$g(x) = ax$, portanto, pondo $f(0) = b$, temos

$$f(x) = g(x) + f(0) = ax + b$$

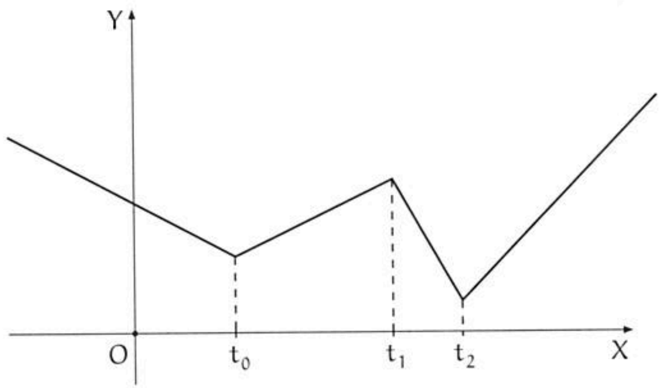
para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

5. Funções Poligonais

As funções poligonais surgem naturalmente, tanto na vida cotidiana (imposto de renda como função da renda líquida, preço de uma mercadoria que oferece descontos crescentes quando aumenta a quantidade comprada) como em diversas áreas da Matemática (Análise, Cálculo Numérico, Equações Diferenciais, Topologia).

Diz-se que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função poligonal* quando existem $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ tais que, para $x \leqslant t_0$, para $x \geqslant t_n$ e em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, f coincide com uma função afim f_i. (Para evitar descontinuidades, exige-se que $f_i(t_i) = f_{i-1}(t_{i-1})$.) Equivalentemente, podemos dizer que uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal.

O protótipo de função poligonal é uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$. Ou então $f(x) = |x - c|$, para algum $c \in \mathbb{R}$.

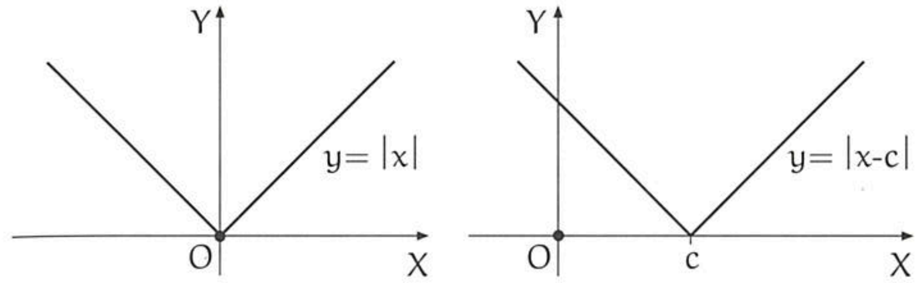


Outros exemplos são dados por expressões do tipo

$$f(x) = |\alpha x + \beta|$$

ou

$$g(x) = |x - \alpha| + |x - \beta|.$$

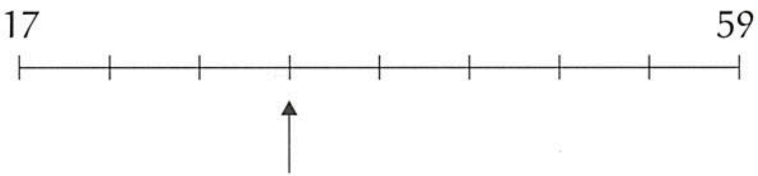


Estes exemplos nos levam a conjeturar que toda função poligonal pode ser definida combinando valores absolutos de funções afins. Esta conjetura é verdadeira. (Ver exercícios deste capítulo.)

Exercícios

1. Quando dobra o percurso em uma corrida de táxi, o custo da nova corrida é igual ao dobro, maior que o dobro ou menor que o dobro da corrida original?

2. A escala da figura abaixo é linear. Calcule o valor correspondente ao ponto assinalado.



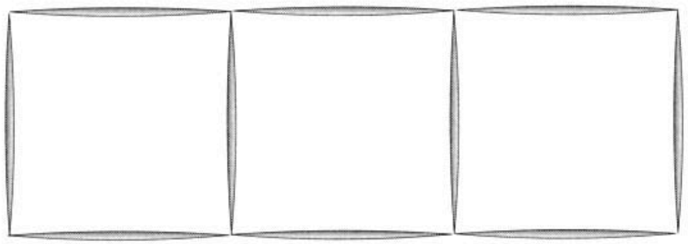
3. A escala N de temperaturas foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

°N	°C
0	18
100	43

Em que temperatura ferve a água na escala N?

