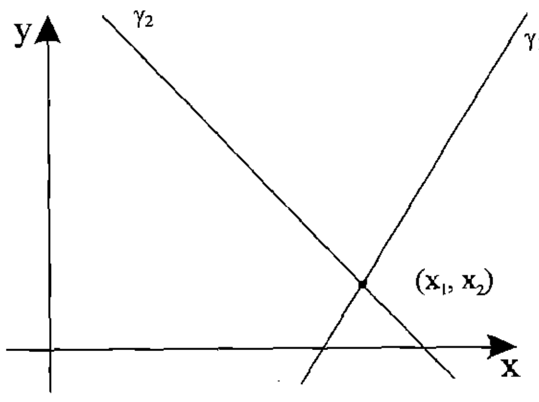
Seja o sistema

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Sejam γ_1 e γ_2 os gráficos das duas retas que compõem esse sistema.

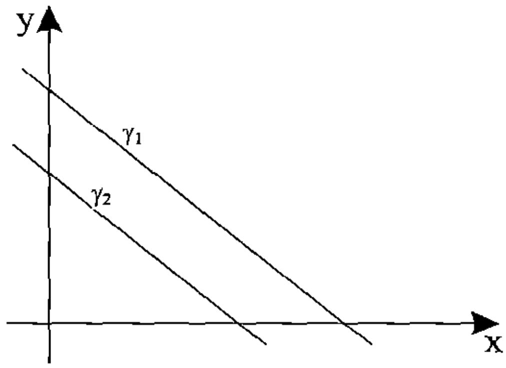
Então deverá ocorrer exatamente uma das seguintes situações:

a)



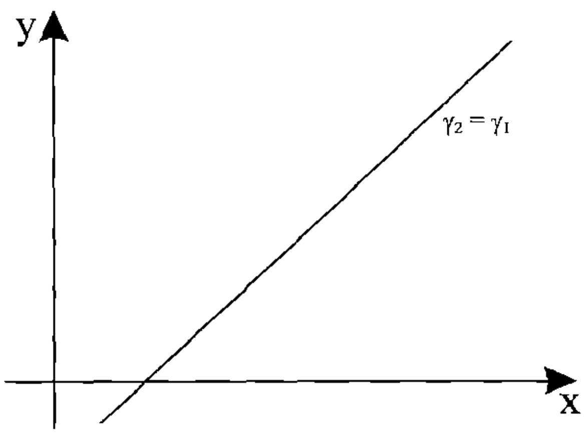
As retas γ_1 e γ_2 são concorrentes, indicando que o sistema formado por suas equações tem como única solução o par (x_1, x_2) que é o ponto de interseção das retas.

b)



As retas γ_1 e γ_2 são paralelas, indicando que o sistema não tem solução, o que equivale a dizer que as retas não têm pontos em comum.

c)



As retas γ_1 e γ_2 são coincidentes, indicando que o sistema possui infinitas soluções; equivale a afirmar que as retas possuem infinitos pontos comuns.

1.1.9 Sistemas Homogêneos

Definição: Um sistema é homogêneo quando o termo independente de cada uma de suas equações é igual a zero.

Genericamente, um sistema homogêneo de m equações e n variáveis tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Todo sistema homogêneo de n variáveis admite a n-upla (0, 0, ..., 0) como solução, pois essa seqüência ordenada satisfaz a todas as equações do sistema. Essa solução é chamada solução nula, trivial ou imprópria.

Um sistema homogêneo é sempre possível, pois possui, ao menos, a solução nula.

Se o sistema possui apenas a solução nula, ele é possível e determinado e havendo outras soluções, além da nula, ele é possível e indeterminado. Essas soluções são próprias ou não-triviais.

Exemplos:

a) O sistema do exemplo anterior, apresenta como única solução a tripla (0, 0, 0).

b) O sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$ é possível e indeterminado, pois além da solução nula,

apresenta infinitas soluções que ficam em função da variável livre: $(-\alpha, \alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$.

1.2 Determinantes

A terminologia utilizada na abordagem deste tópico é aquela utilizada no Ensino Médio.

1.2.1 Definição de determinante ($n \leq 3$)

Seja A uma matriz real de ordem n.

Chama-se determinante da matriz A e indica-se por det (A) o número obtido operando com os elementos de A da seguinte forma:

1) Se A é de ordem n = 1, então det (A) é o único elemento de A. Se $A = [a_{11}]$ então det $(A) = a_{11}$.
2) Se A é de ordem n = 2, então det (A) é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ então det (A) $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Exemplo:

Calcular o determinante $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$$\det = -3.\frac{1}{2} - (-2).2 = -\frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2}$$

3) Se A é de ordem n = 3, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, define-se

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Exemplo:

Calcular o determinante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

det (A) = 1 . 2 . 2 + 3 . (-3) . 1 + 4 . 5 . 4 – 4 . 2. .1 – 1 . (-3) . 4 – 3 . 5 . 2

det (A) = 49

1.2.2 Menor complementar e complemento algébrico

Menor complementar

Definição: Seja A uma matriz de ordem $n \geq 2$ e a_{ij} um elemento de A.

Define-se o menor complementar do elemento a_{ij}, e indica-se por D_{ij}, como sendo o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de A.

Complemento algébrico

Definição: Seja A uma matriz de ordem $n \geq 2$; seja a_{ij} um elemento de A.

Define-se o complemento algébrico do elemento a_{ij} (ou cofator de a_{ij}) e indica-se por A_{ij}, como sendo o número $(-1)^{i+j} . D_{ij}$.

Exemplo: Dada a matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcular D_{11}, D_{21}, D_{31}

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

b) Calcular A_{11}, A_{12}, A_{13}

$A_{11} = (-1)^2 . D_{11} = -13$

$A_{21} = (-1)^3 \cdot D_{12} = 6$

$A_{31} = (-1)^4 \cdot D_{13} = 11$

1.2.3 Definição de determinante: caso geral

Com o auxílio do conceito de cofator, obtém-se a definição de determinante válida para matrizes de ordem n qualquer.

Seja A uma matriz de ordem n.

Define-se determinante da matriz A, e indica-se por det (A), da seguinte forma:

1) Se A é de ordem 1, então $A = [a_{11}]$ e $\det A = a_{11}$.

2) Se A é de ordem $n \geq 2$, então

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e define-se}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} .$$

Ou seja, o determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$ é a soma dos produtos dos elementos da primeira linha pelos respectivos cofatores.

Exemplo: Dada a matriz A calcular seu determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -7 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ então } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -7 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Det (A)} = 1 \,.\, \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -7 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{D_{11}} - 5 \,.\, \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{D_{12}} + 0 \,.\, \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}}_{D_{13}} - 6 \,.\, \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}}_{D_{14}}$$

usando da definição de determinante de matriz de ordem 3 temos:

$A_{11} = -75$

$A_{12} = 10$

$A_{14} = -45$

E, portanto, tem-se:

det(A) = -75 – 50 + 270 = 145.

1.3 Métodos mais Usados na Resolução de Sistemas Lineares no Ensino Médio

A terminologia usada na definição dos próximos tópicos será de acordo com aquela usada no Ensino Médio.

a) Método da substituição

Qualquer sistema que esteja na forma triangular pode ser resolvido através do seguinte método:

Resolve-se a n-ésima equação para x_n. Este valor é usado para calcular x_{n-1} na (n-1)-ésima equação. Os valores de x_n e x_{n-1} são usados na (n-2)-ésima equação para encontrar x_{n-2}, e assim sucessivamente.

Exemplo:

Resolver o sistema

$$S \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad\quad 2x_3 = 4 \end{cases}$$

O sistema dado está na forma triangular, então se usa a substituição direta para resolvê-lo.

$2x_3 = 4$

$\boxed{x_3 = 2}$

$x_2 - x_3 = 2$

$x_2 = 2 + 2$

$\boxed{x_2 = 4}$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$

$3x_1 = 1 - 8 - 2$

$3x_1 = -9$

$\boxed{x_1 = -3}$

Solução: (-3, 4, 2).

b) Regra de Cramer

Será considerado aqui um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, ou seja, m = n. Nestas condições a matriz A dos coeficientes é uma matriz quadrada.

Seja D o determinante de A.

Teorema

Seja S um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas.

Se $D \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, tal que

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}, \forall \text{ i} \in \{1, 2, 3, ..., n\}$$

em que D_i é o determinante da matriz obtida de A, substituindo-se a i-ésima coluna de A pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

Demonstração:

Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \ldots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Esse sistema pode se escrito na forma matricial Ax = b, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Será mostrado que tal equação matricial admite solução única.

a) Existência da solução

Por hipótese, $D \neq 0$, logo existe a matriz inversa A^{-1}.

Considere a matriz $x_0 = A^{-1}\,b$; será provado que ela é solução da equação matricial $Ax = b$.

De fato:

$A(A^{-1}\,b) = (A\,A^{1})\,b = I\,b = b$, o que prova a existência da solução.

b) Unicidade da solução

Para provar que $x_0 = A^{-1}\,b$ é solução única será suposto que $Ax = b$ tenha outra solução x_1, isto é, $Ax_1 = b$.

Então, $x_1 = Ix_1 = (A^{-1}\,A)x_1 = A^{-1}\,(A\,x_1) = A^{-1}\,b = x_0$.

Conclui-se, assim, que x_0 é efetivamente a solução única de $Ax = b$.

Por outro lado se sabe que A^{-1} pode ser calculada pela fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \bar{A} = \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

em que A_{ij} é o cofator do elemento a_{ij} da matriz A.

Logo:

$$x_0 = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Tendo em conta que

$x_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, conclui-se que α_1 é dado por:

$$\alpha_1 = \frac{1}{D}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{D}D_1 = \frac{D_1}{D}$$

De forma análoga, se obtém $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Exemplo:

Seja o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Temos: D = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ = -4 $\neq$ 0.

Logo, o sistema tem solução única.

Determinar essa solução:

D_1 = $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ = -4

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Logo:

$$x = \frac{D_1}{D} = 1\,;\ y = \frac{D_2}{D} = 3\,;\ z = \frac{D_3}{D} = 2$$

Portanto a única solução do sistema é (1, 3, 2).

1.4 Sistemas Escalonados

Definição: Dado um sistema linear

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_n \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

em que em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo, dizemos que S está na forma escalonada, se o número de coeficientes não nulos, aumenta de equação para equação.

Exemplo:

$$S \begin{cases} 4x - y + z + t + w = 1 \\ \qquad z - 6t + w = 0 \\ \qquad\quad 2t - w = 1 \end{cases}$$

1.4.1 Resolução de um sistema na forma escalonada

Há dois tipos de sistemas escalonados a considerar:

1° Tipo - Número de equações igual ao número de incógnitas.

Nesse caso o sistema S terá a forma:

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

em que $a_{ii} \neq 0$, $\forall\ i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

A matriz dos coeficientes é a matriz triangular:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

D = det (A) = $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ ...\ a_{nn} \neq 0$; logo, pela Regra de Cramer, S é possível e determinado. Os valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ da solução podem ser obtidos resolvendo o sistema por substituição. Portanto da última equação, obtemos x_n; em seguida, substituindo esse valor na equação anterior, obtemos x_{n-1}. Repetindo esse processo, vamos obtendo x_{n-2}, x_{n-3}, ..., x_3, x_2, x_1.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 6 & (I) \\ y + 3z - t = -5 & (II) \\ 5z + 7t = 21 & (III) \\ 2t = 6 & (IV) \end{cases}$$

Tem-se:

em (IV) $2t = 6$, logo $t = 3$

em (III) $5z + 21 = 21$, logo, $z = 0$

em (II) $y + 0 - 3 = -5$, logo, $y = -2$

em (I) $x - 4 - 0 + 9 = 6$, logo $x = 1$

Portanto a solução é (1, -2, 0, 3).

2º Tipo – Número de equações é menor que o número de incógnitas

Nesse caso o sistema será do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \\ \qquad\qquad + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (j \geq 2) \\ \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots & \\ \qquad\qquad\quad a_{mr}x_r + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (r > j) \end{cases}$$

com $m < n$.

Para resolver tal sistema as variáveis que não aparecem no começo de nenhuma das equações serão denominadas variáveis livres e serão transportadas para o segundo membro.

O novo sistema assim obtido pode ser visto como sendo um sistema contendo apenas as variáveis do primeiro membro das equações. Nesse caso, atribuindo valores a cada uma das variáveis do 2º membro tem-se um sistema do 1º tipo, portanto, determinado. Se forem atribuídos outros valores às variáveis do 2º membro, tem-se outra solução do sistema.

Como esse procedimento pode estender-se infinitamente, segue-se que é possível extrair do sistema original um número infinito de soluções.

Esse tipo de sistema é dito possível e indeterminado.

Chama-se grau de indeterminação o número de variáveis livres do sistema, ou seja, $n - m$.

Exemplo: Seja o sistema $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ \qquad 3z + 2t = 4 \end{cases}$

As variáveis livres são y e t; transpondo-as para o 2º membro das equações tem-se o sistema:

$$\begin{cases} x - z = -y + t \\ 3z = 4 - 2t \end{cases}$$

Fazendo y = α e t = β com α e β ∈ R, tem-se:

$$\begin{cases} x - z = -\alpha + \beta & \text{(I)} \\ 3z = 4 - 2\beta & \text{(II)} \end{cases}$$

O sistema é agora do 1º tipo (determinado), para cada valor de α e β.

Resolvendo: (II) $z = \dfrac{4 - 2\beta}{3}$

em (I) $x - \dfrac{4 - 2\beta}{3} = -\alpha + \beta$

então $x = \dfrac{4 - 2\beta}{3} - \alpha + \beta$

Logo $x = \dfrac{-3\alpha + \beta + 4}{3}$

1.4.2 Sistemas equivalentes e escalonamento de um sistema

Definição: Dois sistemas S_1 e S_2 são equivalentes se toda solução de S_1 for solução de S_2 e vice-versa.

Exemplo: Sejam os sistemas

$S_1 \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ e $S_2 \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -3y = -5 \end{cases}$

S_1 e S_2 são equivalentes, pois ambos são determinados ($D \neq 0$ em S_1 e S_2) e admitem a mesma solução $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Já que sistemas equivalentes têm as mesmas soluções (ou ambos não tem nenhuma), o objetivo é transformar um sistema linear qualquer num outro equivalente, mais simples, na forma escalonada.

