Introdução ao Cálculo
4<u>a</u> Lista de Exercícios

1) Mostre que $\mathbb{N} = \{0\} \cup \mathrm{Im}(\sigma)$.

2) Mostre que o axioma de Peano:

Seja um A um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que
(i) $0 \in A$.
(ii) Se $n \in A$, então $\sigma(n) \in A$.
Então $A = \mathbb{N}$.

é equivalente ao primeiro princípio de indução:

Seja um $P(n)$ uma sentença a respeito de cada número $n \in \mathbb{N}$. Suponha que
(i) $P(0)$ é verdadeira.
(ii) Se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.
Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

3) Mostre que o primeiro princípio de indução é equivalente ao segundo princípio de indução:

Seja um $P(n)$ uma sentença a respeito de cada número $n \in \mathbb{N}$. Suponha que
(i) $P(0)$ é verdadeira.
(ii) Se $P(k)$ é verdadeira para $0 \leq k \leq n$, então $P(n+1)$ é verdadeira.
Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

4) A soma nos números naturais é definida recursivamente por,

(i) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m + 0 = m$.
(ii) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m + \sigma(n) = \sigma(m+n)$.
Mostre as seguintes propriedades da soma:
a) $0 + m = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
b) A soma é associativa, isto é $(m+n)+p = m+(n+p)$ para todos $m, n, p \in \mathbb{N}$.
c) Definindo $\sigma(0) = 1$ mostre que $1 + m = m + 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$
d) A soma é comutativa, isto é $m + n = n + m$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$.

5) A multiplicação nos números naturais é definida recursivamente por,

(i) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m.0 = 0$.
(ii) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m.\sigma(n) = m.n + m$.
Mostre as seguintes propriedades da multiplicação:
a) $0.m = 0$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$.
b) Chamando $1 = \sigma(0)$, então $m.1 = 1.m = m$ para todo $m \in mathbbN$.
c) Para todos $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m.(n+p) = m.n + m.p$.
d) Para todos $m, n, p \in \mathbb{N}$, $(m+n).p = m.p + n.p$.
e) A multiplicação é comutativa, isto é $m.n = n.m$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$

f) A multiplicação é associativa, isto é, $(m.n).p = m.(n.p)$ para todos $m, n, p \in \mathbb{N}$.

6) Podemos definir uma ordem nos números naturais: $m \leq n$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Mostre que

a) $m \leq m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

b) Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.

c) Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$.

d) Dados dois números naturais m e n, então ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$ (entenda-se $m < n$ como $m \leq n$ e $m \neq n$).

e) Se $m \leq n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, $m + p \leq n + p$.

f) Se $m \leq n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, $m.p \leq n.p$.

g) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n^2$.

7) Utilize a ordem nos naturais para mostrar quas seguintes propriedades de cancelamento:

a) Se $m + p = n + p$, então $m = n$.

b) Se $m.p = n.p$, então $m = n$.

8) Mostre que o segundo princípio de indução é equivalente ao princípio da boa ordem:

Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

9) Considere a seguinte relação $\sim$ no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(m, n) \sim (p, q)$ se $m + q = n + p$.

a) Mostre que, de fato, $\sim$ é relação de equivalência.

b) Descreva a classe de equivalência $[(m, n)]$ (considere por enquanto os casos $m \geq n$ e $m < n$ separadamente).

c) Mostre que o conjunto quociente $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ (sim, são os inteiros) é um anel comutativo com unidade, com as operações

$$[(m, n)]+[(p, q)] = [(m+p, n+q)], \qquad [(m, n)].[(p, q)] = [(mp+nq, mq+np)].$$

Note que, primeiramente tem que mostrar que as operações estão bem definidas, isto é independem de representante na classe de equivalência. Quem é o zero? quem é o inverso aditivo de um elemento $[(m, n)]$? Quem é a unidade?

d) Defina a função $\imath : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $\imath(n) = [(n, 0)]$. Mostre que $\imath(m + n) = \imath(m) + \imath(n)$ e $\imath(m.n) = \imath(m).\imath(n)$. mostre também que $\imath$ é injetiva.

e) Mostre que todo elemento $[(m, n)] \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito como $[(m, n)] = \imath(m) - \imath(n)$. Então, por um abuso de linguagem, podemos ver um número inteiro como a diferença de dois números naturais.

10) Considere a seguinte relação $\sim$ no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^*$ é o conjunto dos inteiros não nulos: $(m, n) \sim (p, q)$ se $m.q = n.p$.

a) Mostre que, de fato, $\sim$ é relação de equivalência.

b) Descreva a classe de equivalência $[(m, n)]$ (comece a denotar a classe $[(m, n)]$ como $\frac{m}{n}$, sim, é uma fração).

c) Mostre que o conjunto quociente $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$ (sim, são os racionais) é um corpo, com as operações

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}, \qquad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

Note que, primeiramente tem que mostrar que as operações estão bem definidas, isto é independem de representante na classe de equivalência. Quem é o zero? Quem é o inverso aditivo de um elemento $\frac{m}{n}$? Quem é a unidade? Quem é o inverso multiplicativo de um elemento $\frac{m}{n}$?

d) Defina a função $\imath : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $\imath(n) = \frac{n}{1}$. Mostre que $\imath(m+n) = \imath(m) + \imath(n)$ e $\imath(m.n) = \imath(m).\imath(n)$. Mostre também que $\imath$ é injetiva.

e) Mostre que todo elemento $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ pode ser escrito como $\frac{m}{n} = (\imath(m))(\imath(n))^{-1}$. Então, por um abuso de linguagem, podemos ver um número racional como a razão entre dois números inteiros. Mostre finalmente que dado qualquer número racional $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ podemos escolher, sem perda de generalidade, o denominador $n > 0$.