4. Uma caixa dágua de 1000 litros tem um furo no fundo por onde escoa água a uma vazão constante. Ao meio dia de certo dia ela foi cheia e, às 6 da tarde desse dia, só tinha 850 litros. Quando ficará pela metade?

5. Um garoto brinca de arrumar palitos fazendo uma seqüência de quadrados como na figura Se ele fez n quadrados, quantos palitos utilizou?



6. Admita que 3 operários, trabalhando 8 horas por dia, construam um muro de 36 metros em 5 dias.

a) Quantos dias são necessários para que uma equipe de 5 operários, trabalhando 6 horas por dia, construa um muro de 15 metros?

b) Que hipóteses foram implicitamente utilizadas na solução do item anterior?

c) Dentro dessas mesmas hipóteses, exprima o número D de dias necessários à construção de um muro em função do número N de operários, do comprimento C do muro e do número H de horas trabalhadas por dia.

7. As leis da Física, muitas vezes, descrevem relações de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas. Para cada uma das leis abaixo, escreva a expressão matemática correspondente.

a) (*Lei da gravitação universal*). Matéria atrai matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado das distâncias.

b) (*Gases perfeitos*). A pressão exercida por uma determinada massa de um gás é diretamente proporcional à temperatura absoluta e inversamente proporcional ao volume ocupado pelo gás.

c) (*Resistência elétrica*). A resistência de um fio condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à área de sua seção reta.

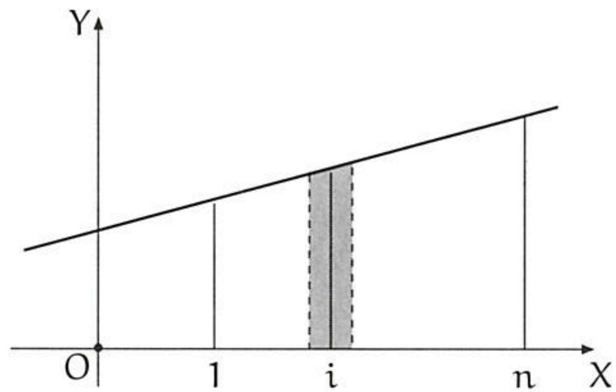
d) (*Dilatação térmica*). A dilatação térmica sofrida por uma barra é diretamente proporcional ao comprimento da barra e à variação de temperatura.

8. As grandezas X e Y são inversamente proporcionais. Se X sofre um acréscimo de 25% qual o decréscimo percentual sofrido por Y?

9. A fórmula da soma dos termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os valores $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ de uma função afim.

a) Mostre que cada a_i é igual à área de um trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais de equações

$$x = i - \frac{1}{2} \text{ e } x = i + \frac{1}{2}.$$



b) Mostre que a soma $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é igual à área do trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = \frac{1}{2}$ e $x = n + \frac{1}{2}$.

c) Conclua que $S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

10. Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 segundos na escada quando sobe 5 degraus e 20 segundos quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo normalmente gasto no percurso?

11. Augusto, certo dia, fez compras em 5 lojas. Em cada loja, gastou metade do que possuia e pagou, na saida, R$ 2,00 de estacionamento. Se após toda essa atividade ainda ficou com R$ 20,00, que quantia ele tinha inicialmente?

12. Seguindo as idéias de E.W., construa uma régua para medir números de sapatos.

13. Estuda-se a implantação da chamada "fórmula 95". Por essa fórmula os trabalhadores teriam direito à aposentadoria quando a soma da idade com o número de anos de serviço atingisse 95. Adotada essa fórmula, quem começasse a trabalhar com 25 anos, com que idade se aposentaria?