Abaixo serão vistos os recursos que podem ser usados para transformar um sistema S_1 num outro equivalente S_2, na forma escalonada. Esses recursos são dados pelos teoremas abaixo:

Teorema 1

Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S por um número $K \neq 0$, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.

Demonstração

Seja

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + \cdots + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Multiplicando-se a i-ésima equação por $K \neq 0$, obtém-se o sistema:

$$S' \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Ka_{i1}x_1 & + & Ka_{i2}x_2 & + \cdots + & Ka_{in}x_n & = & Kb_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

A única diferença entre S e S' é a i-ésima equação. Portanto, será feita referência apenas a ela.

a) Suponhamos que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ se uma solução de S. Portanto, será feita referência apenas a ela.

De fato: por hipótese, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Colocando $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ no 1º membro da i-ésima equação de S', tem-se:

$$Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + ... + Ka_{in}\alpha_n = K\underbrace{(a_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + ... + Ka_{in}\alpha_n)}_{b_i \text{ (por hipótese)}} = Kb_i$$

o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima equação de S'. Logo $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S'.

b) Supõe-se agora que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é uma solução de S' e será provado que ela também será solução de S.

De fato: por hipótese, $Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + ... + Ka_{in}\alpha_n = Kb_i$.

Colocando $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ no 1º membro da i-ésima equação de S, tem-se:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = \frac{K}{K}a_{i1}\alpha_1 + \frac{K}{K}a_{i2}\alpha_2 + ... + \frac{K}{K}a_{in}\alpha_n =$$

$$= \frac{1}{K}\underbrace{[Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + ... + Ka_{in}\alpha_n]}_{Kb_i \text{ (por hipótese)}} = \frac{1}{K} \cdot K \cdot b_i = b_i$$

o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima equação de S. Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S.

Teorema 2

Se uma equação de um sistema linear S for substituída pela soma, membro a membro, dela com uma outra, o novo sistema obtido S' será equivalente a S.

Demonstração:

Seja

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + \cdots + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & + \cdots + & a_{jn}x_n & = & b_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Substituindo a i-ésima equação de S pela soma, membro a membro, dela coma j-ésima equação, obtém-se o sistema:

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{i1}+a_{j1})x_1 & + & (a_{i2}+a_{j2})x_2 & +\cdots+ & (a_{in}+a_{jn})x_n & = & b_i+b_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & +\cdots+ & a_{jn}x_n & = & b_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

A única diferença entre S e S' é a i-ésima equação. Portanto será feita referência apenas a ela.

a) Será suposto que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S, e portanto deve ser mostrado que ela também será solução de S'.

De fato, por hipótese:

$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$ (I)

$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j$ (II)

Colocando $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ no 1° membro da i-ésima equação de S', teremos:

$$(a_{i1}+a_{j1})\alpha_1+(a_{i2}+a_{j2})\alpha_2+...+(a_{in}+a_{jn})\alpha_n =$$
$$=\underbrace{(a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+...+a_{in}\alpha_n)}_{b_i \text{ (por hipótese(I))}}+\underbrace{(a_{j1}\alpha_1+a_{j2}\alpha_2+...+a_{jn}\alpha_n)}_{b_j \text{ (por hipótese (II))}}=b_i+b_j$$

o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima equação de S'. Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S'.

b) Será suposto agora que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S' e provado que ela também será solução de S.

De fato, por hipótese:

$$\begin{cases} (a_{i1}+a_{j1})\alpha_1+(a_{i2}+a_{j2})\alpha_2+...+(a_{in}+a_{jn})\alpha_n=b_i+b_j \qquad (I) \\ e \\ a_{j1}\alpha_1+a_{j2}\alpha_2+...+a_{jn}\alpha_n=b_j \qquad (II) \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II), conclui-se que $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i$, o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima equação de S. Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S.

Exemplo:

Os sistemas

$$S \begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ \boxed{x - y + 2z = 1} \\ 4x + y + z = 0 \end{cases} \qquad e \qquad S' \begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ \boxed{3x \quad + 5z = 0} \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}$$

Teorema 3

Se uma equação de um sistema linear S for trocada com uma outra, o novo sistema obtido S', será equivalente a S.

São equivalentes, pois S' foi obtido a partir de S, substituindo a 2^a equação pela soma, membro a membro, dela com a 1^a equação.

1.4.3 Escalonamento de um sistema

Para escalonar um sistema são seguidos vários passos, todos eles baseados nos teoremas 1, 2 e 3.

1^o passo

É utilizada como 1^a equação qualquer equação em que o coeficiente da 1^a incógnita seja diferente de zero.

2^o passo

Anula-se o coeficiente da 1^a incógnita de todas as equações (com exceção da 1^a), substituindo a i-ésima equação ($i \geq 2$) pela soma da mesma com a 1^a multiplicada por um número conveniente.

3° passo

Deixa-se de lado a 1ª equação e aplica-se o 1° e 2° passos nas equações restantes.

4° passo

Deixa-se de lado a 1ª e 2ª equações e aplica-se o 1° e 2° passos nas equações restantes, e assim por diante, até o sistema ficar escalonado.

Exemplos: resolver os sistemas usando escalonamento.

a) S $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x-y-2z=-4 \end{cases}$

Substituindo-se a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -2

$$\begin{cases} x+2y+z=9 \\ -3y-3z=-15 \\ 3x-y-2z=-4 \end{cases}$$

substitui-se a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -3

$$\begin{cases} x+2y+\ z=9 \\ -3y-3z=-15 \\ -7y-5z=-31 \end{cases}$$

multiplica-se a 2ª equação por $-\dfrac{1}{3}$

$$\begin{cases} x+2y+z=9 \\ y+z=5 \\ -7y-5z=-31 \end{cases}$$

substitui-se a 3ª equação pela soma da mesma com a 2ª multiplicada por 7.

$$\begin{cases} x+2y+z=9 \\ y+z=5 \\ 2z=4 \end{cases}$$

O sistema agora está na forma escalonada. Como ele é do 1° tipo (número de equações igual ao de incógnitas), segue-se que é possível e determinado.

b) S $\begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 3x+3y+z+2t=0 \\ 2x+y+z-2t=4 \end{cases}$

Substitui-se a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por –3

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ \quad 10z - t = -3 \\ 2x + y + z - 2t = 4 \end{cases}$$

substitui-se a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por –2

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ \quad 10z - t = -3 \\ \quad -y + 7z - 4t = 2 \end{cases}$$

permuta-se a 2ª com a 3ª equação.

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ \quad -y + 7z - 4t = 2 \\ \quad 10z - t = -3 \end{cases}$$

O sistema agora está na forma escalonada. Como ele é o 2º tipo (número de equações menor que o de incógnitas), segue-se que é possível e indeterminado.

Observações

1ª) Se, ao escalonarmos um sistema, ocorrer uma equação do tipo

$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$

esta deverá ser suprimida do sistema.

2ª) Se, ao escalonarmos um sistema, ocorrer uma equação do tipo

$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$ (com $b \neq 0$)

o sistema será, evidentemente, impossível.

3ª) As operações sobre as linhas do sistema descritas nos teoremas 1, 2 e 3 são chamadas de operações elementares sobre linhas.

CAPÍTULO 2

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES

Provavelmente um dos problemas mais importantes em matemática é resolver um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em alguma etapa.

Usando métodos eficientes, muitas vezes é possível reduzir um problema sofisticado a um único sistema de equações lineares.

Sistemas lineares aparecem em aplicações em áreas como Administração, Economia, Sociologia, Medicina, Ecologia, Demografia, Genética, Eletrônica, Engenharia, Física, entre outras.

O objetivo deste capítulo é mostrar algumas aplicações de Sistemas Lineares na resolução de problemas do cotidiano.

APLICAÇÃO 1

MODELO LINEAR NA ECONOMIA E ENGENHARIA

No final do verão de 1949 Wassily Leontief, professor de Harvard, estava cuidadosamente inserindo o último cartão perfurado no computador Mark II daquela universidade. Os cartões continham informações sobre a economia americana e representavam um resumo de mais de 2500000 itens produzidos pelo Departamento de Estatística do Trabalho dos EUA após dois anos de trabalho intenso. Leontief dividiu a economia americana em 500 "setores", como indústria de carvão, indústria automobilística, comunicações e assim por diante. Para cada setor, ele escreveu uma equação linear que descrevia como o setor distribuía sua produção com respeito aos outros setores da economia. Como o Mark II, um dos maiores computadores de sua época, não podia lidar com o sistema resultante de 500 equações e 500 incógnitas, Leontief precisou resumir o problema em um sistema de 42 equações e 42 incógnitas.

A programação do computador Mark II para resolver as 42 equações de Leontief levou vários meses de trabalho, e Leontief estava ansioso para ver quanto tempo o computador levaria para resolver o problema. O Mark II roncou e piscou durante 56 horas até que finalmente produziu uma solução.

Leontief, que ganhou o Prêmio Nobel de Economia em 1973, abriu as portas para uma nova era da modelagem matemática na Economia. Seus esforços de 1949 em Harvard marcaram uma das primeiras aplicações significativas do computador na análise do que era então um modelo matemático de grande escala. Desde essa época, pesquisadores de muitas outras áreas têm usado os computadores para analisar modelos matemáticos. Por causa da enorme quantidade de dados envolvidos, os modelos são geralmente lineares; isto é, são descritos por sistemas de equações lineares [9].

APLICAÇÃO 2

COMO MONTAR UMA DIETA EQUILIBRADA PARA PERDA DE PESO

A fórmula para a Dieta de Cambridge, uma dieta popular nos anos 80, foi baseada em anos de pesquisa. Uma equipe de cientistas, chefiada pelo Dr. Alan H. Howard, desenvolveu essa dieta na Universidade de Cambridge depois de mais de oito anos de trabalho clínico com pacientes obesos. A fórmula dessa dieta de baixíssimas calorias, pulverizada, é uma combinação precisa e equilibrada de carboidratos, proteínas de alta qualidade, gordura, juntamente com vitaminas, minerais, elementos traços e eletrólitos. Milhões de pessoas já usaram essa dieta, nos últimos anos, para obter uma perda de peso substancial e rápida.

Para atingir as quantidades e as proporções desejadas de cada nutriente, o Dr. Howard precisou incorporar à dieta uma grande variedade de tipos alimentares. Cada tipo alimentar fornecia vários ingredientes necessários, mas não nas proporções corretas. Por exemplo, o leite desnatado era uma grande fonte de proteínas, mas continha muito cálcio. Então foi usada farinha de soja para se obter parte das proteínas porque contém pouco cálcio. No entanto, a farinha de soja, proporcionalmente, contém gordura demais, e então, foi acrescentado soro de leite talhado, já que ele tem menos gordura. Infelizmente, o soro de leite contém carboidratos demais...

Tabela 1

Quantidades (gramas) Fornecidas por 100 g de Ingrediente				
Nutriente (gramas)	Leite Desnatado	Farinha de soja	Soro de leite	Quantidades fornecidas pela dieta de Cambridge em um dia
Proteína	36	51	13	33
Carboidrato	52	34	74	45
Gordura	0	7	1,1	3

O próximo exemplo ilustra o problema em pequena escala. Na Tabela 1 estão três dos ingredientes da dieta, juntamente com as quantidades de determinados nutrientes obtidos a partir de 100 gramas de cada ingrediente.

Exemplo 1 – Se possível, determine uma combinação de leite desnatado, farinha de soja e soro de leite, de modo a obter as quantidades diárias exatas de proteínas, carboidratos e gordura para a dieta (Tabela 1).

Solução: Sejam x_1, x_2 e x_3, respectivamente, os números de unidades (100 gramas) desses tipos alimentares. Uma abordagem para o problema é derivar equações para cada nutriente separadamente. Por exemplo, o produto

$$\left\{\begin{matrix} x_1 \text{ unidade} \\ \text{de leite} \\ \text{desnatado} \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} \text{proteínas por} \\ \text{unidade de} \\ \text{leite desnatado} \end{matrix}\right\}$$

dá a quantidade de proteína fornecida por x_1 unidades de leite desnatado. A essa quantidade acrescentaríamos produtos semelhantes para a farinha de soja e para o soro de leite, e igualaríamos a soma à quantidade total de proteínas que fosse necessária. Seria preciso fazer cálculos análogos para cada nutriente.

Um método mais eficiente, e conceitualmente mais simples, é considerar um "vetor de nutrientes" para cada tipo alimentar. A quantidade de nutrientes fornecidos por x_1 unidades de leite desnatado é um múltiplo escalar

$$\left\{\begin{matrix} \text{Escalar} \\ x_1 \text{ unidade} \\ \text{de leite} \\ \text{desnatado} \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} \text{Vetor} \\ \text{proteínas por} \\ \text{unidade de} \\ \text{leite desnatado} \end{matrix}\right\} = x_1 a_1 \qquad (1)$$

onde a_1 é a primeira coluna da Tabela 1. Sejam a_2 e a_3 as matrizes colunas correspondentes para a farinha de soja e para o soro de leite, respectivamente, e seja b a matriz coluna que fornece o total de nutrientes necessários (a última coluna da tabela). Então x_2a_2 e x_3a_3 são as quantidades de nutrientes fornecidas por x_2 unidades de farinha de soja e x_3 unidades de soro de leite, respectivamente. Assim, podemos escrever

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = b \tag{2}$$

O escalonamento da matriz completa para o sistema de equações correspondente mostra que

$$\begin{bmatrix} 36 & 51 & 13 & 33 \\ 52 & 34 & 74 & 45 \\ 0 & 7 & 1{,}1 & 3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}277 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}392 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}233 \end{bmatrix}$$

Com precisão de três casas decimais, a dieta requer 0,277 unidades de leite desnatado, 0,392 unidades de farinha de soja e 0,233 unidades de soro de leite de modo a obter as quantidades desejadas de proteínas, carboidratos e gordura.

É importante que os valores de x_1, x_2, x_3 acima sejam não-negativos. Isso é necessário para que a solução seja fisicamente viável. (como se poderia usar –0,233 unidades de soro de leite, por exemplo?). Com um número grande de nutrientes necessários, talvez seja preciso usar uma quantidade maior de tipos alimentares para que se possa produzir um sistema de equações com solução "não-negativa". Portanto, pode ser preciso examinar uma quantidade muito grande de tipos alimentares de modo a encontrar um sistema de equações com uma tal solução. Na verdade, o fabricante da Dieta de Cambridge conseguiu fornecer 31 nutrientes, em quantidades precisas, usando apenas 31 ingredientes.

