

Notas do Minicurso: Aplicação dos modelos matemáticos no controle de populações.

M. Rafikov

Departamento de Física, Estatística e Matemática,
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande
do Sul – UNIJUI, CP 560, CEP 98700-000, Ijuí, RS, Brasil.
e-mail: rafikov@unijui.tche.br

Resumo. Na primeira parte do minicurso são apresentados e analisados os modelos populacionais de uma espécie tais como modelos de Malthus, Verhulst, entre outros. Na segunda parte são apresentados e analisados os modelos de duas espécies: modelos clássico Lotka – Volterra, competição entre espécies, presa – predador com a resposta funcional, entre outros. Na terceira parte são consideradas as aplicações de modelos populacionais no controle de populações. São formulados os problemas da maximização da safra e do controle ótimo de pragas. Na quarta parte são discutidas a estabilidade, oscilações e caos em dinâmica populacional de muitas espécies. Na última parte são feitas conclusões e discutidos os problemas populacionais que ainda esperam a sua formulação matemática e resolução.

1. Introdução

O estudo matemático de dinâmica de populações surgiu em 1798, quando foi publicado o artigo “An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society” do economista e demógrafo britânico Thomas Robert Malthus. Seu trabalho previa um crescimento em progressão geométrica para a população e em progressão aritmética para os meios de sobrevivência, porém Malthus não considerou em seus modelos que vivemos em um sistema ecológico fechado e por isso, mais cedo ou mais tarde, toda a população seria forçada a encontrar limitações de alimento, água, ar ou espaço físico e por isso, manteria-se estável em um limite máximo de sobrevivência. Apesar disso, seu trabalho serviu como um alerta às autoridades e a população em geral sobre o problema que poderia ocorrer se as taxas de natalidade não fossem controladas, ou seja, não houvesse alimento suficiente para toda a população, resultando em guerra, fome e miséria. Um pouco mais tarde, por volta de 1838, a limitação dos recursos foi estudada por Pierre Verhulst, a pedido do governo da Bélgica que estava preocupado com o crescimento populacional. Verhulst incorporou essa limitação ao modelo de Malthus e apresentou a equação do crescimento populacional [28]. A dinâmica populacional só tornou-se mais conhecida na década 20 do século XX, interessando a muitos cientistas, entre eles o químico Lotka [16] e o matemático Volterra [29], que focalizaram a interação entre duas espécies num modelo que hoje é chamado de Lotka – Volterra. Este modelo foi aperfeiçoado por vários cientistas, entre eles Gause [10], Holling [14], Rosenzweig, MacArthur [22], entre outros. Nos últimos anos surgiu um grande número de modelos populacionais, aplicados às áreas de biologia, ecologia, epidemiologia, imunologia, genética, bioquímica, engenharias biomédica e sanitária, entre outras. Estes modelos descrevem a dinâmica de populações cujos indivíduos podem ser moléculas bioquímicas, bactérias, neurônios, células, insetos, indivíduos infectados, colônias de formigas ou abelhas, etc.

2. Modelos matemáticos de populações de uma espécie

2.1. Modelo de Malthus

Malthus descreveu o crescimento populacional através da seguinte equação:

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (2.1)$$

onde r é a taxa de crescimento da população N .

Solução: $N(t) = N(0)e^{rt}$, onde r pode ser encontrado através das formulas:

se $k > 0$ $k = \frac{\ln 2}{T_2}$, onde T_2 é tempo durante que a população se duplica,

se $k < 0$ $k = \frac{-\ln \frac{1}{2}}{T_1}$, onde T_1 é tempo durante que a população se reduz até metade

(meia-vida).

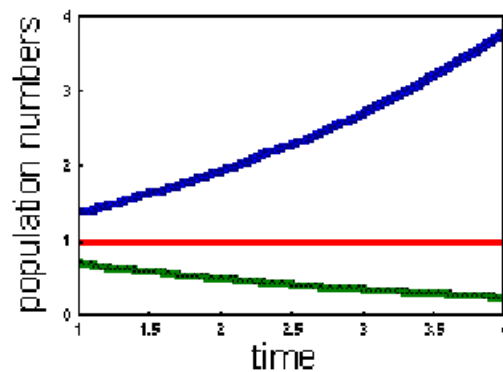


Fig.1. Soluções do modelo de Malthus

2.2. Modelo de Verhulst (modelo logístico)

Verhulst apresentou a seguinte equação como uma descrição do crescimento populacional:

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K} \right) N \quad (2.2)$$

onde K é o nível de saturação da população. Nesse caso a população não ultrapassa o limite K .

Solução: $N(t) = \frac{N(0)K}{N(0) + [K - N(0)]e^{-rt}}$, onde r pode ser encontrado através da regressão não linear.

O gráfico é curva sigmoidal.

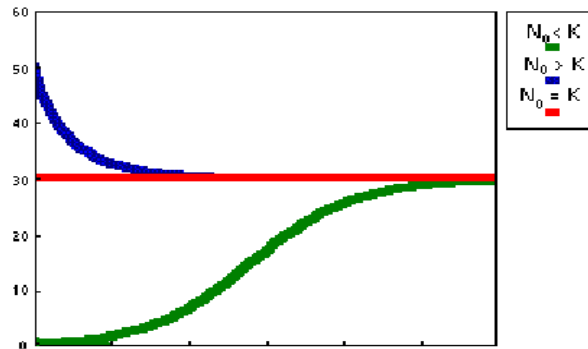


Fig.2. Soluções do modelo de Verhulst

2.3. Exemplos de aplicações

Modelo de Malthus: crescimento bacteriano na cultura, crescimento de populações de pragas na ausência de inimigos naturais [9].

Modelo de Verhulst: crescimento de populações de vários países, crescimento de aguapés [15], crescimento de células de levedura durante fermentação [9].

3. Modelos matemáticos de populações de duas espécies

3.1. Modelo clássico de Lotka - Volterra

Lotka e Volterra modelaram a interação entre duas espécies, onde a primeira (presa) dispõe de alimento em abundância e a segunda espécie (predador) alimenta-se da primeira. Este modelo do tipo presa-predador apresenta-se na seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - \mathbf{a}NP \\ \frac{dP}{dt} = -bP + \mathbf{b}NP \end{cases} \quad (3.1)$$

onde N e P representam as populações de presas e predadores, respectivamente; a representa a taxa de crescimento das presas, b a taxa de mortalidade dos predadores, \mathbf{a} e \mathbf{b} representam as medidas de interação entre as duas espécies.

Pontos críticos são: $(0,0)$ e $(\frac{b}{\mathbf{b}}, \frac{a}{\mathbf{a}})$. O primeiro ponto é instável e o segundo é estável.

