Áreas e Semelhanças

Eliezer Batista [1]

Resumo

Analisando-se a maioria dos problemas geométricos presentes em olimpíadas de matemática, podemos perceber uma forte tendência a explorar a interrelação entre diversos aspectos quantitativos das figuras. Uma fonte inesgotável de problemas de diversos níveis de dificuldade são os problemas envolvendo áreas e semelhanças. Neste artigo, primeiramente revisaremos os conceitos geométricos envolvidos; posteriormente, através da análise de problemas, explicitaremos algumas técnicas envolvendo o uso de semelhanças e o cálculo de áreas de figuras planas.

Áreas de Figuras Planas

A noção de área é um conceito primitivo em geometria, isto é, não podemos definir o que é área mas podemos formular axiomas para estabelecermos seu funcionamento. Basicamente, a área é um número real positivo associado a um determinado tipo de subconjunto do plano. Mais precisamente, os subconjuntos do plano para os quais se pode atribuir um valor de área são aqueles delimitados por uma curva fechada, simples e de variação limitada. Por curva fechada, entende-se de maneira intuitiva uma curva que pode ser obtida por deformação contínua de uma circunferência. Por curva simples, entende-se uma curva que não possui auto intersecções. Finalmente, a terceira condição, mais técnica, significa basicamente que a curva não oscila de maneira incontrolável. Com estas três primeiras condições, pode-se mostrar que esta curva divide os pontos do plano que não estão sobre a mesma em dois subconjuntos disjuntos: o lado de dentro e o lado de fora. Vamos simplesmente denominar estes tipos de subconjuntos de regiões planas.

Definição 1 *Dada uma região plana Σ, a área desta região plana é o número $A(\Sigma) \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo às seguintes condições.*

[1] Professor do Departamento de Matemática da UFSC.

(i) Se duas regiões planas Σ e Σ' são congruentes, isto é, existe um movimento rígido que leva uma na outra, então $A(\Sigma) = A(\Sigma')$.

(ii) Se a intersecção de duas regiões planas, Σ e Σ', não contêm pontos interiores, então $A(\Sigma \cup \Sigma') = A(\Sigma) + A(\Sigma')$.

(iii) A área de um quadrado de lado unitário é igual a 1.

Note que os dois primeiros itens nos conduzem a uma interessante consequência: se quisermos medir a área de uma figura complexa, podemos sempre subdividí-la em regiões simples e calcularmos as áreas destas regiões de forma a obtermos por adição a área desejada. Duas figuras planas que podem ser formadas com o mesmo conjunto de peças elementares são chamadas equicompostas ou equidecomponíveis [1]. Também podemos aumentar a região, acrescentando outras figuras simples, de modo que saibamos calcular a área, de forma a obtermos também uma figura maior mais simples. Neste caso, a área desejada é obtida por subtração. Duas figuras planas que, acrescentando-se o mesmo conjunto de peças formam figuras congruentes, são denominadas equicomplementáveis [1]. Vamos ilustrar estes métodos na análise dos problemas nas seções seguintes.

O cálculo do valor numérico da área, que é o real objetivo, depende estritamente do terceiro item, que nos fornece uma unidade padrão para o cálculo de áreas. Medir a área de uma região plana significa comparar esta região com o padrão dado. O teorema a seguir, que apresentaremos sem demonstração[2], é o primeiro passo na direção de determinarmos as áreas das figuras planas conhecidas e, conceitualmente, também este é o teorema mais complexo.

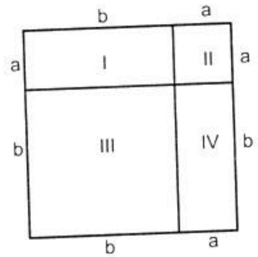
Teorema 1 *A área de um quadrado de lado a é igual a a^2.*

A dificuldade principal da demonstração deste teorema está no cálculo da área de um quadrado cuja medida do lado seja um número irracional. Uma vez assumido este resultado, todas as outras áreas de figuras poligonais decorrem automaticamente, com o uso apenas dos itens (i) e (ii). Vamos primeiramente calcular o valor da área de um retângulo.

Teorema 2 *A área de um retângulo é igual ao produto das medidas de seus lados.*

Demonstração: Considere um retângulo de lados a e b e construamos um quadrado de lado igual a $(a + b)$ dividido em quatro regiões conforme ilustrado na figura seguinte.

[2] Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada na referência [2].