O problema da montagem da dieta conduz à equação linear (2) porque as quantidades de nutrientes fornecidas por cada tipo alimentar podem ser escritas como um múltiplo escalar de um vetor, como em (1). Ou seja, os nutrientes fornecidos por um tipo alimentar são proporcionais à quantidade do tipo alimentar acrescentado à dieta. Além disso, a quantidade de cada nutriente ao combinado alimentar é a soma das respectivas quantidades em cada tipo alimentar.

APLICAÇÃO 3

EQUAÇÕES LINEARES E CIRCUITOS ELÉTRICOS

O fluxo de corrente em um circuito elétrico simples pode ser descrito por um sistema linear de equações. Um gerador de voltagem, como uma bateria, faz com que uma corrente de elétrons percorra o circuito. Quando a corrente passa por uma resistência (como uma lâmpada ou um motor), parte da voltagem é "consumida"; pela lei de Ohm, essa "queda de voltagem" ao atravessar um resistor é dada por

$$V = RI$$

onde a voltagem V é medida em volts, a resistência R em ohms (denotada por Ω) e o fluxo de corrente I em ampères (abreviado por amps).

O circuito da Figura 1 contém três ciclos fechados. As correntes dos ciclos 1, 2 e 3 são denotadas por I_1, I_2 e I_3, respectivamente. As direções atribuídas a cada uma dessas correntes são arbitrárias. Se uma corrente aparece com valor negativo, então sua direção real é a inversa da estipulada na figura. Se a direção indicada da corrente do lado positivo da bateria (segmento maior) para o lado negativo (segmento menor), então a voltagem é positiva; caso contrário, a voltagem é negativa.

O fluxo de corrente num ciclo é governado pela seguinte regra:

Lei de Kirchhoff para a Voltagem:

A soma algébrica das quedas de voltagem, RI, em torno de um ciclo é igual à soma algébrica das fontes de voltagem na mesma direção nesse ciclo.

Exemplo 2 – Determine a corrente nos ciclos da Figura 1.

Solução: Para o ciclo 1, a corrente I_1 atravessa três resistores, e a soma das quedas de voltagem, RI, é

$$4I_1 + 4I_1 + 3I_1 = (4 + 4 + 3)\, I_1 = 11I_1$$

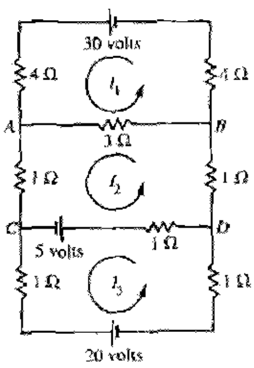


Figura 1

A corrente do ciclo 2 também atravessa parte do ciclo 1, pelo ramo entre A e B. A queda RI correspondente é de 3 I_2 volts. Entretanto, a direção da corrente para o ramo AB, no ciclo 1, é oposta à direção escolhida para a corrente no ciclo 2, de modo que a soma algébrica de todas as quedas RI para o ciclo 1 é $11I_1 - 3I_2$. Como a voltagem do ciclo 1 é de +30 volts, a lei de Kirchhoff para a voltagem implica que

$$11\ I_1 - 3\ I_2 = 30$$

Para o ciclo 2 têm-se

$$-3\ I_1 + 6I_2 - I_3 = 5$$

O termo $-3\ I_1$ aparece devido à corrente do ciclo 1 pelo ramo AB (com a queda de voltagem negativa porque o fluxo da corrente é oposto ao fluxo do ciclo 2). O termo $6I_2$ é a soma de todas as resistências do ciclo 2, multiplicado pela corrente do ciclo. O termo $-I_3 = -1\ .\ I_3$ aparece devido à corrente do ciclo 3 atravessando o resistor de 1 ohm no ramo CD, na direção oposta à direção da corrente do ciclo 2. A equação do ciclo 3 é

$$-\ I_2 + 3I_3 = -25$$

Observe que a bateria de 5 volts do ramo CD é contada como parte do ciclo 2 e do ciclo 3, mas é –5 volts para o ciclo 3 por causa da direção escolhida para a corrente nesse ciclo. A bateria de 20 volts também é negativa pelo mesmo motivo.

As correntes dos ciclos são determinadas resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} 11\,I_1 - 3\,I_2 \quad &= 30 \\ -3\,I_1 + 6\,I_2 - I_3 &= 5 \\ -I_2 + 3I_3 &= -25 \end{aligned} \tag{3}$$

As operações elementares sobre a matriz completa levam à solução: $I_1 = 3$ amps, $I_2 = 1$ amp e $I_3 = -8$ amps. O valor negativo para I_3 mostra que a direção real da corrente, no ciclo 3, é na direção oposta à da indicada na Figura 1.

É instrutivo ver o sistema (3) da seguinte forma:

$$I_1\underbrace{\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{r_1} + I_2\underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}}_{r_2} + I_3\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{r_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ -25 \end{bmatrix}}_{v} \tag{4}$$

A primeira componente de cada vetor diz respeito ao primeiro ciclo, e analogamente para a segunda e terceira componentes. O primeiro vetor de resistência r_1 dá a resistência dos diversos ciclos atravessados pela corrente I_1. A resistência tem valor negativo sempre que I_1 atravessa na direção oposta à corrente daquele ciclo. Examine a Figura 1 para ver como obter as componentes de r_1; depois, faça o mesmo para r_2 e r_3. A forma matricial de (4),

$$RI = V, \text{ onde } R = [r_1\ r_2\ r_3] \text{ e } I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

fornece uma versão matricial da lei de Ohm. Se todas as correntes forem escolhidas com o mesmo sentido (digamos, o anti-horário), então todos os elementos da diagonal principal de R serão negativos.

A equação matricial RI = V torna a linearidade desse modelo fácil de ser identificada. Por exemplo, se o vetor de voltagens for duplicado, então o vetor de correntes também tem que ser duplicado. Além disso, o princípio da superposição é válido. Ou seja, a solução da equação (4) é igual à soma das soluções das equações

$$RI = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, RI = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ e } RI = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix}$$

Aqui, cada equação corresponde ao circuito com apenas uma fonte de voltagem (as outras foram substituídas por fios que fecham cada ciclo). O modelo para o fluxo de correntes é linear precisamente porque as leis de Ohm e Kirchhoff são lineares: A queda de voltagem num resistor é proporcional à corrente que o atravessa (Ohm), e a soma das quedas de voltagem num ciclo é igual à soma das fontes de voltagem desse ciclo (Kirchhoff).

As correntes dos ciclos de um circuito podem ser usadas para determinar a corrente em qualquer ramo do ciclo. Se apenas uma corrente do ciclo atravessa um ramo, como no caso de B para D, na Figura 1, então a corrente do ramo é igual à corrente do ciclo. Se mais de uma corrente do ciclo atravessa o ramo, como no caso de A para B, a corrente do ramo é igual à soma algébrica das correntes de ciclo que atravessam esse ramo (Lei de Kirchhoff para Correntes). Por exemplo, a corrente no ramo AB é $I_1 - I_2 = 3 - 1 = 2$ amps, na direção de I_1.

APLICAÇÃO 4

TRÁFEGO DE VEÍCULOS

Em uma certa região do centro de determinada cidade, dois conjuntos de ruas de mão única se cruzam conforme a ilustração abaixo.

A média do número de veículos por hora que entram e saem dessa seção durante o horário de rush é dada no desenho.

Serão determinadas as quantidades de veículos entre cada um dos quatro cruzamentos.

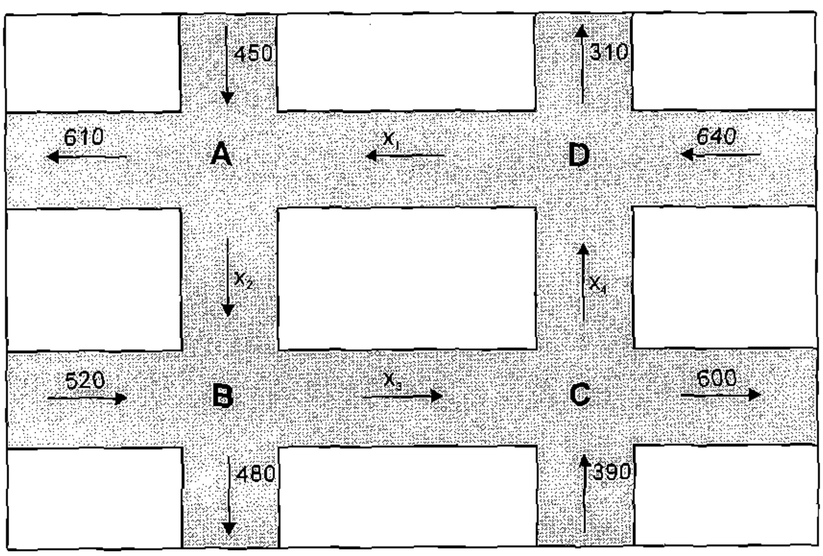


Figura 1

Solução: em cada cruzamento, o número de veículos que entra deve ser igual ao número que sai. Por exemplo, no cruzamento A, o número de veículos que entra é $x_1 + 450$ e o número de veículos que sai é $x_2 + 610$. Logo

$$x_1 + 450 = x_2 + 610 \text{ (cruzamento A)}$$

Analogamente

$x_2 + 520 = x_3 + 480$ (cruzamento B)

$x_3 + 390 = x_4 + 600$ (cruzamento C)

$x_4 + 640 = x_1 + 310$ (cruzamento D)

Tem-se então o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 160 \\ x_2 - x_3 = -40 \\ x_3 - x_4 = 210 \\ x_4 - x_1 = -330 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -330 \end{array}\right]$$

Após o escalonamento tem-se:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A solução geral do sistema é: $(330 + x_4, 170 + x_4, 210 + x_4, x_4)$

O sistema é compatível, e, como existe uma variável livre, existem infinitas soluções.

O diagrama de fluxo de tráfego não contém informações suficientes para determinar x_1, x_2, x_3 e x_4. Se o número de veículos entre dois cruzamentos fosse conhecido, o tráfego nos outros cruzamentos estaria determinado. Por exemplo, se uma média de 200 carros trafega por hora entre os cruzamentos C e D, então $x_4 = 200$. Então, podem ser determinados os valores de x_1, x_2 e x_3 em função de x_4, obtendo $x_1 = 530$, $x_2 = 370$ e $x_3 = 410$.

APLICAÇÃO 5

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA NUMA PLACA

Uma consideração importante no estudo da transferência de calor é a de se determinar a distribuição de temperatura assintótica de uma placa fina quando a temperatura em seu bordo é conhecida. Suponha que a placa na Figura 1 represente uma seção transversal de uma barra de metal, com fluxo de calor desprezível na direção perpendicular à placa. Sejam T_1, ..., T_6 as temperaturas em seis vértices interiores do reticulado da Figura 3. A temperatura num vértice é aproximadamente igual à média dos quatro vértices vizinhos mais próximos – à esquerda, acima, à direita, e abaixo. Por exemplo,

$$T_1 = (10 + 20 + T_2 + T_4)/4, \text{ ou } 4\,T_1 - T_2 - T_4 = 30$$

Escreva um sistema de seis equações cuja solução fornece estimativas para as temperaturas T_1, ..., T_6.

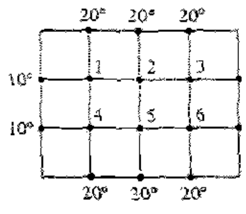


Figura 1

Solução:

$T_1 = (10 + 20 + T_2 + T_4) / 4 \cong 4T_1 - T_2 - T_4 = 30$

$T_2 = (T_1 + 20 + T_3 + T_5) / 4 \cong 4T_2 - T_1 - T_3 - T_5 = 20$

$T_3 = (T_2 + 20 + 40 + T_6) / 4 \cong 4T_3 - T_2 - T_6 = 60$

$T_4 = (T_1 + 10 + 20 + T_5) / 4 \cong 4T_4 - T_1 - T_5 = 30$

$T_5 = (T_2 + T_4 + 20 + T_6) / 4 \cong 4T_5 - T_2 - T_4 - T_6 = 20$

$T_6 = (T_5 + T_3 + 40 + 20) / 4 \cong 4T_6 - T_5 - T_3 = 60$

A matriz do sistema é

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 30 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 60 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 30 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 60 \end{array}\right]$$

A solução do sistema é:

$T_1 = 17{,}1^\circ$

$T_2 = 21{,}4^\circ$

$T_3 = 27{,}1^\circ$

$T_4 = 17{,}1^\circ$

$T_5 = 21{,}4^\circ$

$T_6 = 27{,}1^\circ$

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DE PROBLEMAS EM SALA DE AULA COM ALUNOS DE 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Os problemas mostrados a seguir foram apresentados para uma turma de 2ª série do Ensino Médio, do Colégio Estadual José Maria Cardoso da Veiga, Enseada de Brito, Palhoça.

E por que fazer tal aplicação?

Além de possibilitar a aplicação dos conceitos estudados, consegue-se ministrar uma aula de exercícios mais dinâmica e atrativa, diferente daquelas em que se faz somente a aplicação dos conceitos de forma mecânica; a resolução de problemas possibilita ao aluno a oportunidade de relacionar os ensinamentos matemáticos com a realidade dos fatos.

As aulas de exercícios foram ministradas da seguinte forma:

Na primeira aula foram entregues aos alunos listas contendo dez problemas, e pediu-se que os mesmos, após lerem com atenção os enunciados, estabelecessem o sistema linear correspondente a cada problema, sem resolvê-los. Após o término desta tarefa as listas foram recolhidas para avaliação.

Na segunda aula as listas foram devolvidas aos alunos para que fosse feita a análise da interpretação dos problemas; foram feitos comentários sobre cada questão, destacando a importância da coerência do uso dos dados do problema, e foram observados os principais erros cometidos em cada questão, e analisadas as diferentes interpretações que surgiram.

Depois desse procedimento os alunos refizeram seus exercícios.