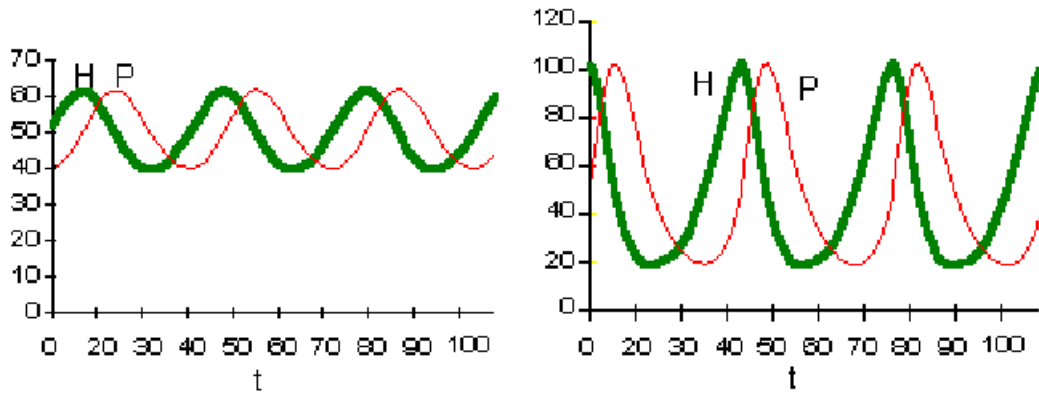


Fig.3. Soluções do modelo Lotka – Volterra para condições iniciais diferentes

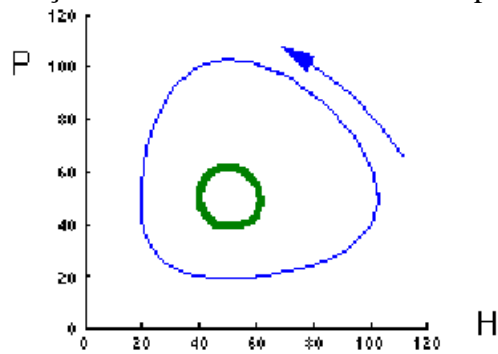


Fig.4. Trajetórias fechadas do diagrama de fase

Um modelo de pesca:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - aNP - cN \\ \frac{dP}{dt} = -bP + bNP - eP \end{cases} \quad (3.2)$$

Pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} N^* = \frac{b+e}{b} \\ P^* = \frac{a-c}{a} \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2. Modelo de Lotka – Volterra com competição entre presas

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - gN^2 - aNP \\ \frac{dP}{dt} = -bP + bNP \end{cases} \quad (3.4)$$

onde g e d são os coeficientes positivos que representam a competição intraespecífica de populações de presas e predadores, respectivamente.

3.3. Modelos “realísticos”

Para vários sistemas do tipo presa – predador o modelo clássico de Lotka – Volterra não é aplicável pois descreve somente oscilações periódicas. Os modelos presa – predador com dinâmica mais rica Murrey chamou “realísticos” [17]. Alguns exemplos de tais sistemas são:

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = H f(H, P) \\ \frac{dP}{dt} = P g(H, P) \end{cases} \quad (3.5)$$

onde

$$f(H, P) = r\left(1 - \frac{H}{K}\right) - PR(H), \quad g(H, P) = k\left(1 - \frac{hP}{H}\right) \text{ ou } g(H, P) = -d + bR(H),$$

$$R(H) = \frac{A}{H+B}, \quad R(H) = \frac{AH}{H^2+B^2}, \quad R(H) = \frac{A(1-e^{-aH})}{H}.$$

Geralmente são considerados 3 tipos da resposta funcional $H_a = HR(H)$:

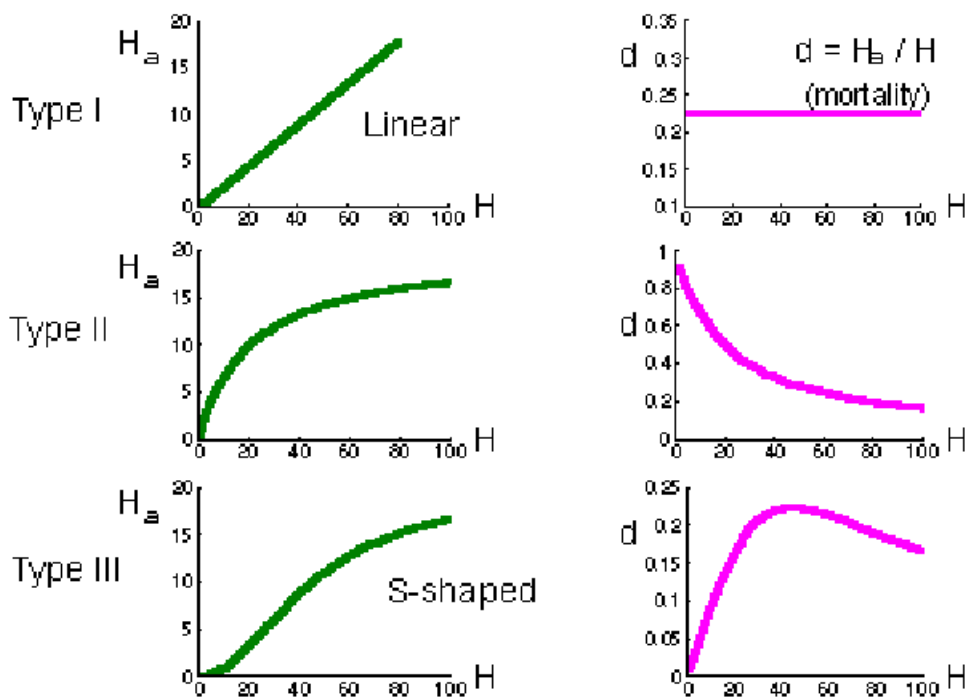


Fig.5. Tipos da resposta do predador à densidade de presas

Os gráficos de soluções do modelo presa – predador com a resposta funcional do tipo II [14]

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = H \left(1 - \frac{H}{K} - \frac{AP}{H+B} \right) \\ \frac{dP}{dt} = P k \left(1 - \frac{hP}{H} \right) \end{cases}$$

estão nas Figuras 6-8.

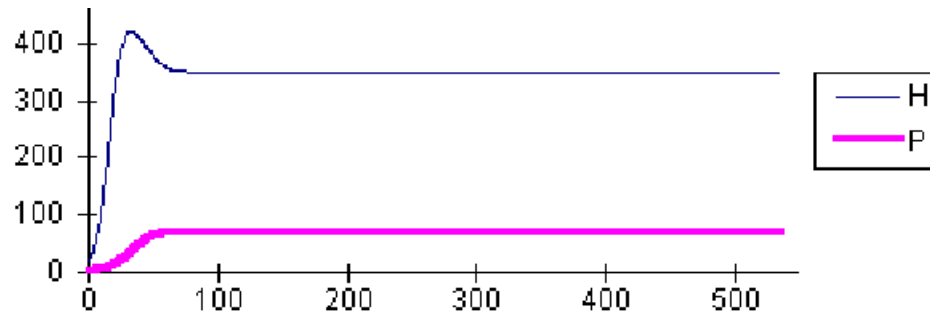


Fig.6. Solução sem oscilações

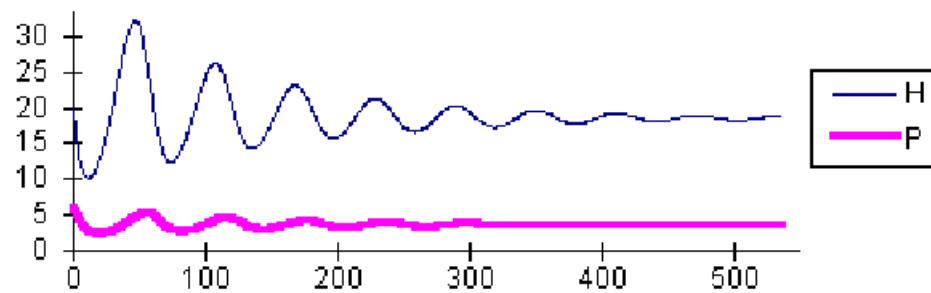


Fig.7. Solução com oscilações

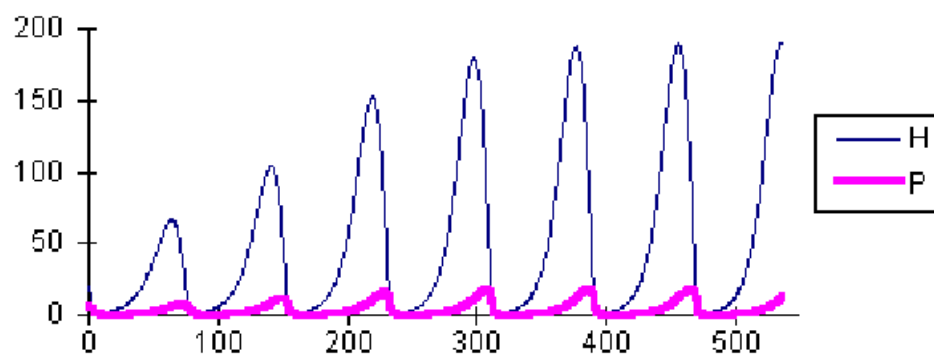


Fig.8. Solução com ciclo limite

Estabilidade local e global de sistemas presa predador. Funções de Lyapunov.

