Uma extensão do Teorema de Steiner-Lehmus.

Paulo Ricardo Boff [6]

paulo@pet.mtm.ufsc.br

De acordo com a história disponível, em 1840, *Daniel Christian Ludolf Lehmus* (1780-1863), então professor em Berlim, escreveu uma carta ao suíço *Jacob Steiner* (1796-1863), o qual é considerado um dos geômetras mais importantes desde os tempos de Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.), pedindo-lhe uma demonstração "puramente geométrica" da solução do seguinte problema: *Se duas bissetrizes internas distintas de um triângulo forem iguais então o triângulo é isosceles,* que mais tarde viria a ser conhecido como o *Teorema de Steiner-Lehmus.*

Steiner encontrou, de fato, uma prova, e a publicou em 1844. Já Lehmus provou o teorema independentemente em 1850. Desde então este teorema foi provado por matemáticos e amadores. Mais de 80 provas corretas são, hoje, conhecidas.

O objetivo deste artigo é expor uma demonstração do Teorema de Steiner-Lehmus feita por redução ao absurdo, provar um teorema análogo, que chamaremos aqui de "Teorema de Gergonne-Steiner-Lehmus", no qual consideramos a igualdade de duas cevianas de Gergonne e, por fim, faremos uma extensão do primeiro teorema. Para tanto, consideremos, primeiramente, alguns conceitos básicos:

Definição 1. Ceviana de um triângulo ABC é um segmento que une um dos vértices a um ponto qualquer da reta que contém o lado oposto a esse vértice.

Definição 2. A bissetriz de um ângulo é uma semi-reta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes. E a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo é a ceviana contida na bissetriz desse ângulo.

Proposição 1. Seja ABC um triângulo qualquer de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Então $a \leqslant b \leqslant c$ se, e

[6] Graduando em Matemática e Computação Científica e bolsista PIBIC/CNPq da UFSC. E gostaria de agradecer o Professor José Luiz Rosas Pinho e os colegas Asteroide, Bianca, Edson e Leonardo por suas valiosas sugestões e correções de texto.

somente se, $\hat{A} \leqslant \hat{B} \leqslant \hat{C}$.

A demonstração desta proposição deixaremos a cargo do leitor. Uma dica é aplicar a Lei dos Senos[7] no triângulo ABC.

Teorema de Steiner-Lehmus. *Se duas bissetrizes internas distintas de um triângulo forem iguais o triângulo é isosceles.*

Após identificarmos os triângulos apropriados e construirmos um paralelogramo adequado (ver Figuras 20 e 21), a demonstração deste teorema se baseia essencialmente no resultado da Proposição 1.

Prova. Seja ABC um triângulo qualquer e sejam BE e CF bissetrizes dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ respectivamente, conforme a figura abaixo.

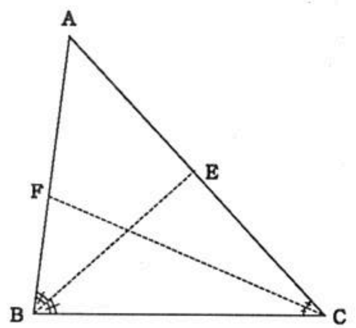


Figura 20: Triângulo ABC e as cevianas BE e CF.

[7]Considere um triângulo ABC de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Então vale a relação $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}}$

Suponha, por redução ao absurdo, que $BE = CF$ e $AB \neq AC$, com $AB < AC$. Dessa forma, pela Proposição 1,

$$A\hat{C}B < A\hat{B}C \Rightarrow \frac{A\hat{C}B}{2} < \frac{A\hat{B}C}{2}.$$

Por conseguinte, utilizando novamente a Proposição 1 e a hipótese $BE = CF$, temos que

$$CE > BF. \tag{1}$$

Agora, considere o paralelogramo $BFGE$, de modo que $EG = BF$ e $GF = BE$.

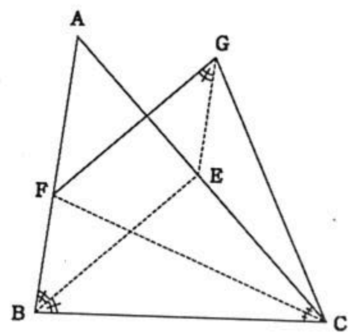


Figura 21: A construção do paralelogramo $BFGE$.