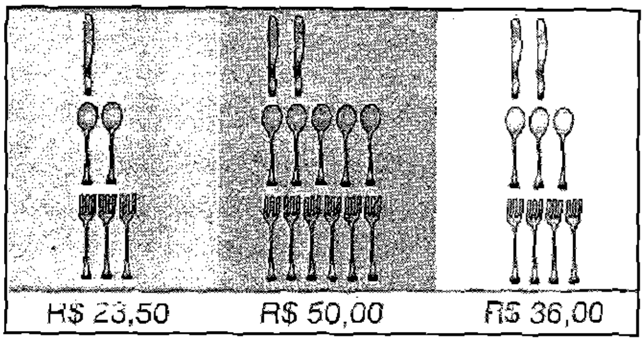
Na terceira aula pediu-se que os alunos resolvessem os sistemas montados, já corrigidos, utilizando os métodos estudados.

Na quarta aula foi feita a correção da solução dos problemas, procurando enfatizar que buscamos não somente um conjunto solução, mas sim a resposta coerente de um problema.

As soluções apresentadas nos problemas que seguem são extraídas do trabalho feito pelos alunos.

PROBLEMA 1

Examinando os anúncios abaixo, conclua qual é o preço de cada faca, garfo e colher.



Solução:

As variáveis são:

- x: preço de uma faca;
- y: preço de uma colher;
- z: preço de um garfo.

Sabe-se que:

- 1 faca, 2 colheres e 3 garfos custam R$ 23,50;
- 2 facas, 5 colheres e 6 garfos custam R$ 50,00;
- 2 facas, 3 colheres e 4 garfos custam R$ 36,00

O problema pode então ser representado na forma de um sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 23{,}5 \\ 2x + 5y + 6z = 50 \\ 2x + 3y + 4z = 36 \end{cases}$$

S: (5,5; 3; 4)

Resposta: O preço de cada faca, colher e garfo é respectivamente, R$ 5,50, R$ 3,00 e R$ 4,00.

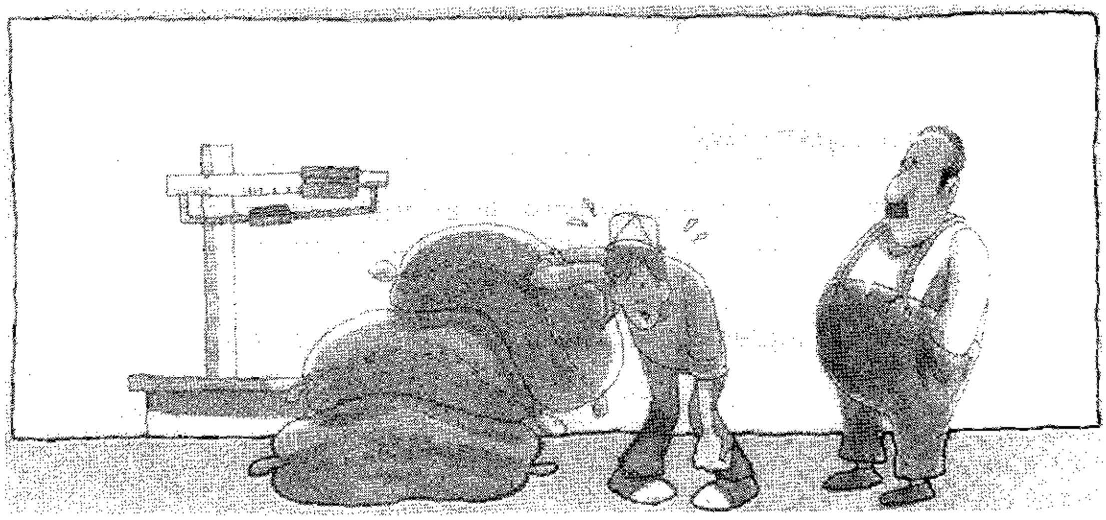
PROBLEMA 2

Um comerciante mandou seu empregado pesar três sacos de farinha. O rapaz voltou exausto, e disse:

- O primeiro e o segundo sacos, juntos, têm 110 quilogramas. O primeiro e o terceiro, juntos, têm 120 quilogramas. E o segundo e o terceiro, juntos, têm 112 quilogramas.

Mas o comerciante queria saber quantos quilogramas tinha cada saco!

Para o empregado não se cansar mais, descubra isso para ele.



Solução:

As variáveis são:

- x: peso do saco 1;
- y: peso do saco 2;
- z: peso do saco 3.

Sabe-se que:

- O saco 1 e o saco 2 pesam juntos 110 kg;
- O saco 1 e o saco 3 pesam juntos 120 kg
- O saco 2 e o saco 3 pesam juntos 112 kg

O problema pode ser representado na forma do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ x + z = 120 \\ y + z = 112 \end{cases}$$

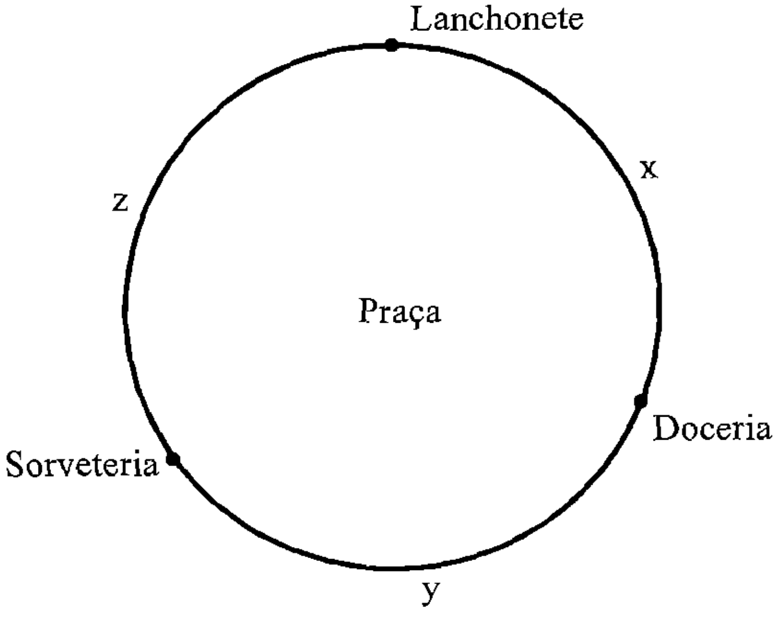
Por substituição os alunos obtiveram a solução (59, 51, 61).

Assim, os pesos dos sacos 1, 2 e 3 são respectivamente, 59 kg, 51 kg e 61 kg.

PROBLEMA 3

Maricota é uma mocinha gordinha, habitante de São João das Almas, no Triângulo Mineiro. Seu único programa de fim de semana é dar voltas à praça da matriz e comer guloseimas. A praça é circular e possui uma lanchonete, uma doceria e uma sorveteria. De tanto fazer o mesmo caminho, Maricota sabe que da lanchonete à sorveteria, passando pela doceria, são 231 passos. Da doceria à lanchonete, passando pela sorveteria, ela dá 242 passos e, da sorveteria à doceria, passando pela lanchonete, o caminho é o mais longo, forçando-a a dar 281 passos. Qual é o perímetro da praça, em passos da Maricota?

Solução:



- x: distância entre a lanchonete e a doceria;
- y: distância entre a doceria e a sorveteria;
- z: distância entre a sorveteria e a lanchonete.

O problema pode ser representado pelo sistema:

$$\begin{cases} x + y = 231 \\ y + z = 242, \\ x + z = 281 \end{cases}$$

a matriz aumentada é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 231 \\ 0 & 1 & 1 & 242 \\ 1 & 0 & 1 & 281 \end{array}\right]$.

Por escalonamento os alunos chegaram a solução (135, 96, 146).

Assim, entre a lanchonete e a doceria são 135 passos; entre a doceria e a sorveteria são 96 passos e entre a sorveteria e a lanchonete são 146 passos. Logo, o perímetro da praça, em passos da Maricota, é 377 passos.

PROBLEMA 4

Na primeira gincana deste ano organizada pelo nosso colégio, foram montadas três barracas, que foram chamadas de B1, B2 e B3.

As três barracas vendiam os mesmos tipos de alimentação: cachorro quente, pastel e batata frita; cada uma dessas opções tinha o mesmo preço em todas as barracas.

No fim da gincana o balanço feito sobre o consumo nas três barracas mostrou que:

- em B1 foram consumidos 28 cachorros quentes, 42 pastéis e 48 porções de fritas;
- em B2 foram consumidos 23 cachorros quentes, 50 pastéis e 45 porções de fritas;
- em B3 foram consumidos 30 cachorros quentes, 45 pastéis e 60 porções de fritas.

As barracas B1, B2 e B3 lucraram R$ 102,00, R$ 95,00 e R$ 117,00 respectivamente.

Qual o preço de cada cachorro quente, pastel e porção de fritas?

Solução:

Sejam: x o preço de um cachorro quente;
y o preço de um pastel;
z o preço de uma porção de fritas.

Com os dados do problema montou-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 28x + 42y + 48z = 102 \\ 23x + 50y + 45z = 95 \\ 30x + 45y + 60z = 117 \end{cases}$$

a matriz aumentada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 28 & 42 & 48 & 102 \\ 23 & 50 & 45 & 95 \\ 30 & 45 & 60 & 117 \end{array}\right]$$

Utilizando a regra de Cramer, os alunos obtiveram a solução (1,5, 0,9, 0,4).

Pode-se, então, dizer que o preço de um cachorro quente é R$ 1,50, o preço de um pastel é R$ 0,40 e o preço de uma porção de fritas é R$ 0,90.

PROBLEMA 5

Um negociante trabalha com as mercadorias A, B e C.

Se vender cada unidade de A por R$ 2,00, cada unidade de B por R$ 3,00 e cada uma de C por R$ 4,00, obtém uma receita de R$ 50,00.

Mas, se vender cada unidade respectivamente por R$ 2,00, R$ 6,00 e R$ 3,00 a receita será de R$ 60,00.

Calcular o número de unidades que possui de cada uma das mercadorias.

Solução:

Sejam a, b, e c as quantidades de A, B e C respectivamente.

O problema sugere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2a + 3b + 4c = 50 \\ 2a + 6b + 3c = 60 \end{cases}$$

Com a, b, e c inteiros positivos.

A matriz aumentada do sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 50 \\ 2 & 6 & 3 & 60 \end{array}\right]$$

Resolvendo por escalonamento, foi obtida a seguinte solução:

$$\left(\frac{90-15b}{2},\ b,\ 3b-10\right)$$

a > 0: $\dfrac{90-15b}{2} > 0$; logo, b < 6.

c > 0: 3b – 10 > 0; logo b > $\dfrac{10}{3}$.

Então $\frac{10}{3} < b < 6$, b inteiro, ou seja, b = 4 ou b = 5.

se b = 4 tem-se c = 2 e a = 15 (que é possível, pois todos são inteiros);

se b = 5 tem-se c = 5 e a = 7,5 (que é impossível, pois *a* não é inteiro);

Logo, a única solução possível é 15 unidades de A, 4 unidades de B e 2 unidades de C.

PROBLEMA 6

Este é o problema do "cento de aves" criado por um sábio chinês do século VI a.C.

"Se um galo vale 5 moedas, uma galinha vale 3 moedas e 3 frangos valem 1 moeda, quantos de cada um se pode comprar com 100 moedas, de modo que sejam 100 aves ao todo e pelo menos 4 galos?"

Solução:

Sejam:

- x: número de galos
- y: número de galinhas
- z: número de frangos.

O sistema correspondente ao problema é:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\dfrac{z}{3}=100 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=100 \\ 15x+9y+z=300 \end{cases}$$

por substituição, concluiu-se que:

$z = 300 - 15x - 9y$

$y = \dfrac{100-7x}{4} = 25 - \dfrac{7}{4}x$

Como x é inteiro e $x \geq 4$, e y deve ser inteiro positivo, tem-se que x deve ser múltiplo de 4.

x	$y = 25 - \frac{7}{4}x$
4	18
8	11
12	4
16	-3

Analisando a tabela conclui-se que x pode ser igual a 4, 8 ou 12; os valores correspondentes de y aparecem na tabela; Obtém-se que os valores correspondentes de z são, respectivamente, 78, 81 e 84.

Portanto, com 100 moedas podem ser comprados 4 galos, 18 galinhas e 78 frangos, ou 8 galos, 11 galinhas e 81 frangos, ou 12 galos, 4 galinhas e 84 frangos.

PROBLEMA 7

As moedas de um determinado país são de três tipos:

- De 3g que vale \$ 10;
- De 5g que vale \$ 20;
- De 9g que vale \$ 50.

Uma pessoa tem cem moedas, num total de 600g, somando \$ 2800.

Quantas moedas de cada tipo essa pessoa possui?

Solução:

Sejam:

- x: número de moedas de \$ 10;
- y: número de moedas de \$ 20; e
- z: número de moedas de \$ 50.

Tem-se, então, o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & \text{(quanto a quantidade)} \\ 3x + 5y + 9z = 600 & \text{(quanto ao peso)} \\ 10x + 20y + 50z = 2800 & \text{(quanto ao valor)} \end{cases}$$

Usando a regra de Cramer, se obteve a solução: (10, 60, 30).

Portanto, a pessoa possui 10 moedas de 3g, 60 moedas de 5g e 30 moedas de 9g.

PROBLEMA 8

Uma editora publica um best-seller em potencial com três encadernações diferentes: capa mole, capa dura e encadernação de luxo. Cada exemplar de capa mole necessita de 1 minuto para a costura e de 2 minutos para a cola. Cada exemplar de capa dura necessita de 2 minutos para a costura e de 4 minutos para a cola. Cada exemplar com encadernação de luxo necessita de 3 minutos para a costura e de 5 minutos para a cola. Se o local onde são feitas as costuras fica disponível 6 horas por dia e o local onde se cola fica disponível 11 horas por dia, quantos livros de cada tipo devem ser feitos por dia de modo que os locais de trabalho sejam plenamente utilizados?

Solução:

Sejam:

- x: número de livros de capa mole a serem fabricados;
- y: número de livros de capa dura a serem fabricados;
- z: número de livros de capa de luxo a serem fabricados.