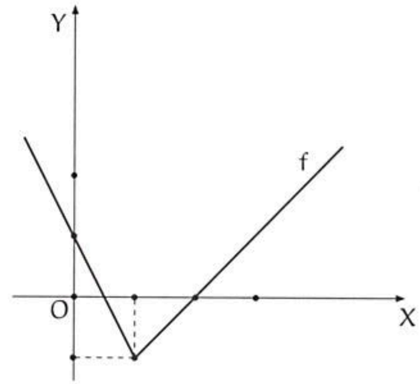
14. Em uma escola há duas provas mensais, a primeira com peso 2 e a segunda com peso 3. Se o aluno não alcançar média 7 nessas provas, fará prova final. Sua média final será então a média entre a nota da prova final, com peso 2 e a média das provas mensais, com peso 3. João obteve 4 e 6 nas provas mensais. Se a média final para aprovação é 5, quanto ele precisa obter na prova final para ser aprovado?

15. Arnaldo dá a Beatriz tantos reais quanto Beatriz possui e dá a Carlos tantos reais quanto Carlos possui. Em seguida, Beatriz dá a Arnaldo e a Carlos tantos reais quanto cada um possui. Finalmente, Carlos faz o mesmo. Terminam todos com R$ 16,00 cada. Quanto cada um possuia no início?

16. Um carro sai de A para B e outro de B para A, simultaneamente, em linha reta, com velocidades constantes e se cruzam em um ponto situado a 720m do ponto de partida mais próximo. Completada a viagem, cada um deles pára por 10min e regressa, com a mesma velocidade da ida. Na volta, cruzam-se em um ponto situado a 400m do outro ponto de partida. Qual a distância de A até B ?

17. Em uma ferrovia, as estações A e B distam entre si 3 km e a cada 3 min parte um trem de cada uma delas em direção à outra. Um pedestre parte de A para B, no exato momento em que um trem parte de A para B e outro chega a A vindo de B. Ele chega a B no exato momento em que um trem parte de B para A e outro trem chega a B vindo de A. Em seu caminho, o pedestre encontrou 17 trens que iam no mesmo sentido que ele e com 23 trens que iam no sentido oposto ao seu, aí incluídos os 4 trens já citados anteriormente. As velocidades dos trens são iguais. Calcule as velocidades dos trens e do pedestre.

18. Dado o gráfico da função f, abaixo, obtenha, em cada caso, o gráfico da função g tal que:



a) $g(x) = f(x) - 1$
b) $g(x) = f(x - 1)$
c) $g(x) = f(-x)$
d) $g(x) = 2(fx)$

e) $g(x) = f(2x)$
f) $g(x) = |f(x)|$
g) $g(x) = f(|x|)$
h) $g(x) = \max\{f(x), 0\}$

19. Determine os valores reais de x que satisfazem:
a) $2x + 3 - (x - 1) < x + 1$
b) $2x + 3 - (x - 1) < x + 5$
c) $\min\{x + 1; 5 - x\} > 2x - 3$
d) $\min\{x + 1; 5 - x\} < 2x$
e) $\min\{2x - 1; 6 - x\} = x$
f) $2|x + 1| - |1 - x| \leqslant x + 2$
g) $(2x + 3)(1 - x) = (2x + 3)(x - 2)$
h) $|x + 1 - |x - 1|| \leqslant 2x - 1$

20. Resolva a inequação

$$\frac{1}{2x+1} < \frac{1}{1-x}.$$

21. Determine a imagem da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \max\{x - 1, 10 - 2x\}$.

22. Faça os gráficos de:
a) $f(x) = \min\{4 - x; x + 1\}$
b) $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$

23. Identifique o conjunto dos pontos (x, y) tais que:
a) $|x| + |y| = 1$
b) $|x - y| = 1$

24. Um supermercado está fazendo uma promoção na venda de alcatra: um desconto de 10% é dado nas compras de 3 quilos ou mais. Sabendo que o preço do quilo de alcatra é de R$ 4,00, pede-se:
a) o gráfico do total pago em função da quantidade comprada.
b) o gráfico do preço médio por quilo em função da quantidade comprada.
c) a determinação de quais consumidores poderiam ter comprado mais alcatra pagando o mesmo preço.

25. Um supermercado está fazendo uma promoção na venda de alcatra: um desconto de 10% é dado nos quilos que excederem a 3. Sabendo que o preço do quilo de alcatra é de R$ 4,00, pede-se:
a) o gráfico do total pago em função da quantidade comprada.
b) o gráfico do preço médio por quilo em função da quantidade comprada.
c) a determinação de quantos quilos foram comprados por um consumidor que pagou R$ 15,00.