4. Controle de populações

4.1. Controle de crescimento de aguapés

O aguapé é uma planta aquática originária da região tropical da América Central, sendo hoje distribuída por mais de 50 países do mundo. Devido ao seu grande potencial de proliferação, sérios problemas operacionais têm sido provocados nos sistemas hídricos onde esta planta foi introduzida, sendo considerada “praga de água”.

A imagem negativa foi alterada pelas várias pesquisas realizadas nos últimos anos, em que ficou demonstrado que há boa perspectiva de utilização do aguapé para remoção de materiais poluidores. Os estudos da relação entre produtividade e remoção de nutrientes na lagoa de aguapé mostraram que a produtividade líquida da biomassa representa o parâmetro mais adequado para avaliar a eficiência de remoção de nutrientes.

Quando o aguapé ultrapassa uma determinada densidade na lagoa, sua taxa de crescimento tende a decrescer e, conseqüentemente, diminuem suas atividades biológicas relacionadas à assimilação de substâncias presentes no meio líquido. Do ponto de vista operacional da lagoa, é necessário efetuar um controle constante da quantidade de aguapé para manter melhor rendimento na eficiência de tratabilidade do sistema. Matematicamente o problema de minimização poluentes pode ser formulado como um problema de safra máxima de plantas de aguapé.

Para modelar o crescimento de uma população de plantas de aguapé foi escolhido o modelo de Verhulst que tem a seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = a x - b x^2 \quad (4.1)$$

onde $x(t)$ densidade de aguapé no momento t , medida em gramas de peso seco por metro quadrado, o coeficiente a caracteriza o crescimento exponencial que acontece na parte inicial do crescimento, b é coeficiente de competição entre plantas de aguapé.

Seja $u(t)$ quantidade de aguapé recolhida no dia t , então a equação diferencial que modela o crescimento de aguapé, admitindo o recolhimento diário de plantas, tem a seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = a(x - u) - b(x - u)^2 - k u \quad (4.2)$$

Como é visto da equação (4.1) a função de controle u entrou nela em forma não linear. Isto permite modelar a influência da retirada de grandes e pequenas quantidades de aguapé nos processos de reprodução e competição entre plantas. A função x tem que satisfazer a seguinte condição inicial:

$$x(0) = x_0 \quad (4.3)$$

Na equação (4.1) o coeficiente k caracteriza a capacidade técnica de recolhimento de aguapés. Quanto maior k tanto mais rápido são recolhidas as plantas da lagoa.

A função do controle u obedece às seguintes limitações:

$$0 \leq u(t) \leq x(t) \quad (4.4)$$

A fim de formular o problema da produtividade máxima da lagoa de aguapé, foi escolhido o critério a ser maximizado em seguinte forma:

$$I = \int_0^T k u(t) dt + x(T), \quad (4.5)$$

onde o primeiro termo considera a quantidade da massa de aguapé recolhida durante o período do funcionamento da lagoa e o segundo termo caracteriza a quantidade máxima de aguapé na lagoa no momento final T .

O problema em questão pode ser formulado como o seguinte problema do controle ótimo: para o sistema (4.2) com condições iniciais (4.3) encontrar a função do controle $u(t)$, $t \in [0, T]$, que satisfaz as limitações (4.4) e que maximiza o funcional (4.5).

Este problema foi resolvido através de aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin [18]. A estratégia ótima do controle de plantas de aguapé que assegura a maximização da massa de plantas é:

$$u(t) = \begin{cases} x - \mathbf{x} & \text{quando } x > \mathbf{x} \\ 0 & \text{quando } x \leq \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.6)$$

onde o valor de \mathbf{x} é determinado através da seguinte fórmula:

$$\mathbf{x} = \frac{a}{2b}$$

O valor $\frac{a}{b}$ é chamado *carrying capacity* e significa a capacidade máxima de crescimento de aguapés. O resultado acima obtido significa que o controle de aguapés tem que ser aplicado quando a quantidade de aguapés supera a metade do valor da capacidade máxima de crescimento de aguapés. A equação que descreve a variação da quantidade de aguapés na lagoa com controle é:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \frac{a^2}{4b} + \frac{ak}{2b} - kx & x(t) \geq \frac{a}{2b} \\ x(a - bx) & x(t) < \frac{a}{2b} \end{cases} \quad (4.7)$$

Para $x(0) \geq \frac{a}{2b}$ a solução da equação (4.7) é:

$$x(t) = (x(0) - \frac{a^2}{4kb} - \frac{a}{2b})e^{-kt} + \frac{a^2}{4kb} + \frac{a}{2b} \quad (4.8)$$

A função (4.8) descreve a variação da quantidade de aguapés na lagoa em cada instante t . Quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, período do funcionamento controlado da lagoa é bastante grande, a função (4.8) tende a um valor constante:

$$x^* = \frac{a^2}{4kb} + \frac{a}{2b} \quad (4.9)$$

A quantidade de aguapés que deve ser recolhida diariamente nessa situação operacional é:

$$u(t) = \frac{a^2}{4kb} \quad (4.10)$$

Para calcular os parâmetros do modelo no controle de aguapés na lagoa, utilizou-se a curva de crescimento de aguapés apresentados por Kawai e Grieco [15], que descreveram a curva de crescimento de aguapés na forma da seguinte função:

$$x(t) = \frac{700}{1 + 5,78 e^{-0,103t}}, \quad (4.11)$$

onde $x(t)$ é a densidade de aguapés medida em g/m^2 e t é o tempo em dias. A função (4.11) é a solução da equação (4.1) sem aplicação do controle. Neste caso, os coeficientes da equação (4.1) são: $a = 0,103$ e $b = 0,000147$. A comparação das curvas mostrando o crescimento natural e o crescimento com aplicação do controle ótimo de aguapés conforme (4.6) é apresentado na Fig.9.

Como é observado na Fig.9, o controle ótimo de aguapés começou no décimo sétimo dia. A quantidade de aguapés foi estabilizada no nível de $368,4 \text{ g/m}^2$ em um período de três dias após do início de aplicação do controle ótimo. Isto significa que a quantidade de aguapés que deve ser recolhida diariamente depois deste período, calculada conforme a fórmula (4.6), é de $u = 18,04 \frac{\text{g}}{\text{m}^2}$ para $k = 1$.

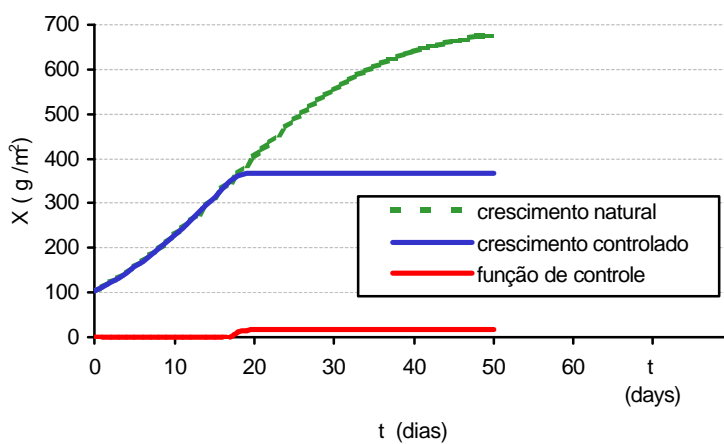


Fig.9. Densidade de aguapés sem aplicação de controle (curva tracejada) e com aplicação de controle (curva cheia).