Organizou-se a tabela abaixo para relacionar o tempo de encadernação com o tipo de cada capa:

Tempo / Tipo	Costura	Cola
Capa mole	1	2
Capa dura	2	4
Capa de luxo	3	5

Como os livros devem ser fabricados por dia de forma que os locais de trabalho sejam plenamente utilizados, pode-se montar o seguinte sistema, levando em consideração que 6 horas = 360 minutos e 11 horas = 660 minutos.

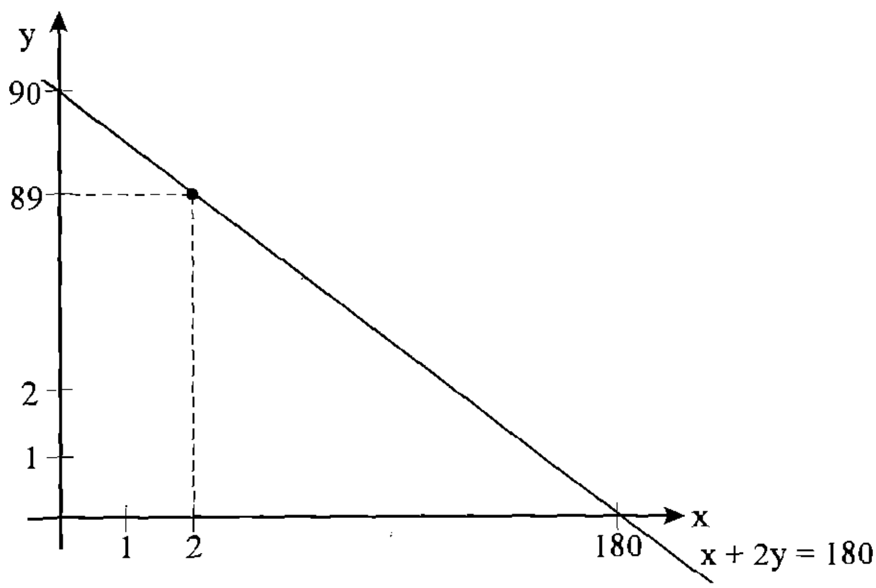
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 360 \\ 2x + 4y + 5z = 660 \end{cases}$$

A matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 360 \\ 2 & 4 & 5 & 660 \end{array}\right].$$

Por escalonamento, se obteve a solução: $\left(x, \dfrac{180-x}{2}, 60\right)$,

x e y devem ser inteiros positivos.



Da análise do gráfico tem-se que:

- $y = 90 - \dfrac{x}{2}$;
- $0 < x < 180$, x: par;

Assim, tem-se a solução geral: $\left(x, 90 - \dfrac{x}{2}, 60\right)$, com $0 < x < 180$, x par.

Por exemplo:

Se x = 2 então y = 89 e z = 60, ou seja, se forem encadernados 2 livros com capa mole, devem ser encadernados 89 com capa dura e 60 com capa de luxo para que os locais de trabalho sejam plenamente aproveitados.

Se x = 20, se obtém y = 80, ou seja, se forem encadernados 20 livros com capa mole, devem ser encademados 80 com capa dura e 60 com capa de luxo, e assim por diante.

PROBLEMA 9

Um fabricante de móveis produz cadeiras, mesinhas de centro e mesas de jantar. Cada cadeira leva 10 minutos para ser lixada, 6 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesinha de centro leva 12 minutos para ser lixada, 8 minutos para ser tingida e 12 minutos para ser envernizada. Cada mesa de jantar leva 15 minutos para ser lixada, 12 minutos para ser tingida e 18 minutos para ser envernizada. A bancada para lixar fica disponível 16 horas por semana, a bancada para tingir, 11 horas por semana, e a bancada para envernizar, 18 horas por semana. Quantos móveis devem ser fabricados (por semana) de cada tipo para que as bancadas sejam plenamente utilizadas?

Solução:

Acabamento / Móvel	Tempo para Lixar	Tempo para Tingir	Tempo para Envernizar
Cadeira	10	6	12
Mesinha	12	8	12
Mesa	15	12	18

Sejam:

- x: o número de cadeiras a serem fabricadas;
- y: o número de mesinhas a serem fabricadas;
- z: o número de mesas a serem fabricadas.

Tem-se que 16 h = 960 minutos; 11 h = 660 minutos e 18 h = 1080 minutos.

Como os móveis devem ser fabricados por semana de forma que as bancadas sejam plenamente utilizadas, pode-se montar o sistema:

$$\begin{cases} 10x + 12y + 15z = 960 \\ 6x + 8y + 12z = 660 \\ 12x + 12y + 18z = 1080 \end{cases}$$

a matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 12 & 15 & 960 \\ 6 & 8 & 12 & 660 \\ 12 & 12 & 18 & 1080 \end{array}\right]$$

Por escalonamento chegou-se a solução (30, 30, 20).

Então, para que as bancadas sejam plenamente utilizadas devem ser fabricados por semana 30 cadeiras, 30 mesinhas e 20 mesas.

PROBLEMA 10

Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E.

Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

ii) O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.

iii)O alimento III tem 2 unidades de A, 2 unidades de B, 5 unidades de C, 1 unidade de D e 2 unidades de E.

iv)O alimento IV tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 2 unidades de D e 13 unidades de E.

v) O alimento V tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 9 unidades de D e 2 unidades de E.

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

Solução:

Alimento / Vitamina	I	II	III	IV	V	Total de Vitaminas
A	1	9	2	1	1	170
B	10	1	2	1	1	180
C	1	0	5	1	1	140
D	2	1	1	2	9	180
E	2	1	2	13	2	350

Sejam: x, y, z, t e w as quantidades (em grama) a serem ingeridas diariamente dos alimentos I, II, III, IV e V respectivamente.

O sistema equivalente ao problema é:

$$\begin{cases} x + 9y + 2z + t + w = 170 \\ 10x + y + 2z + t + w = 180 \\ x + 0y + 5z + t + w = 140 \\ 2x + y + z + 2t + 9w = 180 \\ 2x + y + 2z + 13t + 2w = 350 \end{cases}$$

A matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 9 & 2 & 1 & 1 & 170 \\ 10 & 1 & 2 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 140 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 9 & 180 \\ 2 & 1 & 2 & 13 & 2 & 350 \end{array}\right]$$

Por escalonamento foi obtida a solução (10, 10, 20, 20, 10).

Assim, para que se tenha uma alimentação diária equilibrada deve-se ingerir 10 g do alimento I, 10 g do alimento II, 20 g do alimento III, 20 g do alimento IV e 10 g do alimento V.

COMENTÁRIOS SOBRE OS EXERCÍCIOS APLICADOS

Será feita aqui uma análise do trabalho desenvolvido com os alunos:

Os aspectos analisados foram:

1. Interpretação dos problemas.
2. Capacidade de organizar os dados e de modelar os problemas com sistemas lineares.
3. Aplicação dos métodos vistos na resolução dos problemas.
4. Interpretação do conjunto solução.

1. INTERPRETAÇÃO DOS PROBLEMAS

Verificou-se pouca dificuldade em entender o enunciado dos problemas, sendo que a maioria dos alunos conseguiu destacar o objetivo em cada situação.

2. CAPACIDADE DE ORGANIZAR OS DADOS E DE MODELAR OS PROBLEMAS COM SISTEMAS LINEARES

Embora tenham entendido o objetivo dos problemas, os alunos tiveram dificuldade em organizar os dados e modelá-los com sistemas lineares. Com isso observou-se que os alunos não são levados a interpretar matematicamente as situações desde as séries iniciais, sendo que no Ensino Médio a abordagem de problemas no contexto das matérias é completamente abandonada.

Após a apresentação de alguns exemplos tornou-se mais fácil estabelecer as variáveis correspondentes em cada problema, organizar esquemas, montar tabelas e a partir daí estabelecer os sistemas lineares.

3. APLICAÇÃO DOS MÉTODOS ESTUDADOS NA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

Com os problemas já modelados em sistemas lineares houve dificuldade em aplicar o método estudado mais adequado na sua resolução.

Observou-se que a tendência foi, primeiramente, tentar resolver todos os sistemas lineares usando a Regra de Cramer, por terem mais segurança na utilização deste método, que segundo os alunos é mais fácil e sempre segue o mesmo procedimento. Foram então lembrados que a Regra de Cramer só se aplica a sistemas lineares cujas matrizes associadas são quadradas e com determinantes diferentes de zero.

Foi necessário fazer mais alguns exercícios de pura resolução de sistemas usando escalonamento para melhor esclarecimento, já que os alunos consideram este método muito complicado e com bastante possibilidade de erros.

Após esse esclarecimento os sistemas foram resolvidos sem maiores dificuldades.

4. INTERPRETAÇÃO DO CONJUNTO SOLUÇÃO

Como já havia sido comentado, ao resolver um sistema linear obtido pela modelagem de um problema, deve-se cuidar para que o conjunto solução seja interpretado adequadamente.

Neste item os alunos foram bastante atenciosos.

CONCLUSÃO

Com este trabalho procurou-se mostrar uma maneira diferente de abordar o assunto Sistema de Equações Lineares tendo sido dado grande ênfase à resolução de problemas.

Em geral, os exercício referentes aos conteúdos matemáticos são mecânicos, não levando o aluno ao raciocínio lógico tão comentado nas novas tendências pedagógicas. Não existe uma integração mais específica do conteúdo teórico com a prática.

A idéia de trabalhar este tema surgiu quando fiz a disciplina Compreensão de Textos e Resolução de Problemas, oferecida para a Licenciatura em Matemática, que me fez perceber a importância do uso dos problemas na fixação dos conteúdos ensinados.

A opção por este assunto específico deu-se quando, ao folhear um livro de matemática do Ensino Médio, encontrei um problema, o de número 3 do capítulo 3, que chamou minha atenção para a forma como o problema foi apresentado: de forma criativas e atraente.

Então, comecei a procurar exemplos e exercícios em livros de Ensino Médio, Superior e Fundamental, sendo que foi mais fácil encontrá-los em livros de Ensino Superior e Fundamental do que em livros de Ensino Médio, nos quais a abordagem de problemas e precária.

O desenvolvimento do trabalho deu-se de forma tranqüila e de um forma geral os alunos mostraram-se bastante receptivos, apresentando dificuldades dentro do esperado. Percebeu-se que com a utilização de problemas os alunos se interessaram mais, melhorando o rendimento e consequentemente melhorando o aprendizado.

Um aluno da classe trabalhada mostrou seu interesse pelo assunto e trouxe para a aula um problema, o de número 6 do capítulo 3 que ele encontrou em um livro antigo de matemática, e ficou bastante satisfeito por ter a oportunidade de resolvê-lo e por ver que foi publicado neste trabalho.

No que se refere a utilização de problemas na abordagem de assuntos de Ensino Médio, acredito que ela não deve ficar restrita ao tema deste trabalho. Na abordagem de muitos outros assuntos podem ser utilizados problemas e certamente serão temas interessantes para serem aplicados em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BOLDRINI, J. L. ***Álgebra Linear***. 3ª ed. Editora Harbra, 1986.

2. BONGIOVANNI, D.; LEITE, O. R. V. & LAUREANO, J. L. T. ***Matemática e Vida***. 2ª ed. Editora Ática, 1996.

3. GUELLI, O. ***Matemática, uma aventura do pensamento***. 1ª ed. Editora Ática, 1998.

4. IEZZI, G. ***Fundamentos de Matemática Elementar***. 6ª ed. Editora Atual, 1993.

5. IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M. e PÉRIGO, R. ***Matemática, volume único***. 6ª ed. Editora Atual, 1997.

6. IMENES, L. M. ***Matemática***. Vol. 3. 1ª ed. Editora Scipione, 1998.

7. JAKUBOVIC, J. ***Matemática na Medida Certa***. 3ª ed. Editora Scipione, 1995.

8. KOLMAN, B. ***Introdução à Álgebra Linear***. 6ª ed. Editora Prentice-Hall do Brasil, 1998.

9. LAY, D. C. ***Álgebra Linear com Aplicações***. 2ª ed. Livros Técnicos e Científicos Editora, 1999.

10. LEON, S. J. ***Álgebra Linear com Aplicações***. 4ª ed. Livros Técnicos e Científicos Editora, 1998.

11. MACHADO, A. S. ***Matemática na escola do 2º grau***. Vol. 2. 1ª ed. Editora Atual, 1994.

ANEXO 1

Lista de problemas resolvidos por sistemas lineares a nível de Ensino Médio.

1. Num estacionamento há 37 veículos, entre motocicletas e automóveis. Esses veículos têm um total de 128 rodas. Quantas motocicletas há no estacionamento?
   Resposta: 10 motos e 27 automóveis.

2. Fiz uma prova que tinha 20 questões. Em cada questão certa eu ganhava 5 pontos, mas em cada questão errada eu perdia 2 pontos. Terminei fazendo 65 pontos. Quantas questões acertei?
   Resposta: 15.

3. Um professor disse para um aluno:
   — Hoje eu tenho o triplo de sua idade. Mas, 7 anos atrás, eu tinha o quíntuplo de tua idade!
   Quantos anos tem cada um deles?
   Resposta: 14 e 42 anos.

4. Duas canetas e três lapiseiras custam R$ 51,00. Três canetas e duas lapiseiras custam R$ 46,50. Qual é o preço de cada uma?
   Resposta: a caneta custa R$ 7,50 e a lapiseira R$ 12,00.

5. Se um menino faltar, as meninas da classe serão o dobro dos meninos. Se, em vez disso, faltarem 6 meninas, haverá um mesmo número de meninas e meninos na classe. Quantos são os alunos (meninos e meninas) dessa classe?
   Resposta: 22 alunos.

6. Numa balança de dois pratos, 5 moedas de ouro equilibram-se com 7 de prata. Trocando uma moeda de um prato por uma do outro, o prato que antes só tinha moedas de ouro ficará com 16 g a menos que o outro. Quantos gramas tem cada moeda de ouro? E cada moeda de prata?

   Resposta: Cada moeda de ouro pesa 28 g e cada moeda de prata, pesa 20 g.

7. Um triângulo isósceles tem 60 cm de perímetro. Outro triângulo isósceles tem de base o triplo da base do primeiro, e um dos lados iguais é o quádruplo de um dos lados iguais do primeiro triângulo. O perímetro do segundo triângulo é 216 cm. Quais são os comprimentos dos lados de cada triângulo?