26. Os novos valores de IR-fonte:

Base de cálculo	**Alíquota**	**Parcela a deduzir**
Até R$ 900	Isento	–
De R$ 900 a R$ 1 800	15%	R$ 135
Acima de R$ 1 800	25%	R$ 315

Fonte: Secretaria da Receita Federal
Baseado na tabela acima, construa o gráfico do imposto a pagar em função do rendimento.

27. O imposto de renda y pago por uma pessoa que, em 1995, teve uma renda líquida y é calculado através de uma expressão da forma $y = ax - p$, onde a alíquota a e a parcela a deduzir p dependem da renda x e são dadas por uma tabela, parcialmente fornecida a seguir.

Renda (em R$)	**Alíquota** (a)	**Parcela a deduzir** (p)
Até 8800	0	0
De 8800 a 17160	15%	
De 17160 a 158450	26%	
Mais de 258450	35%	

a) Complete a tabela, de modo que o imposto a pagar varie continuamente com a renda (isto é, não haja saltos ao se passar de uma faixa de renda para outra).

b) Se uma pessoa está na terceira faixa e sua renda aumenta de R$ 5.000,00, qual será seu imposto adicional (supondo que este acréscimo não acarrete uma mudança de faixa)?

c) É comum encontrar pessoas que lamentam estar no início de uma faixa de taxação ("que azar ter recebido este dinheiro a mais!"). Este tipo de reclamação é procedente?

d) Os casais têm a alternativa de apresentar declaração em conjunto ou separadamente. No primeiro caso, o "cabeça do casal" pode efetuar uma dedução de R$ 3.000,00 em sua renda líquida mas, em compensação, tem que acrescentar a renda do cônjuge. Em que casos é vantajosa a declaração em separado?

e) A tabela de taxação é, às vezes, dada de uma outra forma, para permitir o cálculo do imposto através de uma expressão da forma $y = b(x - q)$ (isto é, primeiro se deduz a parcela q e depois se aplica a alíquota). Converta a tabela acima para este formato (isto é, calcule os valores de b e q para cada faixa de renda).

f) Qual a renda para a qual o imposto é igual a R$ 20.000,00?

g) Esboce o gráfico da função que associa a cada renda x o percentual desta renda que é pago de imposto.

28. Uma copiadora publicou a seguinte tabela de preços:

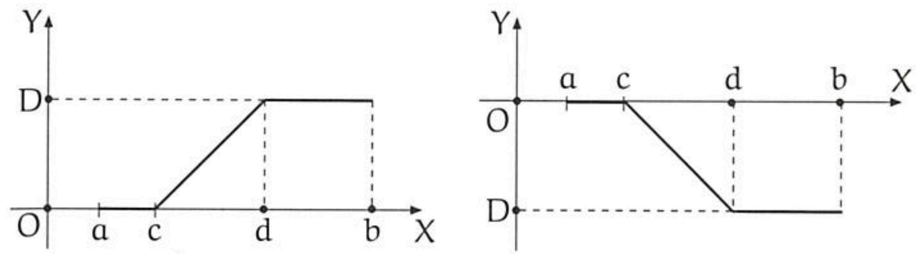
Número de cópias de um mesmo original	**Preço por cópia**
de 1 a 19	R$ 0,10
de 20 a 49	R$ 0,08
50 ou mais	R$ 0,06

a) Esboce o gráfico da função que associa a cada natural n o custo de n cópias de um mesmo original.

b) O uso da tabela acima provoca distorções. Aponte-as e sugira uma tabela de preços mais razoável.

29. Discutir o número de soluções da equação $|x - 2| = ax + b$ e, função dos parâmetros a e b.

30. Chama-se de *função rampa* a uma função poligonal $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é de uma das formas abaixo:



Isto é, f tem dois patamares $[a, c]$ e $[d, b]$, onde assume, respectivamente, os valores 0 e D, ligados por uma rampa.

