# Introdução ao Cálculo
# 2ª Lista de Exercícios

**1)** Em uma escola estudam 360 alunos, onde as únicas matérias lecionadas são Matemática e Português. Sabendo-se que 240 alunos estudam matemática e 180 alunos estudam português, qual é o número de pessoas que estudam ambas as matérias?

**2)** Em uma indústria, 120 operários trabalham de manhã, 130 trabalham à tarde e 80 à noite. Dentre estes, 60 trabalham de manhã e à tarde, 50 de manhã e à noite e 20 nos três períodos. Quantos só trabalham de manhã? Quantos não trabalham de manhã, sabendo que ninguém trabalha à tarde e à noite?

**3)** Uma fábrica de chocolates fez uma pesquisa de mercado para que o público escolhesse entre dois tipos de embalagens, $A$ e $B$. Ao todo foram entrevistadas 402 pessoas, sendo que 150 gostaram somente da $A$, 240 gostaram da $B$ (não necessariamente só da $B$) e 60 gostaram de ambas. Quantas pessoas não gostaram de nenhuma?

**4)** em uma universidade são lidos os jornais $A$ e $B$. Exatamente 80% dos alunos lêem o jornal $A$ e 60% lêem o jornal $B$. Sabendo-se que todo aluno é leitor de pelo menos um jornal, qual a porcentagem dos que lêem ambos?

**5)** Em uma pesquisa de mercado, foram entrevistadas várias pessoas acerca de suas preferências com relação a três produtos, $A$, $B$ e $C$. Os resultados foram

- 210 compram o produto $A$,
- 210 compram o produto $B$,
- 250 compram o produto $C$,
- 20 compram os três produtos,
- 100 não compram nenhum dos três produtos,
- 60 compram $A$ e $B$,
- 70 compram $A$ e $C$,
- 50 compram $B$ e $C$.

Quantas pessoas foram entrevistadas?

**6)** Sejam $X_1$, $X_2$, $Y_1$ e $Y_2$ subconjuntos de um conjunto $X$ dado.Suponha que $X_1 \cup X_2 = X$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $X_1 \subseteq Y_1$ e $X_2 \subseteq Y_2$. Mostre que $X_1 = Y_1$ e $X_2 = Y_2$.

**7)** Considere uma função $f : X \to Y$, mostre que

**a)** $f(\emptyset) = \emptyset$,

**b)** Para quaisquer subconjuntos $A$ e $B$ de $X$ tais que $A \subseteq B$, então $f(A) \subseteq f(B)$,

**c)** $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$,

**d)** Para quaisquer subconjuntos $A$ e $B$ de $Y$ tais que $A \subseteq B$, então $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$,

**e)** $f^{-1}(Y) = X$.

**8)** Seja $f : X \to Y$ uma função, $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$,

**a)** Mostre que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ e $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

**b)** Mostre que $f$ é injetiva se, e somente se, $A = f^{-1}(f(A))$ para todo $A \subseteq X$.

**c)** Mostre que $f$ é sobrejetiva se, e somente se, $f(f^{-1}(B)) = B$, para todo $B \subseteq Y$.

**9)** Considere uma função $f : A \to B$.

**a)** Prove que $f(X) \backslash f(Y) \subseteq f(X \backslash Y)$, para quaisquer subconjuntos $X, Y \subseteq A$.

**b)** Mostre que se $f$ for injetiva, então $f(X) \backslash f(Y) = f(X \backslash Y)$, para quaisquer subconjuntos $X, Y \subseteq A$.

**c)** Mostre que $f$ é injetiva se, e somente se $f(A) \backslash f(X) = f(A \backslash X)$, para qualquer subconjunto $X \subseteq A$.

**10)** Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de um conjunto $E$ dado. Mostre que

**a)** $(\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C = \cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^C$.

**b)** $(\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^C = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^C$.

**11)** Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de um conjunto $E$ dado. Considere $X$ um subconjunto de $E$ com as seguintes propriedades: (i) $A_\lambda \subseteq X$, para todo $\lambda \in \Lambda$. (ii) Se $A_\lambda \subseteq Y$ para todo $\lambda \in \Lambda$ então $X \subseteq Y$. Mostre que $X = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.

**12)** Enuncie e demonstre um resultado análogo para $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.

**13)** Seja $f : A \to B$ uma função, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de um conjunto $A$ e $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$ uma família de subconjuntos de um conjunto $B$. Mostre que

**a)** $f(\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$.

**b)** $f(\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subseteq \cap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$. Quando se tem a igualdade?

**c)** $f^{-1}(\cup_{\mu \in M} B_\mu) = \cup_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$.

**d)** $f^{-1}(\cap_{\mu \in M} B_\mu) = \cap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$.

**14)** Considere uma função $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que se $A$ e $B$ são subconjuntos de $X$ e $A \subseteq B$, então $f(B) \subseteq f(A)$ e $f(f(A)) = A$ para qualquer $A \subseteq X$. Dada uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de $X$, mostre que $f(\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \cap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$ e$f(\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$.

**15)** Seja $A$ um conjunto. Mostre que não pode existir uma função sobrejetiva de $f : A \to \mathcal{P}(A)$ (**Sugestão:** Suponha que exista tal função e considere o subconjunto $X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$)