   Resposta: 24 cm, 18 cm e 18 cm;
   72 cm, 72 cm e 72 cm.

8. Carolina comprou 9 revistas: 8 tinham o mesmo preço e uma era mais cara. As 8 revistas custaram no total R$ 52,00 a mais que a revista de maior preço. Se Carolina tivesse comprado 6 revistas das mais baratas, teria pago por elas R$ 36,00 a mais do que pagou pela mais cara. Quanto custou cada revista?

   Resposta: R$ 8,00; R$ 12,00.

9. Ana tem o dobro da idade que tinha Marta quando Ana tinha a idade que Marta tem agora. Daqui a três anos Ana terá o triplo da idade que Marta tinha há quatro anos. Digam-se, doutores matemáticos, quantos anos Ana e Marta têm agora?

   Resposta: Ana, 12 anos e Marta, 9 anos.

10. (FUVEST-SP) Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

    a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

    Resposta: Alternativa e: o total de filhos e filhas é 7.

11. (FUVEST-SP) Carlos e sua irmã Andréia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;
- Carlos e Andréia pesam 126 kg; e
- Andréia e Bidu pesam 66 kg.

Podemos afirmar que:

a) Cada um deles pesa menos que 60 kg.
b) Dois deles pesam mais que 60 kg.
c) Andréia é mais pesada dos três.
d) O peso de Andréia é a média aritmética dos pesos de Carlos e Bidu.
e) Carlos é mais pesado que Andréia e Bidu juntos.

Resposta: A alternativa correta é a letra e.

ANEXO 2

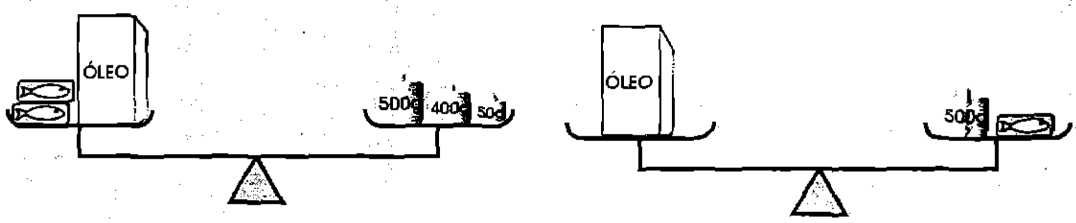
(Cópia Xerox de um livro de 7ª série do ensino fundamental que trata do assunto Sistemas de Equações Lineares)

Quebrando a cabeça

Forme grupo com mais dois ou três colegas para resolver os quebra-cabeças seguintes. ***Vale usar qualquer método de resolução.***

Os quebra-cabeças são estes:

1 *Descubra quantos gramas tem* ***uma lata*** *de sardinhas.*



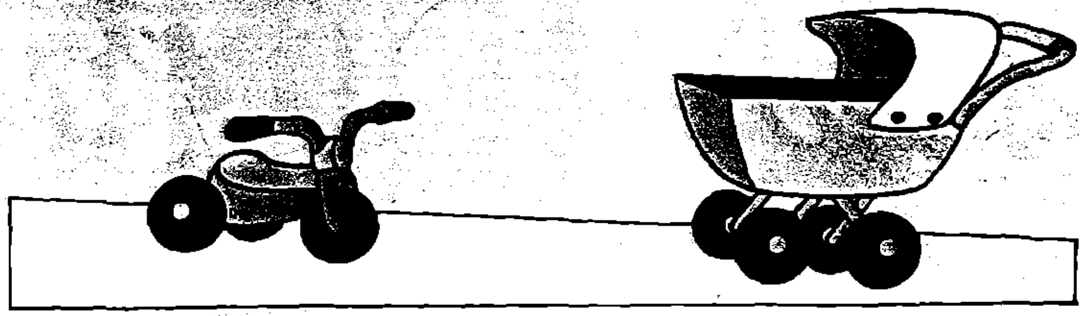
2 *Use o que eles disseram e descubra o preço de um hambúrguer.*

3 *O conteúdo dos cálices enche as xícaras e o copo.*

O conteúdo da xícara e do cálice enche o ***copo.***

Quantos cálices equivalem a um copo?

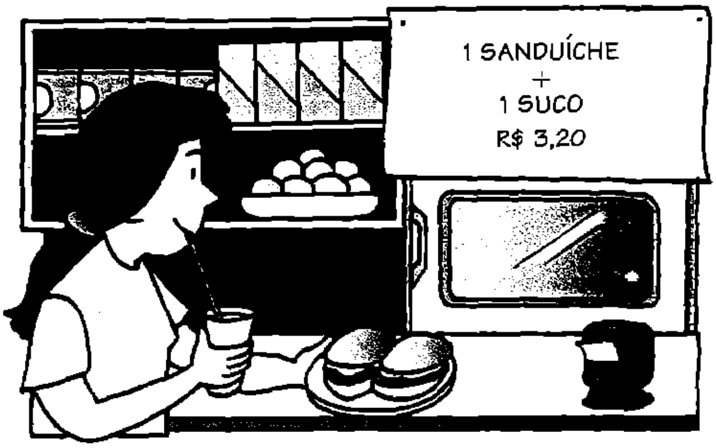
4 *Uma fábrica produz carrinhos de bebê e triciclos.*



Hoje produziram 11 unidades e para montá-las usaram 40 rodas. Quantos triciclos foram produzidos?

Agora, vamos resolver um problema.

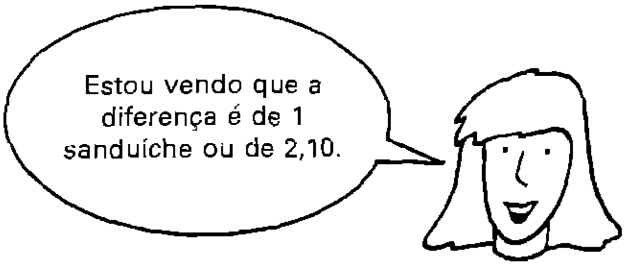
Lúcia comeu 2 sanduíches e tomou apenas um suco. Gastou R$ 5,30. Você consegue descobrir o preço de cada sanduíche?



Veja as informações que temos:

Preço de 2 sanduíches e 1 suco = 5,30
Preço de 1 sanduíche e 1 suco = 3,20

Em outras palavras, subtraindo a segunda sentença da primeira...



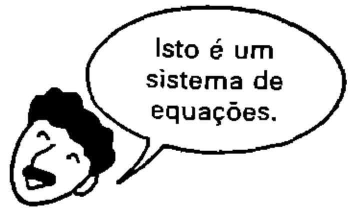
$$\begin{array}{l}
\text{Preço de 2 sanduíches} + \text{Preço de 1 suco} = 5{,}30 \\
\underline{\text{Preço de 1 sanduíche} + \text{Preço de 1 suco} = 3{,}20} \\
\text{Preço de 1 sanduíche} \qquad\qquad\qquad\quad = 2{,}10
\end{array}$$

Vemos que um sanduíche custa R$ 2,10.

O método de resolução apresentado pode ser simplificado usando álgebra. Acompanhe:

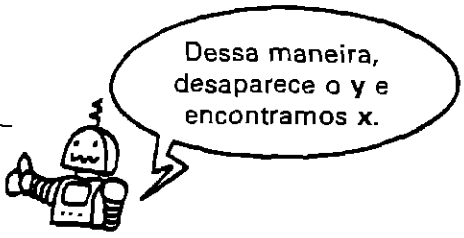
- Chamamos de **x** o preço de um sanduíche e de **y** o preço de um suco.
- Passamos cada informação para uma equação com as incógnitas **x** e **y**.

Preço de 2 sanduíches e 1 suco = 5,30 Preço de 1 sanduíche e 1 suco = 3,20	$\Rightarrow$	$\begin{cases} 2x + y = 5{,}30 \\ x + y = 3{,}20 \end{cases}$



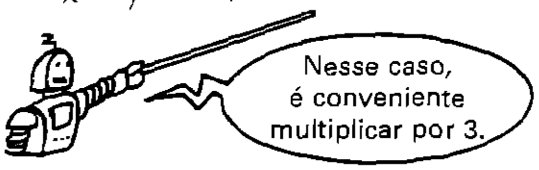
- Para encontrar o valor de **x** no sistema de equações, multiplicamos a segunda equação por -1 e somamos as duas equações.

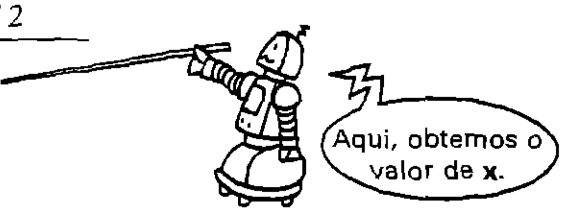
$$\begin{aligned} 2x + y &= 5{,}30 \\ x + y &= 3{,}20 \end{aligned} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{aligned} 2x + y &= 5{,}30 \\ -x - y &= -3{,}20 \\ \hline x &= 2{,}10 \end{aligned}$$



Veja a resolução de um outro sistema de equações:

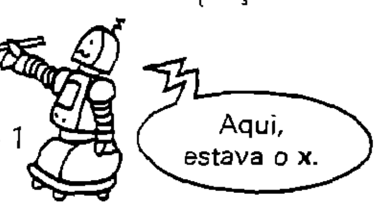
$$\begin{aligned} x + 3y &= 16 \\ x - y &= -4 \end{aligned} \xrightarrow{\times 3} \begin{aligned} x + 3y &= 16 \\ 3x - 3y &= -12 \\ \hline 4x &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$





E agora, vamos encontrar também o valor de **y**. Tomamos uma das equações do sistema e nela colocamos o valor obtido para **x**:

$$x - y = -4 \longrightarrow \begin{aligned} 1 - y &= -4 \\ -y &= -4 - 1 \\ y &= 5 \end{aligned}$$



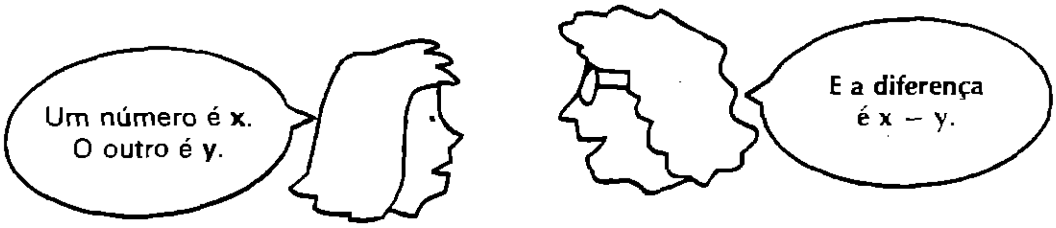
Resolvendo o problema dos sanduíches você aprendeu o que é um sistema de equações. Viu também um método para resolver *sistemas de equações*. É o *método da adição*.

A3B CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- *O que é um sistema de equações?*
- *Para resolver um sistema podemos somar as equações. Mas, para que se consiga achar uma das incógnitas, o que deve acontecer nessa soma?*
- *Compare as soluções do problema do sanduíche: primeiro, a segunda sentença foi subtraída da primeira; depois, usando álgebra, uma equação foi multiplicada por -1 e depois somada à outra.*
  Esses dois procedimentos são a mesma coisa?

Exercícios

4 A soma de dois números é 3. A diferença entre eles é 2.



a) Passe as sentenças acima para um sistema de equações.

b) Quais são esses dois números?

5 Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 58 \\ x + y = 23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = -17 \end{cases}$

6 Resolva o sistema de equações $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 3x - 7y = 6 \end{cases}$.

Resolução:

Devemos eliminar uma das incógnitas. Qual delas?

Para eliminar a incógnita **x** devemos obter coeficientes simétricos de **x** (como 3 e − 3 ou 15 e −15) nas duas equações. Há um método infalível para isso. Observe:

$$\begin{array}{lcl} 5x + 2y = 7 & \xrightarrow{\times 3} & 15x + 6y = 21 \\ 3x - 7y = 6 & \xrightarrow{\times(-5)} & -15x + 35y = -30 \quad + \\ \hline & & 41y = -9 \\ & & y = \dfrac{-9}{41} \end{array}$$

Agora, obteremos o valor de **x**:

$$5x + 2y = 7 \xrightarrow{y = -9/41} 5x + 2 \cdot \left(\frac{-9}{41}\right) = 7$$

$$\times 41: \quad 205x - 18 = 287$$

$$205x = 305$$

$$x = \frac{305}{205}$$

$$x = \frac{61}{41}$$

Conclusão: $x = \dfrac{61}{41}$ e $y = -\dfrac{9}{41}$.

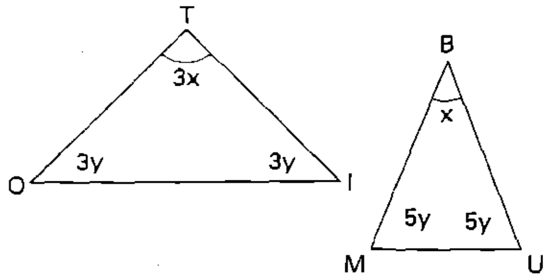
37 Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 3x - 7y = -11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = -11 \\ 3x + 5y = -19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 2y = 22 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

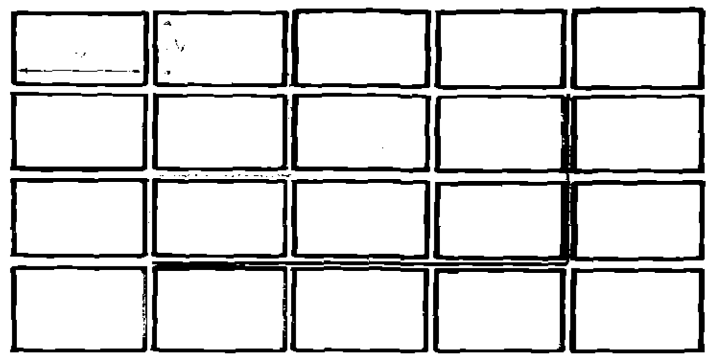
38 Observe os triângulos:

a) A cada triângulo corresponde uma equação em **x** e y. Escreva-as.

b) Resolva o sistema obtido e dê as medidas dos ângulos dos triângulos TIO e BUM.