a) Mostre que toda função rampa pode ser escrita na forma

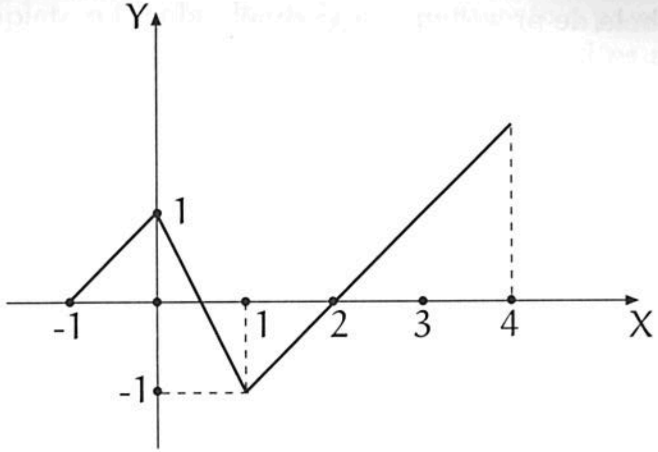
$$f(x) = \frac{\alpha}{2}[(d - c) + |x - c| - |x - d|],$$

para todo $x \in [a, b]$, onde

$$\alpha = \frac{d}{d - c}$$

é a inclinação da rampa.

b) Mostre que toda função poligonal definida em um intervalo $[a, b]$ pode ser expressa como uma soma de uma função constante (que pode ser vista como uma função rampa de inclinação zero) com um número finito de funções rampa. Escreva nesta forma a função poligonal cujo gráfico é dado abaixo.



c) Conclua que toda função poligonal definida em um intervalo $[a, b]$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = A + \alpha_1|x - a_1| + \alpha_2|x - a_2| + \cdots + \alpha_n|x - a_n|,$$

para todo $x \in [a, b]$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são as abcissas dos vértices da poligonal. Escreva nesta forma a função poligonal cujo gráfico é dado acima.

31. Dadas as progressões aritméticas

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \quad \text{e} \quad (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots),$$

mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n, \ldots$

32. A e B são locadoras de automóvel. A cobra 1 real por quilômetro rodado mais uma taxa de 100 reais fixa. B cobra 80 centavos por quilômetro mais uma taxa fixa de 200 reais. Discuta a vantagem de A sobre B ou de B sobre A em função do número de quilômetros a serem rodados.

Capítulo 6

Funções Quadráticas

1. Definição e Preliminares

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A primeira observação que faremos é: os coeficientes a, b, c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Noutras palavras, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.

Com efeito, seja $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $x = 0$, obtemos $c = c'$. Então, cortando c e c', tem-se $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, esta igualdade vale para todo $x \neq 0$. Neste caso, cancelando x, obtemos $ax + b = a'x + b'$ para todo $x \neq 0$. Fazendo primeiro $x = 1$ e depois $x = -1$, vem $a + b = a' + b'$ e $-a + b = -a' + b'$, donde concluímos $a = b$ e $a' = b'$.

A observação acima permite que se identifique uma função quadrática com um trinômio do segundo grau. Há, em princípio, uma diferença sutil entre esses dois conceitos, Um *trinômio do segundo grau* é uma expressão formal do tipo $aX^2 + bX + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$. A palavra *formal* aí significa que a letra X é apenas um símbolo, sendo X^2 um outro modo de escrever XX. Por definição, dois trinômios $aX^2 + bX + c$ e $a'X^2 + b'X + c'$ são iguais quando $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. [Em última análise, um trinômio é o mesmo que um terno ordenado de números reais (a, b, c).]

Portanto $y_{n+1} = f(n)$, onde $f(x) = \frac{r}{2}x^2 + (d - \frac{r}{2})x + y_1$. Isto significa que a função quadrática f transforma a progressão aritmética

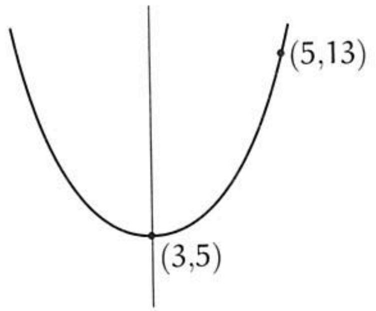
$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

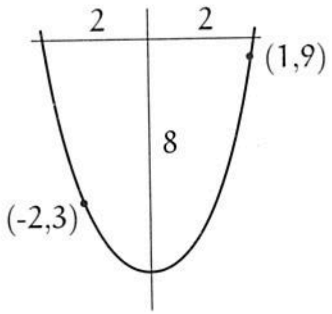
na progressão aritmética de segunda ordem