Então, a utilização da teoria de controle ótimo para este problema determinou a estratégia ótima de tratamento de lagoas de aguapé, ou seja, foram encontradas: a quantidade de plantas, necessária maximizar a remoção de poluentes da lagoa de aguapé, e a estratégia ótima para mantê-la neste nível. Os experimentos, realizados no Centro Nacional de Suínos e Aves - CNPSA da Empresa Brasileira de Pesquisas Agropecuárias - EMBRAPA, Concórdia/SC, Brasil, confirmaram os resultados fornecidos pela modelagem e otimização [7].

4.2. Controle biológico de pragas

Nos últimos anos os agricultores do país queixam-se cada vez mais que o Baculovirus, o inseticida biológico principal contra a lagarta da soja, perdeu a sua capacidade de combater pragas com eficácia. Entre os fatores que causam esta perda de eficácia geralmente são mencionadas condições climáticas, baixa qualidade do Baculovirus, entre outras. Mas o fator principal que causa este fenômeno é surgimento de gerações de pragas resistentes ao vírus. Uma saída neste caso procurar outros inimigos naturais, ou seja, predadores, parasitóides ou patógenos para combater as pragas. Os biólogos e ecologistas há muito tempo estão a procura estes inimigos. Escolha de um inimigo natural exige muitas pesquisas no laboratório e testes no campo

para saber como, quando e em que quantidade fazer aplicação do controle de pragas na lavoura.

Conforme DeBach [8] *controle biológico* é a ação de inimigos naturais (parasitóides, predadores, ou patógenos), mantendo a densidade de população de um outro organismo (praga) abaixo do nível médio que ocorreria na ausência deles. Entende-se por *parasitóide* um inseto que parasita somente os estágios imaturos, matando o hospedeiro durante o seu processo de desenvolvimento, vivendo livre quando adulto.

Van den Bosch et al. [26] definiu controle biológico aplicado como a manipulação de inimigos naturais por homem para controlar pragas. Do ponto de vista ecológico, a espécie é considerada como uma praga se sua densidade de população ultrapassa o nível de danos econômicos. Assim, a premissa de controle biológico é uma redução e estabelecimento da densidade de população de pragas em nível de equilíbrio abaixo do nível de danos econômicos.

Há três tipos principais do controle biológico de pragas: 1) conservação de inimigos naturais; 2) controle biológico clássico; 3) aumento de inimigos naturais. O primeiro tipo acontece quando os humanos são ativamente envolvidos no melhoramento de condições ambientais para favorecer os inimigos naturais. O controle biológico clássico é baseado, em parte, no conhecimento que muitas pragas foram introduzidas na lavoura acidentalmente de outras partes do mundo. Por isso, o termo *controle biológico clássico* refere-se à introdução intencional de organismos exóticos (não nativos a um particular ecossistema ou país) para o controle em longo prazo de uma determinada praga, objetivando reduzir a abundância média da praga e, conseqüentemente, reduzir a chance de prejuízos futuros. Há muitos exemplos de sucesso que usa este tipo de controle, como o complexo de parasitas importados que controlam praga de alfafa. Infelizmente, também há muitos casos onde simplesmente não foram encontrados inimigos naturais exóticos efetivos ou não foram com sucesso estabelecidos na área designada [25]. O terceiro método de controle conta com a possibilidade artificialmente aumentar a população do inimigo natural nativo através da liberação de espécies criados em laboratórios. Os inimigos naturais a ser liberados podem ser da mesma espécie que já existe na lavoura, ou uma outra espécie que tem a eficiência maior que a natural.

Os dois tipos principais de controle biológico, controle clássico e controle de aumento (*augmentation*), exigem a liberação de grandes quantidades de inimigos naturais na lavoura na intenção de que nenhuma praga escape ao ataque. Em muitos casos, esta técnica pode levar a um regime em que ambas as espécies vão para a extinção. Neste caso, as pragas podem recolonizar a lavoura, não havendo então inimigos naturais para combatê-las. Conforme Thomas e Willis [25] menos que 40% de aplicações de controle biológico foram feitas com sucesso.

Modelos matemáticos têm sido bastante utilizados para o estudo de problemas agrícolas, pois com o uso de ferramentas de simulação o sistema meio ambiente – praga – inimigos naturais pode ser melhor compreendido [24]. Isto permite que o pesquisador possa ter uma visão geral do sistema e possa posicionar-se como um “experimentador” do sistema real, operando somente um modelo do sistema, possibilitando uma economia de prejuízos materiais e tempo, quando comparado a experimentos reais. Além disso, pesquisadores da área podem fazer uso de modelos para auxiliar o delineamento de experimentos de campo, através da indicação dos parâmetros a serem observados.

Mais especificamente, a utilização da modelagem matemática aplicada a problemas de controle biológico de pragas permite uma avaliação qualitativa e quantitativa do impacto entre as populações de uma praga e de seus inimigos naturais. Então, a modelagem matemática pode ser usada como ferramenta para projetar sistemas

estáveis do tipo presa-predador ou hospedeiro-parasitóide. Isto pode ser obtido buscando-se um inimigo natural com características tais que forneçam estabilidade ao sistema. A matemática é útil neste caso, pela possibilidade da determinação da região dos parâmetros na qual o sistema é estável. Outra forma em que a modelagem matemática pode ser usada no controle de pragas é na formulação de uma boa estratégia de controle, através da manipulação dinâmica de variáveis de controle do sistema praga-inimigo natural. A modelagem matemática, quando aplicada ao controle biológico de pragas, permite a minimização de custos, riscos ambientais e a realização de previsões, causando um menor impacto ao meio ambiente. Desta forma, os possíveis cenários alternativos resultantes de simulação dos modelos permitem analisar a eficiência do controle biológico no campo.

A visão ecológica que considera um inseto como praga se e somente se a quantidade deste inseto na lavoura causa danos econômicos, pode servir como base para a formulação do problema do controle ótimo de pragas. O controle ótimo de pragas no sistema presa - predador, neste caso, tem a finalidade de manter a população de pragas num nível de equilíbrio abaixo de danos econômicos. A estratégia do controle biológico de pragas tem que satisfazer às seguintes condições importantes:

- i) o ecossistema praga – inimigo natural através do controle biológico deve chegar a um estado de equilíbrio em que a população de pragas se estabilize num nível abaixo de danos econômicos e a população de inimigos naturais se estabilize num certo patamar para controlar o nível de pragas;
- ii) este estado de equilíbrio do ecossistema controlado tem que ser estável;
- iii) o controle biológico de pragas tem que ser econômico no sentido de minimização da quantidade de aplicações no ecossistema.

4.3. Formulação dos problemas do controle ótimo de populações

Consideremos o modelo presa – predador:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= y g(x, y)\end{aligned}\tag{4.12}$$

onde x e y são, respectivamente, as densidades de presas e predadores no instante t ; $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são funções contínuas das variáveis x e y . O sistema (4.12) descreve o desenvolvimento natural do sistema presa – predador sem aplicação de controle.

No ecossistema praga – inimigo natural o controle biológico de pragas implica que, após a sua aplicação, grande quantidade da espécie praga é removida do sistema e grande quantidade da espécie inimigo natural é introduzida no sistema. As pragas retiradas não participam mais do processo reprodutivo, competitivo e de interação. Ao contrário, os inimigos naturais começam imediatamente a participar nos processos de reprodução, competição e interação com as pragas.