39 Veja o mapa do bairro.
Todos os quarteirões são retângulos iguais. O caminho verde tem 510 m e o caminho laranja tem 345 m. Qual é o comprimento **x** de cada quarteirão? E a largura y?



40 Invente um sistema de duas equações e duas incógnitas. Mas atenção: a solução do sistema deve ser $x = \frac{1}{3}$ e $y = -2$. Depois, troque seu sistema com o de um colega para que cada um resolva e confira o do outro.

Exercícios para casa

41 Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 4y = 29 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 7y = 13 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 37 \\ x + 4y = 79 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

42 Faça o que é proposto:

a) Quero um sistema de equações cuja solução seja $x = 12$ e $y = -7$. Copie e complete de maneira que isso aconteça:

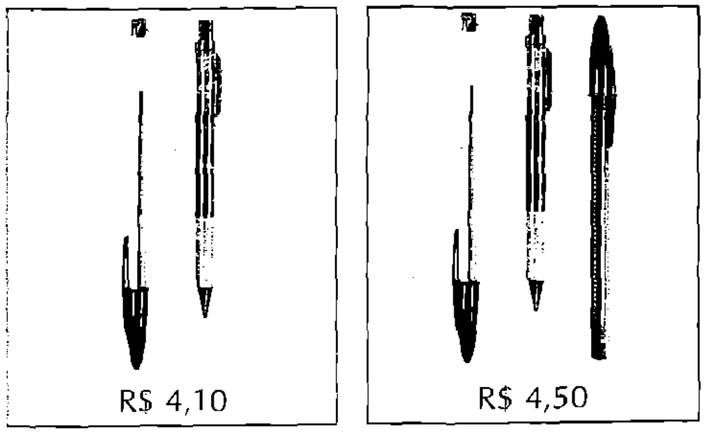
$$2x + y = \square$$
$$3x - 2y = \square$$

b) Agora, a solução deve ser $x = 1{,}75$ e $y = -2{,}5$.
Copie e complete:

$$4x + 2y = \square$$
$$12x - 2y = \square$$

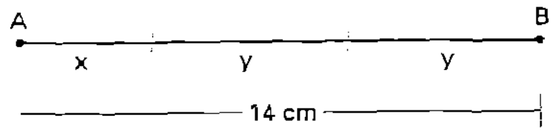
c) Resolva o sistema anterior para conferir.

3 O dono da papelaria oferece estes conjuntos. Mas ele também vende a caneta ou a lapiseira separadamente, *sem acréscimo*. Qual é o preço de cada uma?

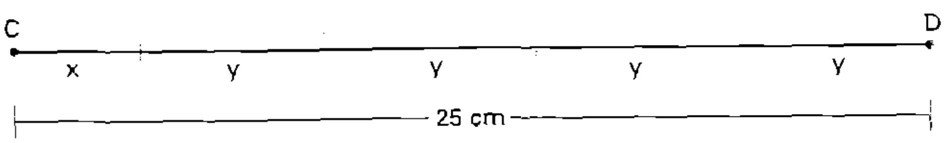


4 Faça o que é pedido:

a) *Escreva a equação correspondente ao comprimento AB:*



b) Escreva a equação correspondente ao comprimento CD:



c) Quantos centímetros tem **x**? E **y**?

5 Leia as informações no quadro:

a) Apresente dois possíveis valores de **x** e de **y**, de acordo com as informações acima.

b)

Escreva o sistema de equações citado pelo menino.

c) *Descubra os valores de* **x** *e de* **y**.

46 Tenho moedas de 10 e de 50 centavos, num total de 13 moedas, perfazendo 410 centavos. Quantas são as moedas de 10? E as de 50?

47 Veja este sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 5 = y + 10 & \text{(I)} \\ y - 3 = x - 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Antes de somar as equações, é preciso organizá-las:

$\boxed{\text{I}}$

$$\begin{aligned} &2x + 5 = y + 10 \\ -y \quad &\downarrow \quad -y \\ &2x - y + 5 = 10 \\ -5 \quad &\downarrow \quad -5 \\ &2x - y = 5 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{II}}$

$$\begin{aligned} &y - 3 = x - 4 \\ -x \quad &\downarrow \quad -x \\ &-x + y - 3 = -4 \\ -3 \quad &\downarrow \quad +3 \\ &-x + y = -1 \end{aligned}$$

a) Agora, resolva o sistema de equações dado.

b) Organize as equações e resolva mais este:

$$\begin{cases} 2x + 4 = y \\ -7 + y = -4x \end{cases}$$

48 Dê a solução dos sistemas:

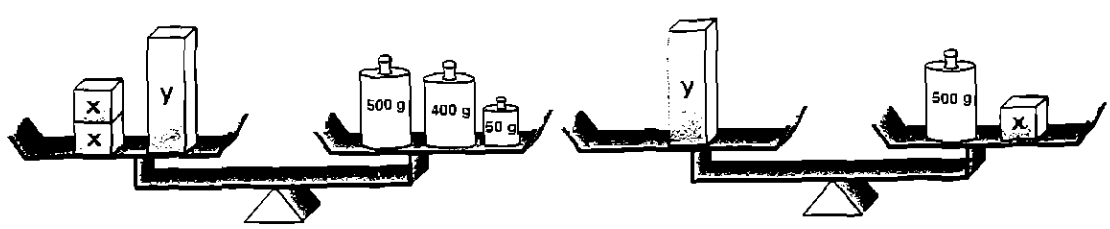
a) $\begin{cases} x + 2y - 2x - 5 = -4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 4y - 4 = 0 \\ 8y - x = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \\ x + y = 45 \end{cases}$

49 John possuía x dólares e Mary possuía y. A soma dessas quantias era 111 dólares. Depois, John ganhou 20 e Mary gastou 20. Aí, ficaram com quantias iguais. Quanto possuía cada um no início da história?

MAIS SOBRE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

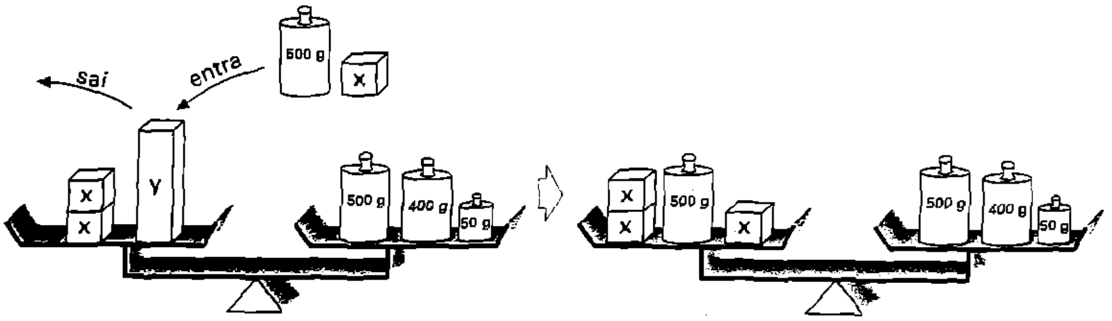


Qual é o valor do peso **x**?

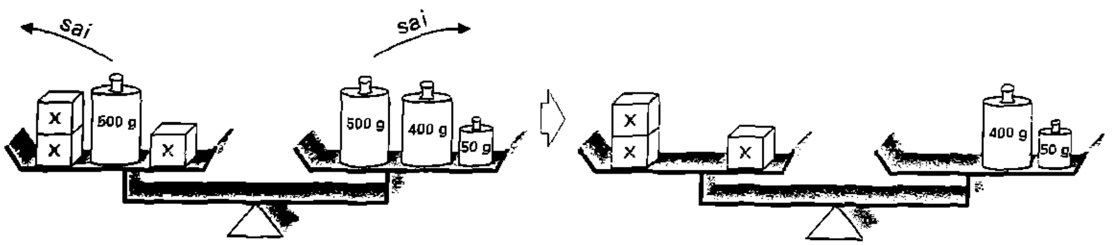
Vamos resolver o quebra-cabeça:

Observe a pesagem da direita. Note que **y** equivale a **500 g mais x**. Por isso, fazemos assim:

Primeiro, uma substituição.



Depois, uma simplificação.

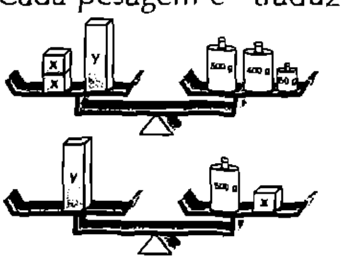


O restante é simples: se $3x = 450\,g$, então temos:

$$x = \frac{450}{3}\,g = 150\,g$$

A resolução que fizemos também pode ser explicada usando álgebra. Acompanhe:

Cada pesagem é "traduzida" para uma equação.



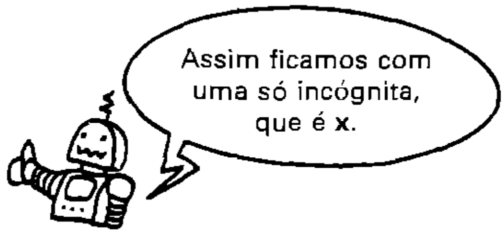
$$\longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 950 & \text{(I)} \\ \\ y = 500 + x & \text{(II)} \end{cases}$$

Na equação (I) substituímos y pela expressão 500 + x, obtida na equação (II):

$$\begin{aligned} 2x + y &= 950 \\ 2x + 500 + x &= 950 \end{aligned}$$

Resolvemos a equação obtida:

$$\begin{aligned} 2x + 500 + x &= 950 \\ 3x + 500 &= 950 \\ 3x &= 450 \\ x &= 150 \end{aligned}$$

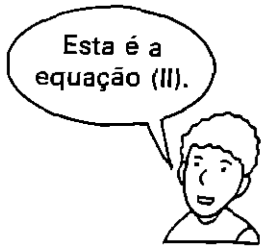


- Se for necessário podemos ainda obter o valor de **y**:

$y = 500 + x$

$y = 500 + 150$

$y = 650$



Resolvendo o quebra-cabeça, voltamos a usar um sistema de equações. E você viu um novo método para resolver os sistemas: o *método da substituição*.

A3B — CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- *Como é que se resolve um sistema por substituição?*
- *Qualquer sistema pode ser resolvido por substituição?*
- *E o método da adição? Quem pode explicar?*
- *Veja o sistema:*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

É mais rápido resolvê-lo por adição ou por substituição?

- *Veja o sistema:*

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ x + 3y = 17 \end{cases}$$

É mais rápido resolvê-lo por adição ou por substituição?

Exercícios

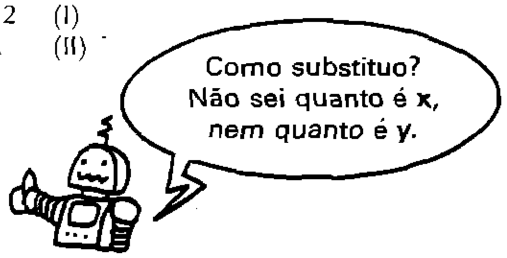
50 Resolva os sistemas usando o método da substituição:

a) $\begin{cases} y = x + 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 4y \\ x + 4y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = y \\ 7(x + 1) + 7y = 17 \end{cases}$

51 Resolva por substituição $\begin{cases} 3x + 2y = 12 & \text{(I)} \\ y - 17 = 4x & \text{(II)} \end{cases}$

RESOLVIDO

Resolução:



Na equação (II), calculamos **y** em função de **x**:

$y - 17 = 4x$

$y = 17 + 4x$

E, na equação (I), substituímos **y** por $17 + 4x$.

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &= 12 \\
3x + 2(17 + 4x) &= 12 \\
3x + 34 + 8x &= 12 \\
11x &= 12 - 34 \\
11x &= -22 \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

Finalmente, calculamos **y**:

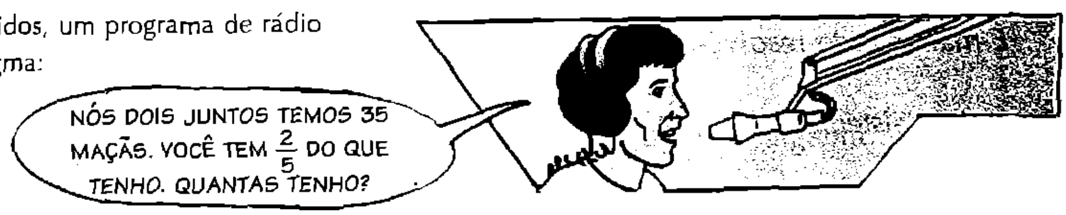
$$
\begin{aligned}
y &= 17 + 4x \\
y &= 17 - 4 \cdot (-2) \\
y &= 17 - 8 \\
y &= 9
\end{aligned}
$$

Logo, $x = -2$ e $y = 9$.

2 Resolva usando o método da substituição:

a) $\begin{cases} x + y = 42 \\ x + 2y = 64 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y = -55 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x = y - 2 \\ 2(x - 1) = y - x \end{cases}$

3 Nos Estados Unidos, um programa de rádio propôs este *enigma*:



Quem resolvesse o enigma ganharia 5 dólares, mas ninguém conseguiu. Veja se você consegue resolvê-lo, mesmo sem ter prêmio algum.

4 Perguntei a idade de minha professora de Matemática. Ela contou, e contou também a idade da filha, mas disse isso de maneira especial:

– A soma de minha idade com a de minha filha é 44 anos. Dois anos atrás, eu tinha o triplo da idade dela.

a) "Traduza" a primeira frase da professora por uma equação em **x** e **y**.

b) Faça o mesmo com a segunda frase. Note que *dois anos atrás* a *idade da professora* era $x - 2$ anos!

c) Resolva o sistema obtido e dê a idade da professora e da filha.

Exercícios para casa

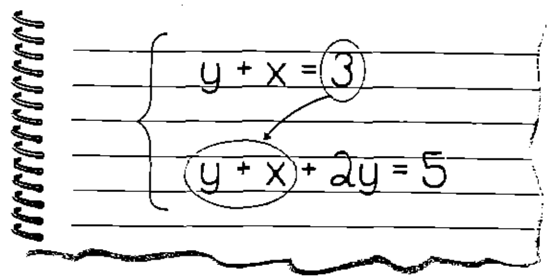
5 Resolva pelo método da substituição:

a) $\begin{cases} x = y + 1 \\ x - 2y = 5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ x + 2y = 15 \end{cases}$

56 Continue usando o método da substituição:

a) $\begin{cases} x + y = \dfrac{5}{6} \\ x = y + \dfrac{1}{6} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - (y + 5) = 3x + 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x = 2y + 5 \\ 2x - 3y = -55 \end{cases}$

57 Ao resolver um sistema de equações, Lucília percebeu uma substituição especial. Veja, ao lado, o que ela anotou:
Resolva o sistema, aproveitando a idéia de Lucília.