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}, \ldots .$$

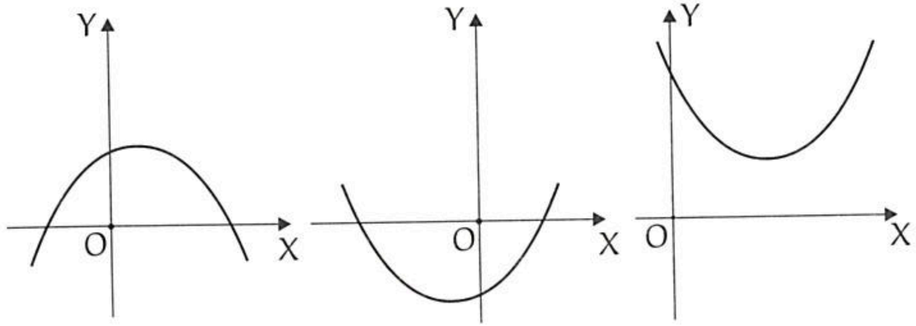
Exercícios

1. Encontre a função quadrática cujo gráfico é dado em cada figura abaixo:





2. Identifique os sinais de a, b e c nos gráficos de funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bc + c$ dados abaixo:

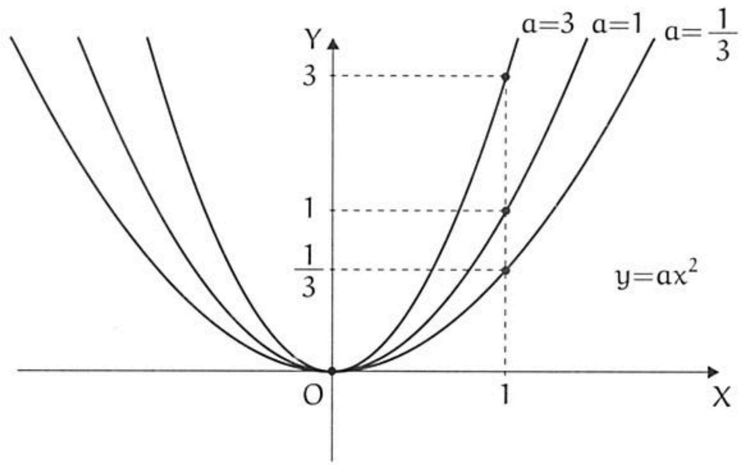


3. Escreva cada uma das funções quadráticas abaixo na forma $f(x) = a(x - b)^2 + c$. A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo ou máximo

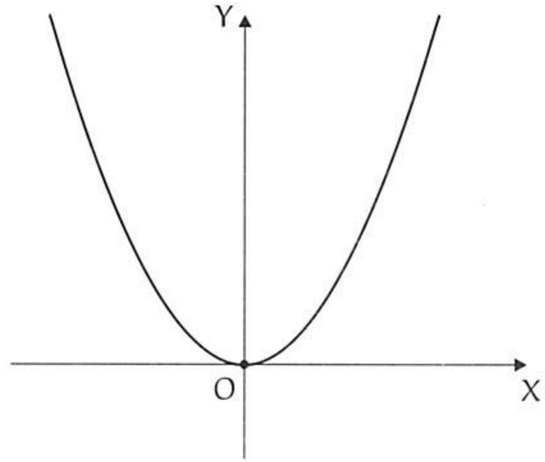
a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$

b) $f(x) = 8x - 2x^2$

4. Observe os gráficos abaixo, que representam as parábolas $y = ax^2$ para diversos valores de a. Estas parábolas são semelhantes entre si?



5. Encontre a unidade que deve ser usada nos eixos cartesianos de modo que a parábola abaixo seja o gráfico da função $f(x) = 2x^2$.



6. Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em cada um dos intervalos abaixo:

a) $[1,4]$

b) $[6,10]$

7. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$.

a) Mostre que $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

b) Mais geralmente, mostre que se $0 < \alpha < 1$, então $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$. Interprete geometricamente esta propriedade.