Sejam $U(t)$ e $V(t)$, respectivamente, o número de presas retiradas do sistema e o número de predadores introduzidos no sistema no instante t . As equações que descrevem a dinâmica do sistema com a aplicação do controle podem ser escritas na seguinte forma [20],[21]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (x-U)f(x-U, y+V) - k_1U \\ \frac{dy}{dt} &= (y+V)g((x-U, y+V) + k_2V\end{aligned}\quad (4.13)$$

onde k_1 e k_2 são constantes positivas que caracterizam a capacidade técnica de retirada de espécies de população de praga e introdução de espécies de população de inimigos naturais, respectivamente, $U(t)$ e $V(t)$ satisfazem as limitações:

$$\begin{aligned}0 &\leq U \leq x \\ 0 &\leq V\end{aligned}\quad (4.14)$$

Suponha que é desejável manter o nível de pragas abaixo daquele responsável por danos econômicos e ter um baixo custo no uso da variável de controle. Para atingir estes objetivos, é usado o critério de otimização:

$$I = c_1 \left[x(T) + k_1 \int_{t_0}^T U(t) dt \right] + c_2 \left[k_2 \int_{t_0}^T V(t) dt - y(T) \right] \quad (4.15)$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas que caracterizam a influência de cada tipo de controle e t_0 e T são, respectivamente, os momentos inicial e final da aplicação do controle. Minimizando o critério (4.15), estamos minimizando os valores das funções de controle e da população de pragas e maximizando a população de predadores.

O problema do controle ótimo consiste em escolher um programa de controle admissível, que levará o sistema (4.13) do estado inicial

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0 \quad (4.16)$$

para o estado final, tal que o critério (4.15) seja minimizado.

Este problema de otimização de um sistema dinâmico pode ser resolvido através do Princípio do Máximo de Pontryagin [18].

Nos trabalhos [20], [21] foram encontradas as funções de controle na seguinte forma:

$$\begin{aligned}U(t) &= \begin{cases} x - z_1 & \text{quando } x > z_1 \\ 0 & \text{quando } x \leq z_1 \end{cases} \\ V(t) &= \begin{cases} z_2 - y & \text{quando } y < z_2 \\ 0 & \text{quando } y \geq z_2 \end{cases}\end{aligned}\quad (4.17)$$

onde os valores de z_1 e z_2 são encontrados do seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned}c_1 f(z_1, z_2) + c_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} - c_2 z_2 \frac{\partial g}{\partial z_1} &= 0 \\ -c_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} + c_2 g(z_1, z_2) + c_2 z_2 \frac{\partial g}{\partial z_2} &= 0\end{aligned}\quad (4.18)$$

Considerando o modelo Lotka – Volterra com competição intraespecífica, as funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ são:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a - gx - ay \\ g(x, y) &= bx - dy - b \end{aligned}$$

O sistema (4.18) neste caso pode ser escrito:

$$\begin{aligned} c_1(a - az_2 - gz_1) - c_1gz_1 - c_2bz_2 &= 0 \\ c_1az_1 + c_2(-b + bz_1 - dz_2) - c_2dz_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Resolvendo-se (4.19), obtém-se:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{bc_2(c_1a + c_2b) + 2ac_1c_2d}{(c_1a + c_2b)^2 + 4c_1c_2dg} \\ z_2 &= \frac{ac_1(c_1a + c_2b) - 2bc_1c_2g}{(c_1a + c_2b)^2 + 4c_1c_2dg} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para o modelo clássico de Lotka – Volterra $g = 0$ e $d = 0$, nesse caso

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{bc_2}{c_1a + c_2b} \\ z_2 &= \frac{ac_1}{c_1a + c_2b} \end{aligned} \quad (4.21)$$

A estratégia proposta de controle ótimo de pragas foi aplicada para realizar a simulação do controle ótimo na lavoura de soja. Foram considerados as relações presa - predador entre a lagarta da soja (*Anticarsia gematalis*) e seus predadores (*Nabis spp*, *Geocoris*, *Arachnid*, etc.). Os coeficientes do modelo foram identificados em [19].

Na Fig.10 está presente o diagrama de fase da estratégia ótima para várias condições iniciais para os seguintes valores dos parâmetros de modelo $a = 0.216$, $\mathbf{a} = 0.0108$, $b = 0.173$, $\mathbf{b} = 0.0029$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1.78$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $g = 0$, $d = 0$.

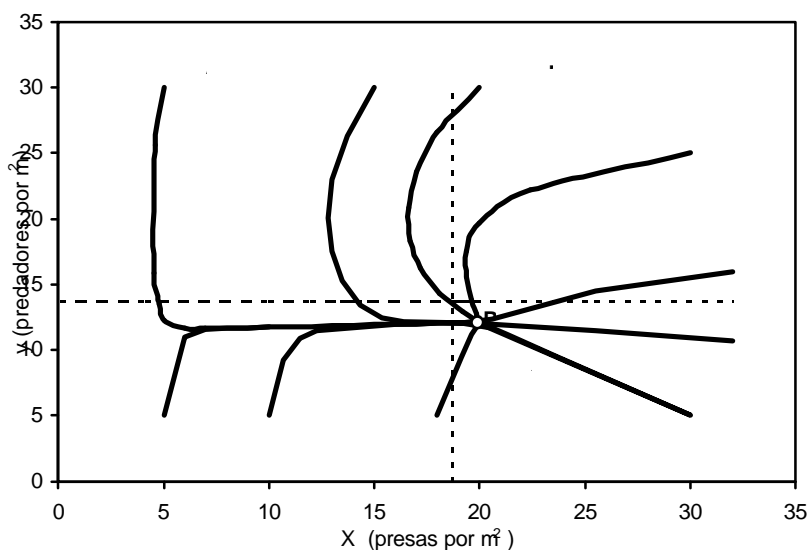


Fig.10. Diagrama de fase do controle ótimo da lagarta da soja

Os valores de c_1 e c_2 foram escolhidas para estabelecer um nível de pragas abaixo do limiar recomendado pela EMBRAPA (a densidade de 20 lagartas da soja grandes (com mais de 1,5 cm) por metro quadrado ou a densidade de 40 lagartas pequenas (de 0,5 à 1,5 cm) por metro quadrado). Densidades abaixo destes valores não causam danos econômicos a lavoura.

As retas $x=x_1$ e $y=x_2$ são as curvas de comutação que dividem o quadrante positivo em quatro partes A , B , C e D . Os valores de $x_1=19.3$ e $x_2=13.5$ foram encontrados da fórmula (4.21).

Se a condição inicial está na parte D , as funções de controle de sistema são $V=x_2 - y$ e $U = 0$, estes valores das funções de controle permanecem até a trajetória de fase interceptar a reta de comutação $x=x_1$. Em ponto de interseção a função de controle U assume a forma $U = x-x_1$, e mantém esta relação até o sistema chegar no ponto de equilíbrio P .

Se a condição inicial está na parte A , o sistema permanece sem controle até a trajetória de fase interceptar a reta de comutação $y=x_2$. Em ponto de interseção a função de controle V torna-se $V= x_2 - y$ e a função $U = 0$, e o sistema passa em D .

Se a condição inicial está na parte B , as funções de controle de sistema são $U = x-x_1$ e $U = 0$. Neste caso existem dois tipos de trajetórias. As trajetórias do primeiro tipo interceptam a reta de comutação $x=x_1$ e o sistema passa na parte A . Outras trajetórias que começam na parte B interceptam a reta de comutação $y=x_2$ e o sistema passa em C , onde as variáveis de controle tornam-se $U = x-x_1$ e $V = x_2 - y$ e mantém-se esta relação até o sistema chegar no ponto de equilíbrio P . Para manter o sistema no ponto de equilíbrio P é preciso atribuir às funções de controle os seguintes valores: $U = 0,67$ e $V = 1,59$. Os gráficos de funções de controle para as condições iniciais $x_0=32$, $y_0=16$ estão na Fig.11.

