Introdução ao Cálculo
5$\underline{a}$ Lista de Exercícios

1) Mostre que todos os números reais da forma

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

são naturais, para $n \geq 0$.

2) Mostre que em um corpo ordenado, $x^2 + y^2 = 0$ se, e somente se, $x = y = 0$.

3) Prove que, para $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$ temos que $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$.

4) Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ tais que $b, d > 0$. Prove que $\frac{a+c}{b+d}$ está entre o menor e o maior entre os números $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

5) Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, mostre por indução que $|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ e $x_1 \ldots x_n| = |x_1| \ldots |x_n|$.

6) Mostre em $\mathbb{R}$ que $a + b\sqrt{2} = c + \sqrt{2}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

7) Mostre que o conjunto dos números reais $a + b\sqrt{2}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$ forma um sub-corpo dentro dos números reais.

8) Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ são subconjuntos densos em $\mathbb{R}$.

9) Mostre que, para a e b racionais positivos, temos que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se, e somente se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ o forem.

10) Sejam $\mathbb{K}$ e $\mathbb{L}$ dois corpos. Um homomorfismo entre estes corpos é uma função $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

a) Mostre que ou f é identicamente nulo, ou f é injetivo.

b) Mostre que se $\mathbb{K} = \mathbb{L} = \mathbb{Q}$ então um homomorfismo f ou é nulo ou é a identidade.

c) Mostre que todo corpo ordenado $\mathbb{K}$ possui $\mathbb{Q}$ como subcorpo, isto é, existe um homomorfismo $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ injetivo (portanto a imagem de f é identificada com o corpo dos racionais dentro de $\mathbb{K}$.

d) Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo, sejam $0'$ e $1'$, respectivamente, o zero e a unidade de $\mathbb{K}$, defina $n' = n.1' = 1' + \cdots + 1'$ n-vezes, para $n \in \mathbb{Z}^*_+$ e $(-1') + \cdots + (-1')$, $|n|$ vezes para $n \in \mathbb{Z}^*_-$. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ a função,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p'}{q'},$$

para $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e

$$f(x) = \sup\left\{\frac{p'}{q'} \in \mathbb{K} \mid \frac{p}{q} < x\right\},$$

para x irracional. Mostre que f é um homomorfismo bijetor, isto é, um isomorfismo. Com isto, você estará demonstrando que $\mathbb{R}$ é, para todos os fins práticos, o único corpo ordenado completo que existe.

11) Determine o supremo do conjunto

$$A = \left\{\frac{n}{n+1} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

12) Sejam A e B dois subconjuntos dos números reais tais que $A \subseteq B$ e ambos limitados superiormente e inferiormente. Mostre que $\text{Inf}(B) \leq \text{Inf}(A) \leq \text{Sup}(A) \leq \text{Sup}(B)$.

13) Sejam A e B dois subconjuntos dos números reais limitados.

a) Sendo $A + B = \{a + b \in \mathbb{R} \mid a \in A,\ b \in B\}$, mostre que (i) $A + B$ é limitado, (ii) $\text{Sup}(A + B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$ e (iii) $\text{Inf}(A + B) = \text{Inf}(A) + \text{Inf}(B)$.

b) Suponha A e B subconjuntos de números positivos e defina $A.B = \{a.b \in \mathbb{R} \mid a \in A,\ b \in B\}$. Mostre que (i) $A.B$ é limitado, (ii) $\text{Sup}(A.B) = \text{Sup}(A).\text{Sup}(B)$ e $\text{Inf}(A.B) = \text{Inf}(A).\text{Inf}(B)$.

14) Mostre as seguintes desigualdades em $\mathbb{R}$:

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) \geq 9$, para $a, b > 0$.

b) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$, para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$

c) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \geq 0$, para qualquer, $x \in \mathbb{R}$.

d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

e) $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

f) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a+b+c)$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

g) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, para $a, b > 0$.

h) $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, para $a_1, \ldots, a_n > 0$.

i) $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{(a_1)^2 + \cdots + (a_n)^2}{n}}$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

j) $x_1y_1 + \cdots x_ny_n \leq \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}\sqrt{(y_1)^2 + \cdots + (y_n)^2}$, para todos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

15) Determine os intervalos reais onde as seguintes desigualdades são satisfeitas:

(a) $x^2 - 3x + 2 < 0$.

(b) $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$ para $a < b < c$.

(c) $|1 - x| - x \geq 0$

(d) $\frac{x-a}{x+a} \geq 0$

(e) $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 6$.

(f) $|x - 3| + |x + 3| < 8$.

(g) $|x^2 - 2| \leq 1$.

(h) $||2x + 1| - 2| \leq |1 - |x - 4||$.