8. Prove que se a, b e c são inteiros ímpares, as raízes de $y = ax^2 + bx + c$ não são racionais.

9. Uma pessoa possui um gravador de vídeo dotado de um contador que registra o número de voltas dadas pelo carretel da direita. A fita, de 6 horas de duração, está parcialmente gravada. O contador indica 1750 ao final do trecho gravado e 1900 ao final da fita. O problema é saber quanto tempo de gravação ainda está disponível no final da fita.

a) Explique porque não é razoável supor que o tempo de gravação seja proporcional ao número de voltas no contador.

b) Considerando que a fita se enrola em cada carretel segundo círculos concêntricos igualmente espaçados, mostre que o tempo $T(n)$ de gravação após n voltas é dado por uma função da forma $T(n) = an^2 + bn$.

c) Medindo o tempo de gravação corespondente às primeiras 100, 200, 300 e 400 voltas, foram encontrados os dados abaixo. Estes valores são consistentes com o modelo acima?

Volta	Tempo(s)
100	555
200	1176
300	1863
400	2616

d) Quanto tempo de gravação resta na fita?

10. Dado um conjunto de retas do plano, elas determinam um número máximo de regiões quando estão na chamada posição geral: isto é, elas são concorrentes duas a duas e três retas nunca têm um ponto comum. Seja R_n o número máximo de regiões determinadas por n retas do plano.

a) Quando se adiciona mais uma reta na posição geral a um conjunto de n retas em posição geral, quantas novas regiões são criadas?

b) Deduza de a) que R_n é dada por uma função do 2º grau em n e obtenha a expressão para R_n.

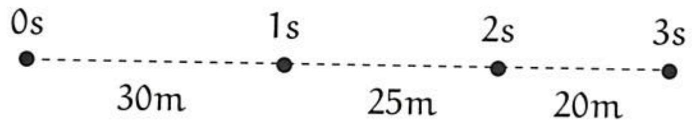
11. No máximo quantos pontos de interseção existem quando são desenhadas n circunferências?

12. Um estudante anotou a posição, ao longo do tempo, de um móvel sujeito a uma força constante e obteve os dados abaixo:

Instante (seg)	Posição (metros)
0	17
10	45
20	81

Calcule a posição do móvel nos instantes 5 seg, 15 seg e 25 seg.

13. O motorista de um automóvel aplica os freios de modo suave e constante, de modo a imprimir uma força de frenagem constante a seu veículo, até o repouso. O diagrama a seguir mostra a posição do veículo a cada segundo a partir do instante em que os freios foram aplicados.



a) Os dados acima são compatíveis com o fato de a força de frenagem ser constante?

b) Qual a posição do veículo 5s após o início da frenagem?

c) Quanto tempo o veículo demora para chegar ao repouso?

d) Qual era a velocidade do veículo no instante em que o motorista começou a aplicar os freios?

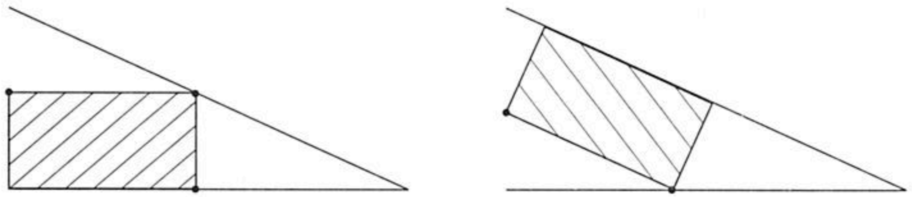
14. Um grupo de alunos, ao realizar um experimento no laboratório de Física, fez diversas medidas de um certo comprimento. O instrutor os orientou no sentido de tomar a média aritmética dos valores encontrados como o valor a ser adotado. Este procedimento pode ser justificado do modo abaixo.
Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ os valores encontrados. É razoável que o valor adotado x seja escolhido de modo que o erro incorrido pelas diversas medições seja o menor possível. Em geral, este erro é medido através do chamado desvio quadrático total, definido por

$$d(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2.$$

a) Mostre que $d(x)$ é minimizado quando $x = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

