

Introdução ao Cálculo

8ª Lista de Exercícios

- 1) Sejam a e b dois números reais, mostre que

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|), \quad \max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|).$$

- 2) Sejam f e g funções reais com o mesmo domínio. Denote por $|f|$ a função com mesmo domínio que f cujo valor em $x \in \text{Dom}(f)$ é $|f|(x) = |f(x)|$ (o mesmo para $|g|$).

- a) Definindo as funções $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ com mesmo domínio que f e g e dadas por

$$\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)), \quad \min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x)),$$

Descreva estas funções em termos dos módulos das funções.

- b) Mostre que $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$. As funções $\max(f, 0)$ e $\min(f, 0)$ são denominadas, respectivamente, a parte positiva e a parte negativa da função f .
- c) Uma função f é dita ser não negativa se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$. Mostre que toda função real pode ser escrita como a diferença de duas funções não negativas.

- 3) Determine o domínio das seguintes funções:

- a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.
- c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
- d) $f(x) = \sqrt{\frac{(x-4)(2x+3)}{(x+2)(3x-2)}}$.

- 4) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente, isto é, se $x < y$ então $f(x) < f(y)$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $f(nx) = n.f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Denotando $a = f(1)$, tem-se que $f(x) = a.x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (iii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(Sugestão, a parte realmente difícil é provar que (i) implica em (ii), mostre primeiro para $x \in \mathbb{Q}$ e depois use a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ e o fato de ser crescente).

- 5) Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona e injetiva. Considere $x \in \mathbb{R}$ e a função diferença $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi_x(h) = f(x + h) - f(x)$. Mostre que, $\varphi_x = \varphi_y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ se, e somente se, f é uma função afim.

- 6) Uma vela A queima completamente em 6 horas e uma vela B , de mesmo tamanho que A , queima em 4 horas suponha que se tenha acendido a vela A às 20:00h e a vela B às 21:00. A que horas a vela B , depois de acesa, atingirá o mesmo comprimento que a vela acesa?

- 7) Um alpinista começa a subir um monte às 8:00h da manhã e chega ao topo às 16:00h. No dia seguinte, ele começa a descida pelo mesmo caminho também às 8:00h e chega no ponto inicial às 16:00h. Mostre que, independente do ritmo de subida ou de descida, quantas paradas ele fez para descanso, quais as alterações de velocidade, etc, existe um ponto no caminho que ele passou exatamente na mesma hora, tanto na subida quanto na descida. (Sugestão, faça o gráfico da altura pelo tempo).

- 8) Uma função $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser par (resp. ímpar) se $\text{Dom}(f) = -\text{Dom}(f)$ e $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) para todo $x \in \text{Dom}(f)$. mostre que toda função com domínio simétrico, isto é, $\text{Dom}(f) = -\text{Dom}(f)$, pode ser escrita de maneira única como a soma de uma função par e de uma função ímpar.
- 9) Descreva qualitativamente como devem ser as propriedades de um gráfico de uma função par e de uma função ímpar. Dê exemplos de funções pares e ímpares e esboce-lhes os gráficos.
- 10) Uma função $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser convexa se dado um intervalo $[\alpha, \beta] \subseteq \text{Dom}(f)$ tivermos

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}, \quad \forall x \in]\alpha, \beta[.$$

Mostre que, para $a > 0$ as funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ são todas convexas.

- 11) Mostre que, para $a > 0$ (resp. $a < 0$) e para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ fica acima (resp. abaixo) da reta $y = f(x_0) + (2ax_0 + b)(x - x_0)$.
- 12) Seja $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ uma função bijetora. Mostre que o gráfico de $f^{-1} : \text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ é obtido pela reflexão do gráfico de f pela reta $y = x$.
- 13) Uma transformação de Möbius na reta é uma função real de uma variável dada por

$$f_{a,b,c,d}(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad ad - bc \neq 0.$$

- a) Determine o domínio e a imagem da transformação de Möbius $f_{a,b,c,d}$.
- b) Mostre que $f_{a,b,c,d}$ é injetiva.
- c) Mostre, que, para todo número real $\lambda \neq 0$ temos que $f_{a,b,c,d} = f_{\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d}$.
- d) Baseado no item anterior, mostre que qualquer transformação de Möbius pode ser escrita como $f_{a,b,c,d}$ com $ad - bc = 1$.
- e) Determine $f_{a,b,c,d} \circ f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$.
- f) Com isto, determine a inversa $f_{a,b,c,d}^{-1}$.