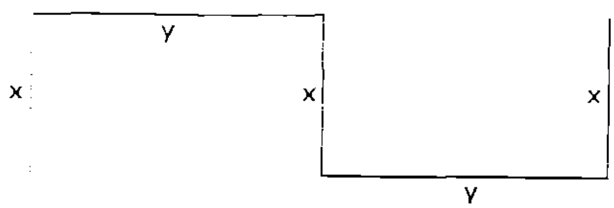
58 Resolva os sistemas de equações pelo método mais conveniente:

a) $\begin{cases} 3x + 55y = 12 \\ 9x - 55y = -8 \end{cases}$

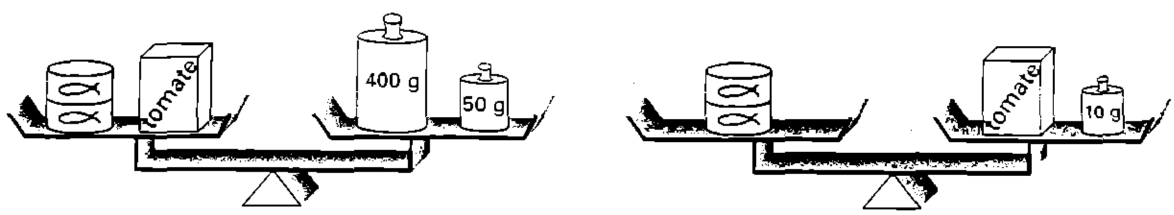
b) $\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 3y + x = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x - 4) - 5 = 3y - 2 \\ x = \dfrac{y}{2} \end{cases}$

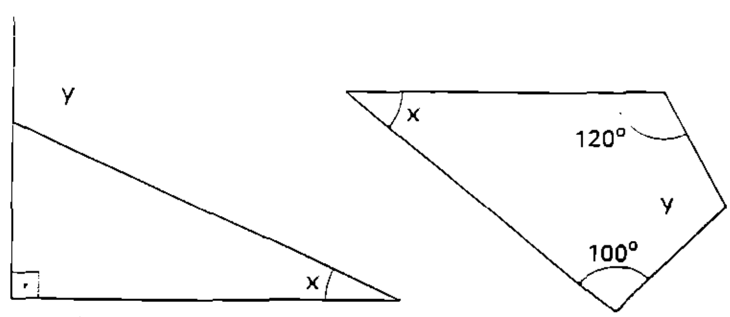
59 O caminho vermelho tem 8,6 cm e o azul tem 11,2 cm.
Quanto mede **x**? E y?



60 Descubra o peso de cada lata de atum e da caixa de molho de tomate:



61 Descubra as medidas **x** e **y**. Lembre-se do que você já sabe sobre ângulos de polígonos.



2 Leia as informações:

Martinha é muito jovem para entender os cálculos do irmão, mas você não é. Quantos anos tem cada um?

PROBLEMAS

A fábrica de balas Toft lançou dois produtos:

Mas as balas de leite, por serem muito caras, não tiveram saída. Para não erder a produção, o dono da fábrica resolveu lançar pacotes misturando balas de ite e de coco. Assim, o preço não seria tão alto.

Para resolver esse problema, o dono da fábrica e sua secretária chamaram lguém que entendesse de Matemática. Veja a solução apresentada:

alas de leite

reço de uma bala: $\frac{6,00}{40} = 0,15$

balas custam $0,15x$

Balas de coco

Preço de uma bala: $\frac{2,40}{40} = 0,06$

y balas custam $0,06y$

Pacote misto

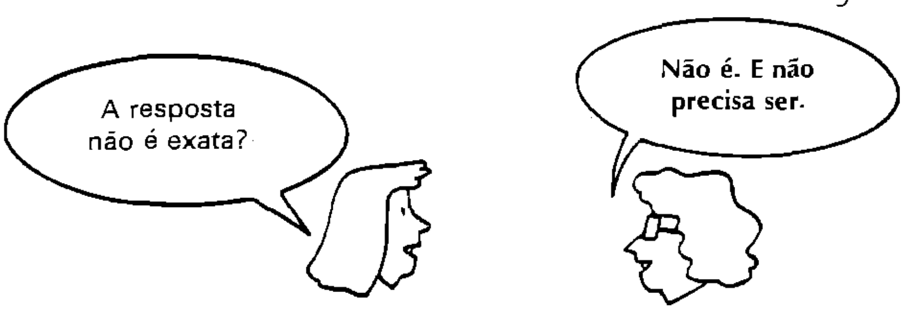
custo: $0{,}15x + 0{,}06y = 3{,}50$

balas: $x + y = 40$

Resolução do sistema de equações:

$$\begin{cases} 0{,}15x + 0{,}06y = 3{,}50 \\ x + y = 40 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 100} \\ \xrightarrow{\times(-6)} \end{array} \begin{cases} 15x + 6y = 350 \\ -6x - 6y = -240 \end{cases}$$

$$9x = 110 \quad \text{donde} \quad x = \frac{110}{9} = 12{,}2\ldots$$



Conclusão: Cada pacote deve ter 12 balas de leite e $40 - 12 = 28$ balas de coco.

Para o pacote custar exatamente R\$ 3,50, ele deve ter 12,2... balas de leite. Como isso não é possível, o pacote vai ter só 12 dessas balas e custar R\$ 3,50 do mesmo jeito.

Você viu como resolver o problema das balas usando um sistema de equações. Problemas desse tipo são muito comuns. Por isso, procure entender bem o método de resolução.

A3B CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- *Por que a fábrica de balas Toft resolveu fazer pacotes misturando balas de leite e de coco?*
- *Colocando 12 balas de leite no pacote, o preço será exatamente R\$ 3,50? Vendendo por R\$ 3,50, a fábrica leva vantagem ou não?*
- *Na história das balas há um tipo de problema que costuma ser chamado de "problema sobre misturas". Por que esse nome?*

Exercícios

63 É um teste muito especial:

- são 40 questões;
- para cada questão certa, o aluno **ganha** 5 pontos;
- para cada questão errada, o aluno **perde** 2 pontos.

a) Quantos pontos faz quem acerta 35 e erra 5 questões?
b) Quantos pontos faz quem acerta **x** questões e erra **y**?
c) Malu fez o teste e obteve 109 pontos. Escreva o sistema de equações correspondente ao que ela obteve.
d) Resolva o sistema e diga quantas questões acertou e quantas errou.

64 No zoológico há cisnes e girafas. São 96 cabeças e 242 patas. Quantos são os cisnes? E as girafas?
Sugestão: considere **x** cisnes e **y** girafas. Depois, pense: quantas patas têm os **x** cisnes? E as **y** girafas?

65 Misturando álcool, que custava 60 centavos por litro, e gasolina, que custava 80 centavos por litro, produziram-se 100 litros de um combustível cujo preço era 65 centavos por litro. Quantos litros de álcool havia na mistura?

66 Resolva: $\begin{cases} 3x + 5y = 4y + x + 3 \\ \dfrac{x+y}{2} - 1 = -\dfrac{x}{4} \end{cases}$.

Resolução:

Passo 1: vamos reduzir a primeira equação:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 4y + x + 3 \\ &\downarrow {\scriptstyle -x} \\ 2x + 5y &= 4y + 3 \\ &\downarrow {\scriptstyle -4y} \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

Passo 2: vamos reduzir a outra equação:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} - 1 &= -\frac{x}{4} \\ &\downarrow {\scriptstyle \times 4} \\ 2x + 2y - 4 &= -x \\ &\downarrow {\scriptstyle +x+4} \\ 3x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Passo 3: adição ou substituição? Aqui, adição é melhor:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \xrightarrow{x(-2)} -4x - 2y = -6 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -4x - 2y = -6 \\ +\quad 3x + 2y = 4 \\ \hline -x = -2 \\ x = 2 \end{array}$$

Passo 4: cálculo de y:

Se $2x + y = 3$, então $4 + y = 3$

$y = -1$

Solução: $x = 2$ e $y = -1$.

67 Resolva:

a) $\begin{cases} 2x + \frac{y}{3} = 10 - y + 2 \\ \frac{y}{2} = \frac{7 - x}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3y}{2} + 5x = 4x + y - 6 \\ 1 - \frac{y + x}{2} = \frac{x}{4} \end{cases}$

68 Um número natural de dois algarismos pode ser representado assim: $10x + y$.

x dezenas y unidades

Esse número, menos o número que se obtém trocando a ordem dos algarismos, vai dar 45. Descubra qual é o número, sabendo que a soma de seus algarismos é 11.

69 Invente um problema para ser resolvido por um sistema de duas equações e duas incógnitas. Pode ser parecido (mas não igual!) com um problema deste capítulo. Depois, você troca o seu problema com o de um colega e cada um resolve o do outro. Para correção, destroquem.

Exercícios para casa

70 Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 64y = 5x + 40 \\ 20y = 2x - 40 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y + 5 = 2x \\ 4x + 3y = 2(y - 5) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 10 = y - 10 \\ 2(x - 10) = y \end{cases}$

71 Continue o treino:

a) $\begin{cases} \frac{x + 8}{4} + \frac{y + 9}{3} = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - \frac{x + 8}{4} = y - 8 \\ y = x + 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x = \frac{3 - 5y}{5} - 7 \\ \frac{y}{3} - 2 = x + y \end{cases}$

72 Veja no texto o problema da fábrica de balas Toft. Desejando-se que o pacote misto, com 40 balas, custe cerca de R$ 3,00, quantas balas de cada tipo devem ser colocadas no pacote?

73 Um comerciante compra no exterior vidros de vitaminas de dois tipos. Cada vidro do tipo I custa 10 dólares e, do tipo II, 15 dólares. Se ele fez uma compra de 35 vidros, gastando 400 dólares, quantos vidros de cada tipo comprou?

74 Descubra o número! É um número natural de dois algarismos. O das dezenas é o dobro do algarismo das unidades. Trocando os dois algarismos de lugar e subtraindo o número obtido do primeiro, obtém-se 36.

5 Vamos pensar em números naturais de três algarismos.

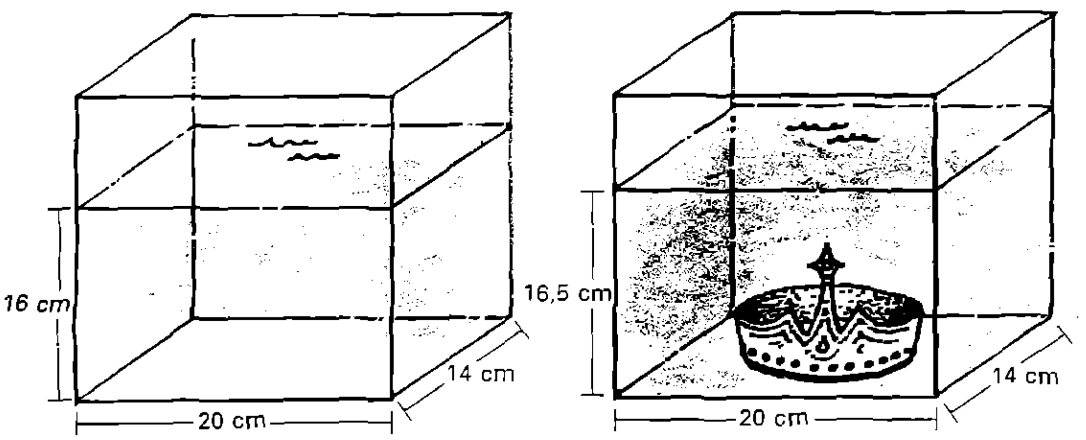
a) Se o número tem x centenas, zero dezena e y unidades, como podemos representá-lo?

b) Imagine o número que você representou escrito ao contrário. Subtraindo esse segundo número do primeiro, você obtém 396. Escreva a equação correspondente a essa informação.

c) Sabendo que $x + y = 10$, descubra qual é o primeiro número representado.

6 Os pesquisadores de um laboratório farmacêutico produziram um comprimido de 0,7 g, misturando x gramas da substância A (a R$ 2,00 o grama) e y gramas da substância B (a R$ 5,00 o grama). Como o preço do comprimido era muito alto, o laboratório resolveu modificá-lo, mesmo prejudicando sua qualidade. Os pesquisadores aumentaram 0,3 g da substância A e diminuíram 0,3 g da substância B, obtendo o preço de R$ 2,00 a unidade. Quais eram os valores de x e de y no comprimido original? Quanto ele custava?

7 Arquimedes foi um brilhante inventor e matemático grego que viveu antes de Cristo. Conta-se que, certa vez, ele recebeu um pedido de um rei. Este queria saber se sua coroa era realmente de ouro puro. Só que para responder à questão era proibido danificar a coroa. Arquimedes mediu o volume da coroa usando um recurso em que ninguém tinha pensado até então. Ele mergulhou a coroa num tanque com água. Imagine que tenha sido assim:



Depois, Arquimedes verificou que a coroa pesava 2 kg. Sabendo que o volume de 1 kg de ouro é 50 cm^3, ele pôde solucionar a dúvida do rei.

a) Examine as figuras e determine o volume da coroa.

b) Pode essa coroa ser de ouro maciço? Por quê?

c) Suponha que essa coroa seja feita de ouro e prata. O volume de 1 kg de prata é 100 cm^3. O de 1 kg de ouro, você já sabe. Com essas informações, descubra quantos quilogramas de prata e quantos de ouro formam a coroa.

8 Criminosos seqüestraram a cadelinha de uma atriz de TV e exigiram um resgate de 9 450 reais, que deveria ser pago unicamente com notas de 100 e de 50 reais, num total de 120 notas.

a) Quantas notas de cada tipo os seqüestradores pediram?

b) As quantidades de notas pedidas visavam permitir que os criminosos dividissem igualmente cada tipo de nota. Sabendo disso, você é capaz de descobrir quantos criminosos havia?