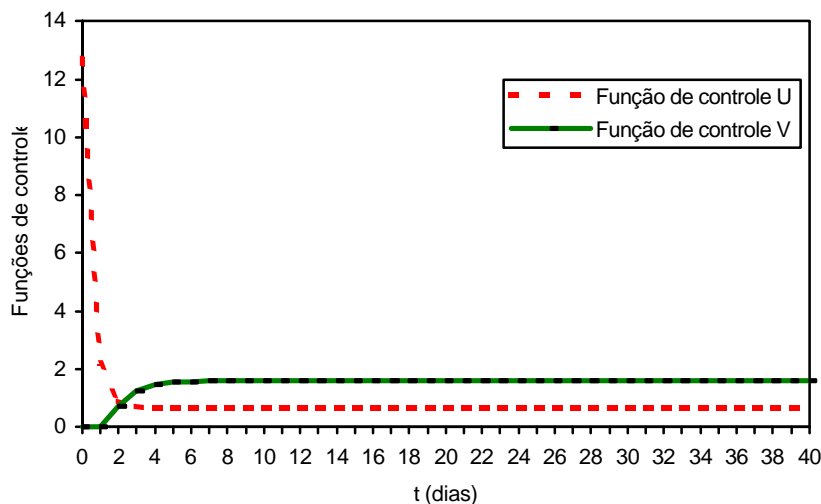


Fig.11. Funções de controle para aplicação do controle para as condições iniciais $x_0=32$, $y_0=16$

Na Fig.12 estão os gráficos de oscilações de população de pragas sem aplicação de controle e estabilização de densidade de população com aplicação de controle.

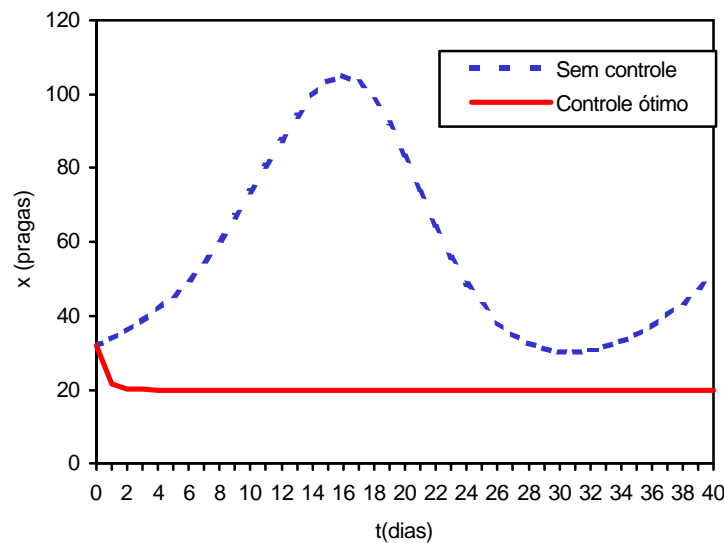


Fig.12. População de praga para as condições iniciais $x_0=32$, $y_0=16$

As simulações realizadas, para vários valores dos parâmetros dos modelos, mostraram que os coeficientes k_1, k_2 não influenciam muito na dinâmica do sistema ao longo prazo., e a alteração dos coeficientes c_1 e c_2 influenciam na dinâmica do sistema, alterando a posição do ponto de equilíbrio.

A análise das funções de controle da Fig.11 e densidades de população de pragas da Fig.12 permite discutir a realização prática do controle biológico ou químico no ecossistema considerado. A curva com controle da Fig.11 mostra uma brusca diminuição da população de pragas e, após o tempo de quase dois dias, a população de pragas chega até o nível desejado. Neste caso a função de controle U pode ser realizada através de aplicação do inseticida biológico ou químico (que atinge somente este tipo de espécie), pois existem normas que regulam o nível da mortalidade das pragas conforme a concentração do inseticida. Depois da aplicação do inseticida, pode ser realizado a introdução de predadores. Existe tecnologia tal que esta introdução possa ser programada conforme o algoritmo acima apresentado.

Um único momento que apresenta dificuldades para sua realização é retirada diária de pragas em pequenas quantidades U (para o exemplo apresentado 0,67 lagartas da soja por metro quadrado) após o segundo dia do controle a fim de manter o sistema no ponto de equilíbrio desejado. Por isso, se o sistema controlado estiver num estado com densidades de pragas próximas do limiar de danos econômicos, é preciso formular e resolver o problema de controle ótimo de pragas, usando somente uma função de controle V , ou seja, introdução de inimigos naturais. Este problema será considerado na próxima subseção.

4.4 Controle ótimo através de introdução de inimigos naturais

O objetivo desta subseção é obter uma estratégia de controle de pragas através de introdução de inimigos naturais, que leve o sistema a um estado de equilíbrio em que a densidade de pragas se estabilize sem causar danos econômicos, e que a

população de inimigos naturais se estabilize em um valor suficiente para controlar as pragas.

O modelo Lotka – Volterra que considera somente a competição entre pragas, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - \mathbf{g}x - \mathbf{a}y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-b + \mathbf{b}x)\end{aligned}\tag{4.22}$$

onde x e y são densidades de presas e predadores respectivamente.

Como já foi mencionado existe um certo limite de densidade de pragas que caracteriza a margem de danos econômicos, ou seja, a partir do qual a lavoura sente a influência negativa das pragas. Esse limite chama-se limiar de danos econômicos que podemos designar \bar{x}_d . Por exemplo, conforme informações da EMBRAPA, a densidade de 20 lagartas de soja grandes (com mais de 1,5 cm) por metro quadrado ou a densidade de 40 lagartas pequenas (de 0,5 à 1,5 cm) por metro quadrado representam um limiar para o valor da densidade. Densidades abaixo deste valor não causam danos econômicos a lavoura, ou seja, neste caso $\bar{x}_d = 20$ ou $\bar{x}_d = 40$ para lagartas de soja grandes ou pequenas, respectivamente. O objetivo principal do controle biológico é estabelecer o nível de equilíbrio do sistema abaixo de danos econômicos, ou seja, deve-se estabelecer o equilíbrio num nível $x_d < \bar{x}_d$.

Harrison [13] mostrou que a condição $\mathbf{g} > 0$ é suficiente para a estabilidade global. Mesmo sendo sempre estável, o modelo (4.22) pode possuir o ponto de equilíbrio do sistema a níveis muito altos. Neste caso, há necessidade de aplicar o controle. Na seção anterior foi considerado o controle ótimo de pragas que levou o ecossistema ao estado próximo do limiar de danos econômicos, usando duas funções de controle. Como já foi discutido, esta estratégia de controle pode ser realizada durante os primeiros dias de aplicação de controle quando acontece a retirada de pragas em grandes quantidades, o que pode ser realizado através do inseticida biológico ou químico. A retirada diária de pequenas quantidades de pragas nas proximidades do ponto de equilíbrio desejado nas lavouras de grande porte é inviável. Por isso, formularemos um problema de controle de pragas através de uma função do controle que caracteriza a introdução de inimigos naturais no ecossistema controlado.

O modelo que descreve a dinâmica do sistema com uma função de controle pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - \mathbf{g}x - \mathbf{a}y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-b + \mathbf{b}x) + U\end{aligned}\tag{4.23}$$

A função de controle U consiste de duas partes e tem a seguinte forma: $U = \mathbf{d}y + u$, onde a parte $\mathbf{d}y$ representa a introdução de inimigos naturais para levar o sistema ao ponto de equilíbrio desejado, e a parte u garante a estabilidade deste ponto de equilíbrio.

