

Introdução ao Cálculo

4a Lista de Exercícios

- 1) Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, definimos as potências de um número $a \in \mathbb{N}$ como:
 - (i) $0^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (ii) $a^0 = 1$, para todo $a \in \mathbb{N}^*$.
 - (iii) $a^{n+1} = a^n \cdot a$ para todo $a \in \mathbb{N}^*$ e todo $n \in \mathbb{N}$.Mostre que
 - a) $a^n a^m = a^{n+m}$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{N}^*$, ou $a = 0$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$.
 - b) $a^n b^n = (ab)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{N}^*$, ou a ou b iguais a 0 e $m, n \in \mathbb{N}^*$.Verifique os mesmos resultados para um anel comutativo com unidade (os inteiros, os racionais, os reais, os complexos, etc).
- 2) Seja $\mathbb{K}$ um corpo (os racionais, os reais, ou os complexos) e $a \neq 0$, defina para todo $n \in \mathbb{N}^*$ o número $a^{-n} = (a^{-1})^n$. Mostre que $a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$.
- 3) considere $\mathbb{K}$ um corpo ordenado (para a maioria dos resultados a seguir, também vale para um anel comutativo com unidade que seja ordenado) cuja ordem seja determinada por um subconjunto $P \subseteq \mathbb{K}$ fechado com relação à soma e ao produto e tal que $\mathbb{K} = P \cup \{0\} \cup (-P)$ ($x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P \cup \{0\}$ e $x < y \Leftrightarrow y - x \in P$). Mostre que
 - a) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, temos que $x < y$ ou $x = y$ ou $y < x$.
 - b) Se $x \leq y$ e $z \leq t$, então $x + z \leq y + t$ (o mesmo vale para desigualdades estritas, isto é, se $x < y$ e $z < t$, então $x + z < y + t$).
 - c) Se $x \leq y$ e $0 \leq z$, então $xz \leq yz$ (o mesmo vale para desigualdades estritas).
 - d) Se $x \leq y$ e $z < 0$, então $yz \leq xz$ (o mesmo vale para desigualdades estritas).
 - e) Se $0 \leq x \leq y$ e $0 \leq z \leq t$, então $xz \leq yt$ (o mesmo vale para desigualdades estritas).
 - f) Se $0 \leq x \leq y$, então $x^n \leq y^n$ para qualquer natural $n \in \mathbb{N}$.
 - g) Para todo $x \in \mathbb{K}$, $x^2 \geq 0$, em particular, $1 > 0$.
 - h) Se $x + z \leq y + z$, então $x \leq y$.
 - i) Se $xz \leq yz$ e $z > 0$, então $x \leq y$. Se $xz \leq yz$ e $z < 0$, então $y \leq x$.
 - j) Se $x \neq 0$ então x^{-1} tem o mesmo sinal que x , isto é, se $x > 0$ então $x^{-1} > 0$, se $x < 0$ então $x^{-1} < 0$.
 - k) Se $0 < x \leq y$, então $0 < y^{-1} \leq x^{-1}$, se $x \leq y < 0$ então $y^{-1} \leq x^{-1} < 0$.
- 4) Mostre que os naturais podem ser imersos injetivamente em qualquer corpo ordenado (sabendo que $0 < 1$, então $1 < 2$, $2 < 3$ e assim por diante).
- 5) Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, mostre que não pode existir um número natural entre 0 e 1.
- 6) (*Desigualdade de Bernoulli*) Mostre que, em um corpo ordenado, se $x \geq -1$ vale a desigualdade

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

- 7) Seja R um anel comutativo com unidade e ordenado de acordo com $P \subseteq R$, definimos o módulo, ou valor absoluto, de um número $x \in R$ como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que

- a) $|x| = \max\{x, -x\}$.
 - b) $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo $x \in R$.
 - c) São equivalentes as seguintes afirmativas
 - (i) $-a \leq x \leq a$, para $a \geq 0$.
 - (ii) $x \leq a$ e $-x \leq a$, para $a \geq 0$.
 - (iii) $|x| \leq a$, para $a \geq 0$.
 - d) $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$.
 - e) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
 - f) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
 - g) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$.
 - h) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.
- 8) Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:
- (i) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{K}$ é ilimitado superiormente.
 - (ii) Dados $a, b \in \mathbb{K}$ com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$.
 - (iii) Dado qualquer $a > 0$ em $\mathbb{K}$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.
- Um corpo com estas propriedades é dito ser *Arquimédiano*.
- 9) Mostre que, se um corpo ordenado é completo, isto é, todo subconjunto não vazio limitado superiormente admite um supremo, então é Arquimédiano.
- 10) Utilize o resultado anterior para mostrar que, entre dois números reais existe sempre um número racional.