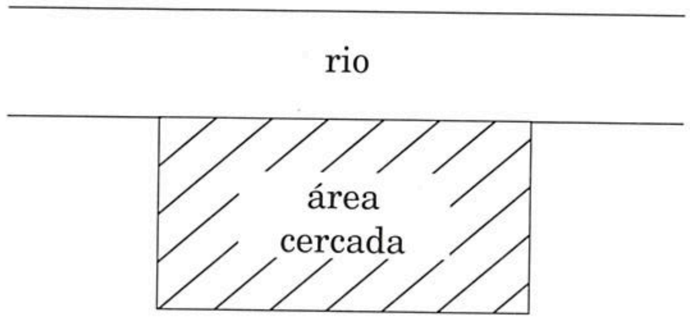
b) Suponha agora que se deseje utilizar o desvio absoluto total $e(x) = |x - x_1| + |x - x_1| + \cdots + |x - x_n|$ como medida do erro cometido. Mostre que $e(x)$ é minimizado quando x é a mediana de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

15. Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob a forma de um triângulo retângulo de lados 60cm, 80cm e 1m. Quer-se, a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar corte, pelo menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo.



As posições sugeridas são as da figura acima. Em cada caso, determine qual o retângulo de maior área e compare os dois resultados. Discuta se a restrição de um lado estar sobre o contorno do triângulo é realmente necessária para efeito de maximizar a área.

16. Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.



Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

17. No instante $t = 0$ o ponto P está em $(-2, 0)$ e o ponto Q em $(0, 0)$. A partir desse instante, Q move-se para cima com velocidade de 1 unidade por segundo e P move-se para a direita com velocidade de 2 unidades por segundo. Qual é o valor da distância mínima entre P e Q?

18. Se x e y são reais tais que $3x + 4y = 12$, determine o valor mínimo de $z = x^2 + y^2$.

19. Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

20. João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$ 20,00. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?

21. Uma loja está fazendo uma promoção na venda de balas: "Compre x balas e ganhe $x\%$ de desconto". A promoção é válida para compras de até 60 balas, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Alfredo, Beatriz, Carlos e Daniel compraram 10, 15, 30 e 45 balas, respectivamente. Qual deles poderia ter comprado mais balas e gasto a mesma quantia, se empregasse melhor seus conhecimentos de Matemática?

22. O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso a R\$ 9,00, em média 300 pessoas assistem aos concertos e que, para cada redução de R\$ 1,00 no preço dos ingressos, o público aumenta de 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

23. Qual o valor máximo de $21n - n^2$, n inteiro?

24. Faça o gráfico de:

a) $f(x) = |x^2| - |x| + 1$

b) $f(x) = |x^2 - x|$

25. Identifique o conjunto dos pontos (x, y) tais que:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $y = x^2 - 5x + 6$

26. Resolva a inequação $x^4 + x^2 - 20 > 0$.

27. Determine explicitamente os coeficientes a, b, c do trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ em função dos valores $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$.

28. Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

29. Um prédio de 1 andar, de forma retangular, com lados proporcionais a 3 e 4, vai ser construído. O imposto predial é de 1 real por metro quadrado, mais uma taxa fixa de 250 reais. A prefeitura concede um desconto de 1 real por metro linear do perímetro, como recompensa pela iluminação externa e pela calçada em volta do prédio. Quais devem ser as medidas dos lados para que o imposto seja o mínimo possível? Qual o valor desse imposto mínimo? Esboce o gráfico do valor do imposto como função do lado maior do retângulo.

30. Determine entre os retângulos de mesma área a, aquele que tem o menor perímetro. Existe algum retângulo cujo perímetro seja maior do que os de todos os demais com mesma área?

31. Que forma tem o gráfico da função $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$?

32. Mostre que a equação $\sqrt{x} + m = x$ possui uma raiz se $m \geqslant 0$, duas raízes quando $-\frac{1}{4} < m < 0$, uma raiz para $m = -1/4$ e nenhuma raiz caso $m < -1/4$.

33. Numa concorrência pública para a construção de uma pista circular de patinação apresentam-se as firmas A e B. A firma A cobra 20 reais por metro quadrado de pavimentação, 15 reais por metro linear do cercado, mais uma taxa fixa de 200 reais para administração. Por sua vez, a firma B cobra 18 reais por metro quadrado de pavimentação, 20 reais por metro linear do cercado e taxa de administração de 600 reais. Para quais valores do diâmetro da pista a firma A é mais vantajosa? Esboce um gráfico que ilustre a situação. Resolva um problema análogo com os números 18, 20 e 400 para A e 20, 10, 150 para B.