O ponto de equilíbrio desejado $P=(x^*, y^*)$ pode ser encontrado da primeira equação do sistema (4.23), considerando $x^* = x_d$ e $\frac{dx}{dt} = 0$, ou seja:

$$a - \mathbf{g} x^* - \mathbf{a}y^* = 0,$$

de onde resulta:

$$y^* = \frac{a - \mathbf{g}x_d}{\mathbf{a}} > 0 \quad (4.24)$$

Geralmente, o coeficiente de competição entre as pragas \mathbf{g} é bastante pequeno, e a condição de positividade

$$a - \mathbf{g} x_d > 0$$

é satisfeita.

Considerando que $u \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, da segunda equação do sistema (4.23) obtém-se:

$$-b + \mathbf{b} x_d + \mathbf{d} y^* = 0$$

de onde resulta:

$$\mathbf{d} = \frac{b - \mathbf{b} x_d}{y^*} \quad (4.25)$$

Como é visto de (4.25) o coeficiente \mathbf{d} tem que ser positivo, pois caso contrário será

$$x_d > \frac{b}{\mathbf{b}} \quad (4.26)$$

onde $\frac{b}{\mathbf{b}}$ é nível de equilíbrio de pragas sem controle, então a desigualdade (4.26)

significa que o nível de equilíbrio de pragas desejado é maior que o nível de equilíbrio de pragas sem controle e o problema do controle perde o sentido.

Objetivando agora encontrar u , foi formulado o seguinte problema do controle ótimo: encontrar a função de controle u que transfere o sistema (4.22) do estado inicial:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

ao estado final

$$\begin{aligned} x(\infty) &= x_d = x^* \\ y(\infty) &= y^* \end{aligned}$$

minimizando o funcional

$$I = \int_0^{\infty} [m_1(x-x^*)^2 + m_2(y-y^*)^2 + u^2] dt \quad (4.28)$$

A função u deve estabilizar o sistema (4.23) no ponto de equilíbrio $P=(x_d, y^*)$ abaixo de danos econômicos. No funcional (4.28) m_1 e m_2 são constantes positivas.

O problema acima formulado foi resolvido, utilizando a Programação Dinâmica [2]. A função do controle é

$$u = \frac{-v_2}{2}(y - y^*) \quad (4.29)$$

onde u é o valor ótimo da função de controle, o valor de $u y$ representa o fluxo de inimigos naturais que devem ser introduzidos no sistema em cada instante t . O valor do coeficiente v_2 encontra-se através da seguinte fórmula:

$$v_2 = 2(\mathbf{d} + \sqrt{\mathbf{d}^2 + m_2}) \quad (4.30)$$

Para realizar as simulações numéricas foi considerado o mesmo ecossistema com as relações presa - predador entre a lagarta da soja (*Anticarsia gematalis*) e seus predadores (*Nabis spp*, *Geocoris*, *Arachnid*, etc.) que foi modelado na subseção anterior. Foi suposto que a estratégia ótima com duas funções de controle foi aplicada somente no primeiro dia. Ao atingir o valor de densidade 21 lagartas da soja por metro quadrado, foi realizado o controle somente através de introdução de predadores conforme o algoritmo, apresentado nesta subseção. A simulação do controle ótimo de pragas na lavoura de soja foi realizada com os parâmetros que estão presentes na Tabela 1.

Tabela 1

a	b	\mathbf{a}	x_0	y_0	\mathbf{g}	\mathbf{b}	x_d
0.216	0.173	0.0108	21	16	0.001	0.0029	19

Na Fig.13, estão presentes os resultados de simulações com base no modelo (4.22), sem aplicação de controle biológico. Como é visto da Fig.13 a população de pragas apresenta estabilização num nível $x^* = 59.66$. Mas este valor é muito maior que o valor de limiar de danos econômicos 20, recomendado pela EMBRAPA. Existe necessidade de aplicação de controle. Para garantir o nível recomendado o valor desejado de equilíbrio foi escolhido $x_d = 19$. Este nível de equilíbrio de pragas pode ser controlado por predadores em quantidade $y^* = 14.48$, calculado através da fórmula (4.24). Neste caso \mathbf{d} foi calculado através da fórmula (4.25), onde obteve-se o valor $\mathbf{d} = 0.006464$.

Fig.14 apresenta a variação de populações de pragas e predadores com o controle ótimo realizado conforme o algoritmo acima referido para o valor do parâmetro $m_2=0.003$.

A função de controle ótimo neste caso é

$$u_0 = -0.061796(y - 14.48) \quad (4.23)$$

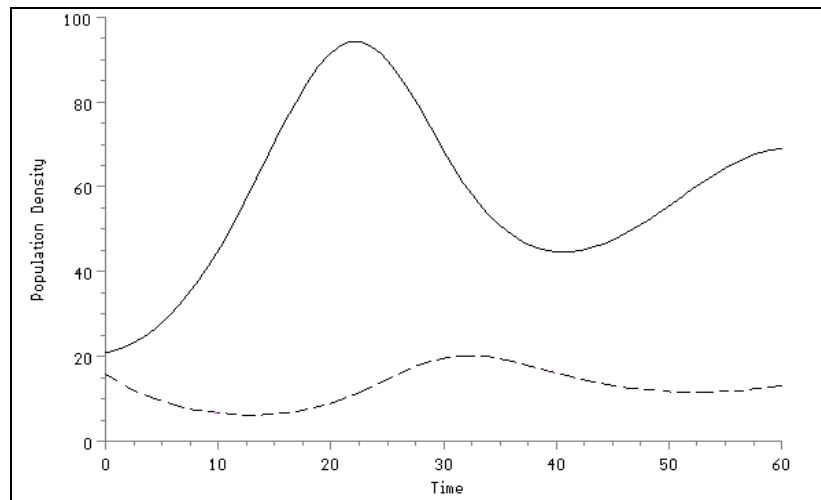


Fig.13. Variação de populações de (pragas contínua) e predadores (linha tracejada) sem controle conforme o modelo (4.22)

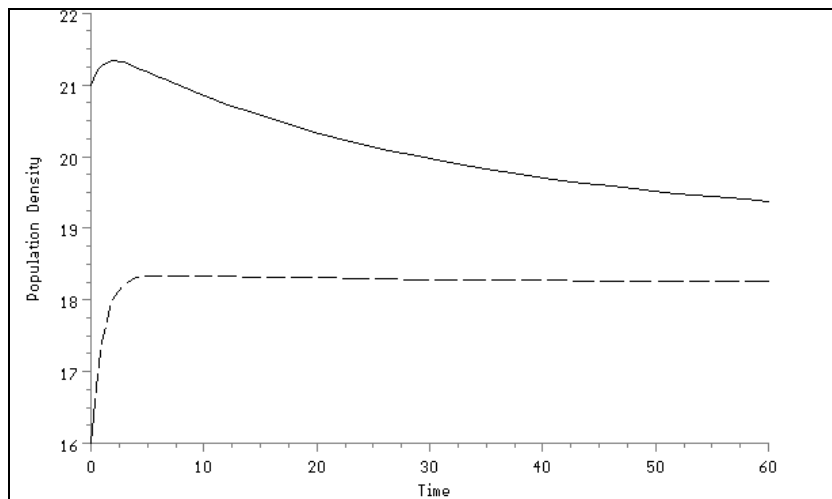


Fig.14. Variação de populações de pragas (linha contínua) e predadores (linha tracejada) com o controle ótimo (4.23).

5. Modelos populacionais de muitas espécies

5.1. Generalização do modelo Lotka - Volterra

A forma geral de um sistema de Lotka – Volterra para uma população de n espécies é seguinte [16]:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (5.1)$$

5.2. Modelo de duas presas um predador exibindo o caos

Estudando interações entre um predador e duas presas através do modelo Lotka – Volterra para três espécies Vance [27] encontrou as trajetórias que chamou “quase-cíclicas”. Gilpin [11] chamou este comportamento do sistema como “caos espiral”.