Então, como $BE = CF$, segue-se que $GF = CF$ e, conseqüentemente, $F\hat{G}C = F\hat{C}G$. Mas como

$$F\hat{G}E = \frac{A\hat{B}C}{2} > \frac{A\hat{C}B}{2} = F\hat{C}E,$$

podemos concluir que

$$E\hat{G}C < E\hat{C}G \quad \Rightarrow \quad CE < GE = BF,$$

o que contradiz (1). Do mesmo modo a suposição $AB > AC$ também nos conduz a uma contradição. Portanto, $AB = AC$ e o triângulo ABC é isósceles, completando a demonstração.

□

Para demonstrarmos o Teorema de Gergonne-Steiner-Lehmus vamos primeiramente entender o que é um ponto de Gergonne e uma ceviana de Gergonne.

Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. E sejam D, E e F pontos sobre os lados a, b e c respectivamente, tais que $AE = AF, BF = BD$ e $CD = CE$. É fácil ver que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

Assim, pelo Teorema de Ceva[8] temos que AD, BE e CF têm um único ponto G de concorrência. Tal ponto denomina-se *ponto de Gergone* [9]. E as cevianas que passam por G denominam-se *cevianas de Gergone* (ver Figura 22).

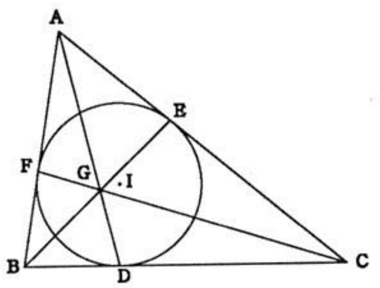


Figura 22: O ponto de Gergonne G e as de cevianas de Gergonne de um triângulo ABC.

[8] Sejam ABC um triângulo e AD, BE e CF cevianas relativas aos lados BC, AB e AC, respectivamente. Então uma condição necessária e suficiente para que estas cevianas tenham um único ponto de concorrência é que $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$.

[9] Este ponto é denominado ponto de Gergonne, em homenagem ao matemático francês Joseph Dias Gergonne (1771-1859)

Observação 1. Note que essas cevianas não coincidem necessariamente com as bissetrizes internas do triângulo ABC. Portanto G não coincide necessariamente com o incentro I do mesmo triângulo.

Observação 2. Pelo fato de D, E e F serem pontos de tangência do triângulo ABC segue-se que $AE = AF = p - a$, $BF = BD = p - b$ e $CD = CE = p - c$, em que $2p = a + b + c$.

Teorema de Gergonne-Steiner-Lehmus. *Se duas cevianas de Gergonne de um triângulo forem iguais, então o triângulo é isósceles.*

Uma idéia razoável para se demonstrar este teorema é supor que as cevianas sejam iguais e que o triângulo não seja isósceles. E a partir de então, construir uma argumentação semelhante àquela usada na demonstração do teorema anterior. Entretanto, utilizaremos um resultado bem conhecido como ferramenta para demonstrar este teorema, que é a Lei dos Cossenos[10], pelo fato de estabelecer uma relação entre um lado do triângulo, seu ângulo oposto e os lados que definem este ângulo.

Prova. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, e sejam BE e CF as cevianas de Gergonne do mesmo triângulo (ver Figura 23).

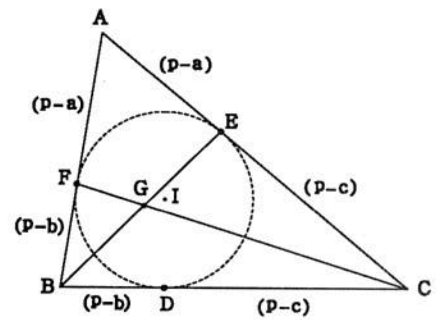


Figura 23: Teorema de Gergonne-Steiner-Lehmus.

[10] Em um triângulo qualquer ABC de lados BC, AC e AB que medem respectivamente a, b e c e com ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ valem as relações: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.

Aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos ABE e ACF temos que

$$BE^2 = c^2 + (p-a)^2 - 2c(p-a)\cos\hat{A}$$

e

$$CF^2 = b^2 + (p-a)^2 - 2b(p-a)\cos\hat{A}.$$

Usando a hipótese $BE = CF$ segue-se que

$$c^2 + (p-a)^2 - 2c(p-a)\cos\hat{A} = b^2 + (p-a)^2 - 2b(p-a)\cos\hat{A}$$
$$\Rightarrow 2(b-c)(p-a)\cos\hat{A} - (b^2-c^2) = 0$$
$$\Rightarrow (b-c)\left[2(p-a)\cos\hat{A} - (b+c)\right] = 0$$

Tendo em vista que $2(p-a) = (b+c-a)$ e $\cos\hat{A} = \left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$, temos que

$$(b-c)\left[(b+c-a)\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right) - (b+c)\right] = 0.$$

Então, agora há dois casos a considerar:

$i)$ $b - c = 0 \Rightarrow b = c$,

e neste caso ABC é um triângulo isósceles.

