Introdução ao Cálculo
3ª Lista de Exercícios

1) Mostre que, para todos conjuntos A, B, C existe uma bijeção entre o conjunto $(A \times B) \times C$ e o conjunto $A \times (B \times C)$. Mostre também que existem bijeções, para todo conjunto A, entre $A \times \{*\}$ e A, e também entre $\{*\} \times A$ e A, onde $\{*\}$ é o conjunto unitário.

2) Seja A um conjunto qualquer. Mostre que existe uma bijeção entre o conjunto $\mathcal{P}(A)$ e o conjunto $\mathbf{Fun}(A, \{0, 1\})$.

3) Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos, considere para cada $\mu \in \Lambda$ a função

$$\begin{array}{rccc} \pi_\mu : & \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda & \to & A_\mu \\ & (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} & \mapsto & a_\mu \end{array}$$

a) Mostre que todas as funções π_μ são sobrejetivas.

b) Seja B um conjunto para o qual exista uma família de funções $f_\lambda : B \to A_\lambda$, para todos índices $\lambda \in \Lambda$. Mostre que existe uma única função $\overline{f} : B \to \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ tal que $f_\lambda = \pi_\lambda \circ \overline{f}$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

c) Utilizando o resultado acima para a função identidade $\mathrm{Id}_A : A \to A$, descreva a única função $\Delta : A \to A \times A$ que pode ser construída (esta função é chamada de aplicação diagonal).

4) Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos. Definimos a união disjunta desta família como o conjunto

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{(\lambda, a_\lambda) \in \Lambda \times (\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \mid a_\lambda \in A_\lambda\}$$

Para cada $\mu \in \Lambda$ defina a função

$$\begin{array}{rccc} \imath_\mu : & A_\mu & \to & \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \\ & a & \mapsto & (\mu, a) \end{array}$$

a) Mostre que cada uma das funções $\imath_\lambda$ é injetiva.

b) Seja B um conjunto para o qual exista uma família de funções $g_\lambda : A_\lambda \to B$, para todos $\lambda \in \Lambda$. Mostre que existe uma única função $\overline{g} : \coprod_{\lambda\in\Lambda} \to B$ tal que $g_\lambda = \overline{g} \circ \imath_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

c) Mostre que, se $A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset$ para quaisquer $\lambda \neq \mu$, então existe uma bijeção entre $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ e $\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

5) Seja $f : A \to B$. Mostre que f é injetiva se, para qualquer conjunto X e qualquer par de funções $g, h : X \to A$ tais que $f \circ g = f \circ h$ tivermos que $g = h$.

6) Seja $f : A \to B$. Mostre que f é sobrejetiva se, para qualquer conjunto X e qualquer par de funções $g, h : B \to X$ tais que $g \circ f = h \circ f$ tivermos que $g = h$.

7) Mostre que a composta de funções injetivas também é injetiva. Mostre que a composta de funções sobrejetivas também é sobrejetiva.

8) Mostre que se dois conjuntos A e B estão em bijeção com um conjunto C, então estão em bijeção entre si.

9) Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções bijetivas. Mostre que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

10) Sejam A, B e C três conjuntos. Mostre que existe uma bijeção entre $\mathbf{Fun}(A \times B, C)$ e $\mathbf{Fun}(A, \mathbf{Fun}(B, C))$.

11) Seja A um conjunto qualquer. Mostre que existe uma bijeção entre $\mathbf{Fun}(\{*\}, A)$ e A.

12) Sejam A, B e C conjuntos quaisquer e considere uma função $f : A \to B$.

a) Mostre que a função f define uma função

$$\begin{array}{rccc} f_* : & \mathbf{Fun}(C, A) & \to & \mathbf{Fun}(C, B) \\ & g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

e que f_* é injetiva se, e somente se, f o for.

b) Mostre que f define uma função

$$\begin{array}{rccc} f^* : & \mathbf{Fun}(B, C) & \to & \mathbf{Fun}(A, C) \\ & g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

e que f^* é injetiva, se, e somente se, f for sobrejetiva.

13) Sejam A, B, C e X conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.

a) Mostre que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \mathbf{Fun}(X, A) \to \mathbf{Fun}(X, C)$.

b) Mostre que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : \mathbf{Fun}(C, X) \to \mathbf{Fun}(A, X)$.

c) Mostre que $(\mathrm{Id}_A)_* = \mathrm{Id}_{\mathbf{Fun}(X,A)}$.

d) Mostre que $(\mathrm{Id}_A)^* = \mathrm{Id}_{\mathbf{Fun}(A,X)}$.

14) Considere p_1, p_2, ... p_n, n primos distintos. Mostre que a função

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N}^n & \to & \mathbb{N} \\ & (k_1, \ldots, k_n) & \mapsto & p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \end{array}$$

é uma função injetiva (**Dica:** Use o Teorema Fundamental da Aritmética).