Nesta seção é considerado o controle ótimo deste sistema a fim de leva-lo do regime caótico a um ponto de equilíbrio estável. O modelo Lotka – Volterra (5.1) para um predador e duas presas tem a seguinte forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) \quad i=1,2,3, \quad (5.2)$$

onde x_1 , x_2 e x_3 são densidades da primeira presa, segunda presa e predador, respectivamente. Conforme Vance [27] o sistema (5.1) apresenta o comportamento caótico para os seguintes valores de parâmetros: $r_1 = r_2 = -r_3 = 1$, $a_{11} = a_{12} = 0.001$, $a_{22} = 0.001$, $a_{21} = 0.0015$, $a_{13} = 0.01$, $a_{23} = 0.001$, $a_{31} = -0.005$, $a_{32} = -0.0005$, $a_{33} = 0$. O diagrama de fase da Fig.15 mostra este comportamento.

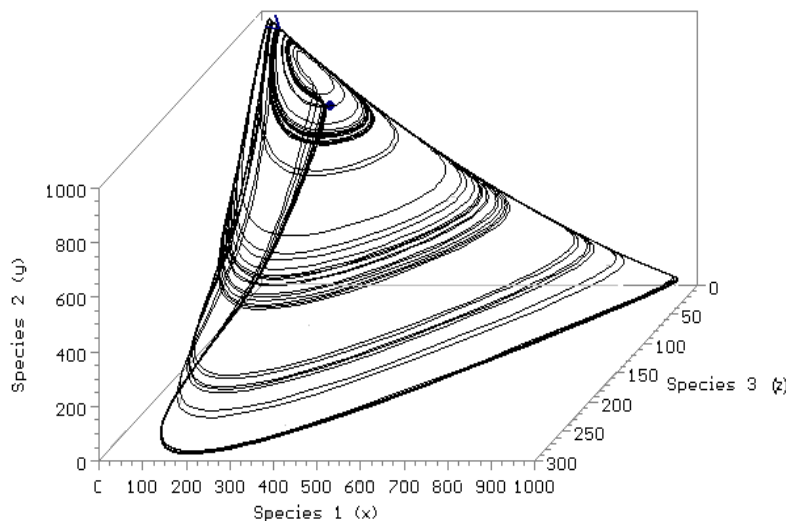


Fig.15. Comportamento caótico do sistema Lotka – Volterra.

6. Conclusão

O objetivo destas notas do minicurso é facilitar o acompanhamento das aulas do curso pelos alunos. Por isso o material tem uma forma bastante sucinta. Algumas questões tais como a utilização de lagoas de aguapé para tratamento de águas residuais e o controle biológico de pragas que podem ser encontradas somente na bibliografia específica são apresentadas em forma mais detalhada.

Por causa do tempo limitado neste minicurso não foram apresentados vários problemas de aplicação de modelos matemáticos no controle de populações. Alguns problemas do controle ótimo de sistemas populacionais podem ser procurados nas referências [4],[5],[6],[12],[23],[30].

Bibliografia

- [1] Bassanezi, R.C., W.C. Ferreira. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988.
- [2] Bellman, R. “Dynamic Programing”, Princeton, New Jersey, 1957.

- [3] Boyce, W.E., R.C. Dijkstra. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. São Paulo: Editora LTC, 1994.
- [4] Caetano, M.A.L. and T. Yoneyama, Optimal and sub-optimal control in Dengue epidemics, *Optimal Control Applications and Methods*, V. **22**, Issue 2, (2001), 63-73.
- [5] Cherruault, Y. “Mathematical modeling in biomedicine: optimal control of biomedical systems”, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986.
- [6] Costa, M.I.S., J.L. Boldrini, and R.C. Bassanezi. Optimal chemical control of populations developing drug resistance, *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.*, **9**, (1992), 215-226.
- [7] Costa, R.H.R., C.T. Zanotelli, D.M. Hoffmann, P. Belli Filho, C.C. Perdomo and M. Rafikov, Optimization of the treatment of piggery wastes in water hyacinth ponds, em “Proceedings of 5th International IWA Specialist Group Conference on Waste Stabilisation Ponds”, NZ Water & Wastes Association Inc., Auckland, 2002.
- [8] DeBach, P. “Biological control by natural enemies”, Univ. Press, 1974.
- [9] Edelstein-Keshet, L., *Mathematical Models in Biology*. New York: Random House, 1988.
- [10] Gause, G.F. “The Struggle for Existence”, Williams and Wilkins, Baltimore, 1934.
- [11] Gilpin, M.E. Spiral chaos in a predator – prey model. *American Naturalist*, 113, (1979), pp 306 – 308.
- [12] Goh, B.S. “Management and analysis of biological populations”, Elsevier Scientific Publishing Company: Amsterdam, 1980.
- [13] Harrison, G.W. Global stability of predator-prey interactions, *J. Math. Biology*, 8, (1979), 159-171.
- [14] Holling, C.S. The Components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the european pine sawfly. *Can. Entomology*, **91**, (1959), pp. 293-320.
- [15] Kawai, H. e V.M. Grieco, Utilização do aguapé para tratamento de esgoto doméstico Estabelecimento de critérios de dimensionamento de lagoa de aguapés e abordagem de alguns problemas operacionais. *Revista DAE*, v.44, n.135, (1983), 79-80.
- [16] Lotka, A.J. “Elements of physical biology”, William and Wilkins, Baltimore, 1925.
- [17] Murray, D.J. “Mathematical Biology”, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokio, 1989.

- [18] Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and E.F. Mischenko, “The Mathematical Theory of Optimal Processes”, Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.
- [19] Rafikov, M. Determinação dos parâmetros de modelos biomatemáticos, *Ciência e Natura*, UFSM, Santa Maria, Volume 19, (1997), 7- 20.
- [20] Rafikov, M. e E.R. Maleico, Controle ótimo de pragas com base no modelo generalizado de presa – predador, em “Seleta do XXII CNMAC” (J.M. Balthazar, S.M. Gomes e A. Sri Ranga, eds.), Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, Vol. 1, pp.215-222, SBMAC, 2000.
- [21] Rafikov, M. and L. C. Sakr, Optimal pest control of prey-predator systems, em “Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences” (J.M. Balthazar, P.B. Gonçalves, I.L. Caldas, R.M.F.L.P.F. Brasil, F.B. Rizotto, eds), v.6, p.323-330, Rio Claro, 2002.
- [22] Rosenzweig, M.L. and R.H. MacArthur, Graphical Representation and stability conditions of predator-prey interactions, *Am. Nat.* **97**, (1963), 209-223.
- [23] Svireghev, Y.M., E.Y. Elizarov, “Mathematical modeling of biological systems”, Nauka, Moscou, 1972. (em russo)
- [24] Ternes, S. e H.M. Yang, Estudo Introdutório de Avaliação da Interação entre Parasitóide Nativo e Exótico no Controle biológico de Pragas, *Revista de Biomatemática*, **10**, Unicamp, Campinas, (2000), 16-34.
- [25] Thomas, M.B. and A.J. Willis, Biocontrol- risky but necessary, *Trends in Ecology and Evolution*, **13**, 1998, 325-329.
- [26] Van den Bosh, R., P.S. Messenger, and A.P. Gutierrez, “An Introduction to Biological Control”, Plenum Press, New York, 1982.
- [27] Vance, R.R. Predation and resource partitioning in one predator – two prey, model community. *American Naturalist*, 112, (1978), 797 – 813.
- [28] Verhult, P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, *Correspondances Mathematiques et Physiques*, 10, (1838), 113-121.
- [29] Volterra, V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically, *Nature*, **118**, (1926), 558-560.
- [30] Zhang, X., L. Chen, A.U. Neumann, The stage-structured predator-prey model and optimal harvesting policy, *Math. Biosci.*, **168**, (2000), 201-210.