$ii)$ $(b+c-a)\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right) - (b+c) = 0$

$$\Rightarrow (b+c-a)(b^2+c^2-a^2) - 2bc(b+c) = 0$$
$$\Rightarrow b^2(c+a-b) + c^2(b+a-c) + a^2(b+c-a) = 0,$$

o que aconteceria somente se os três lados do triângulo fossem nulos (Verifique!). Como, obviamente, não estamos considerando este caso, $ii)$ não pode acontecer. Portanto, o triângulo ABC é isósceles.

□

Teorema (Uma Extensão do Teorema de Steiner-Lehmus). Seja ABC um triângulo. Suponha que as bissetrizes dos ângulos $\angle ACB$ e $\angle ABC$ se encontram com a ceviana de Gergone AD nos pontos E e F, respectivamente. Se $BE = CF$ então o triângulo ABC é isósceles.

Prova. Seja ABC um triângulo qualquer de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ e seja AD a ceviana de Gergonne relativa ao lado BC (ver Figura 24).

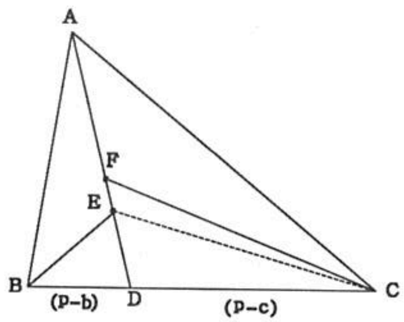


Figura 24: Extensão do Teorema de Steiner-Lehmus.

Suponha que $AB \neq AC$, com $AC > AB$. Então

$$b > c \Rightarrow p - b < p - c.$$

Pela Proposição 1 sabemos que

$$A\hat{B}C > A\hat{C}B \Rightarrow \frac{A\hat{B}C}{2} > \frac{A\hat{C}B}{2} \Rightarrow E\hat{B}C > F\hat{C}D > E\hat{C}B.$$

Conseqüentemente, como $BE = CF$, segue-se que

$$CE > BE = CF. \qquad (2)$$

Sem perda de generalidade, consideremos $A\hat{D}C = E\hat{D}C \geqslant \frac{\pi}{2}$ (o caso $E\hat{D}C < \frac{\pi}{2}$ é análogo). Logo

$$F\hat{E}C = E\hat{D}C + E\hat{C}D \geqslant \frac{\pi}{2}$$

e

$$E\hat{F}C < \frac{\pi}{2} \Rightarrow CE < CF = BE,$$

contradizendo (2). Analogamente, a suposição $AC < AB$ conduz também a uma contradição. Portanto, o triângulo ABC é isosceles, como queríamos mostrar.

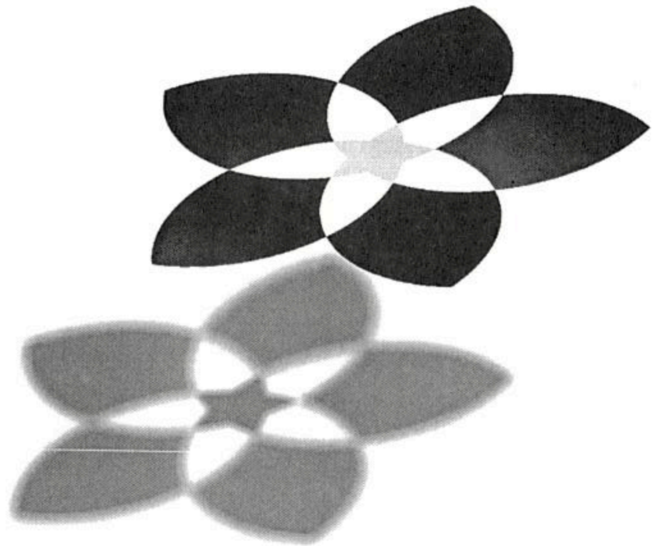
□

Referências

[1] HAJJA. Mowaffaq, ***Other Versions of Steiner-Lehmus Theorem.*** The Americam Mathematical Monthly, V. 108 (2001) 760-767.

[2] HEATH.Thomas L,***The Thirteen Books of Euclid's Elements.***Vol.1, (1956).

[3] M. Lewin, ***On the Steiner-Lehmus theorem.*** Math. Mag, v. 47, (1974) 87-89.



Soluções dos Problemas Propostos