Por um lado, a área total do quadrado, pelo item (ii) da definição de área, é igual à soma das áreas das regiões I, II, III e IV. As regiões I e IV são retângulos de lados a e b, portanto são figuras congruentes (é fácil ver que é possível movimentar um dos retângulos até sobrepô-lo ao outro), e pelo item (i), concluímos que têm a mesma área, ou seja $A_I = A_{IV} = A$. A região II é um quadrado de lado a, portanto de área igual a a^2. A região III, por sua vez, é um quadrado de lado b, com área b^2. O quadrado total, de lado $(a+b)$ possui área igual a $(a+b)^2$. Logo

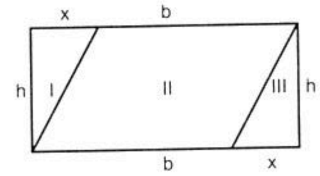
$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= 2A + a^2 + b^2 \\ ab &= A \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a área $A = ab$. ■

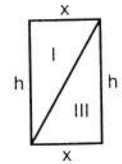
Uma vez conhecido o valor da área de um retângulo, podemos deduzir a fórmula para o valor da área de um paralelogramo. Um paralelogramo é um quadrilátero que possui os seus pares de lados opostos paralelos. Tomemos um dos pares de lados opostos do paralelogramo e o denominemos de base. A distância entre estas duas retas paralelas será denominada altura. Então, temos o seguinte resultado.

Teorema 3 *A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela sua altura correspondente.*

Demonstração: Considere um paralelogramo cuja medida da base é igual a b e cuja altura é igual a h. Sejam dois triângulos retângulos, que serão denominados por I e III, de forma que o paralelogramo unido aos dois triângulos forme um retângulo, conforme ilustrado na figura seguinte.



As medidas das hipotenusas dos triângulos I e III são iguais, correspondendo ao par de lados paralelos do paralelogramo, que na figura é denotado como região II. Também estes dois triângulos retângulos possuem um dos catetos com medida igual à altura do paralelogramo. Portanto, podemos concluir que estes triângulos são congruentes. Logo, possuem a mesma área. Seja x a medida do outro cateto destes triângulos. Assim, as regiões I, II e III formam juntas um retângulo de lados $b + x$ e h, cuja área é igual a $(b+x)h$. Por outro lado, os triângulos I e III, juntos, formam um retângulo de lados x e h, cuja área é igual a xh, conforme ilustrado na figura abaixo.



Portanto, temos que

$$(b+x)h = bh + xh = A_I + A_{II} + A_{III} = A_{II} + xh,$$

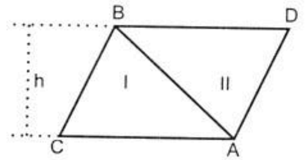
o que nos leva à conclusão que $A_{II} = bh$, como queríamos. ■

Note que, esta fórmula nos diz que a área do paralelogramo só depende da medida de sua base e da sua altura, não importando sua forma, ou seja, a inclinação do outro par de lados paralelos. Outra importante conclusão é que o raciocínio usado na demonstração do teorema acima pode ser feito igualmente se usarmos o outro par de lados paralelos como base, e considerarmos a altura relativa a estas bases. O resultado numérico será o mesmo.

A partir da expressão para a área de um paralelogramo, podemos também deduzir a expressão da área de um triângulo. Se escolhermos qualquer um dos lados, que será denominado base do triângulo, podemos definir a altura relativa àquela base como sendo a distância entre a reta que a contém e o vértice oposto à base.

Teorema 4 *A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela sua altura correspondente.*

Demonstração: Seja ΔABC um triângulo cuja medida da base $\overline{AC}$ é igual a b e cuja altura relativa a esta base é igual a h. Denominemos este triângulo de região I. Considere também um triângulo ΔBAD congruente ao primeiro triângulo dado, o qual chamaremos de região II, e o coloque na posição indicada pela figura abaixo.



Como $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$, temos que $\angle BAC \equiv \angle ABD$. Logo, $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BD}$. Também $\angle ACB \equiv \angle BDA$. Logo, $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{AD}$. Portanto $ADBC$ é um paralelogramo cuja base mede b e cuja altura é igual a h. Assim

$$bh = A_I + A_{II} = 2A_I,$$

o que nos leva à conclusão que $A_I = \frac{1}{2}bh$. ■

Note mais uma vez que o mesmo raciocínio pode ser utilizado para qualquer escolha que se faça de um dos lados do triângulo para que seja base, desde que se tome a altura respectiva: o resultado numérico será o mesmo.

Também, notamos que, como a área de um triângulo somente depende da medida da base e da altura relativa a esta base, dois triângulos com mesma base e mesma altura possuem a mesma área, muito embora seu formato possa diferir. Também, é importante e útil na resolução de problemas, notar que a razão entre as áreas de dois triângulos de mesma altura é igual à razão entre as bases. E que a razão entre dois triângulos de mesma base é igual à razão entre suas alturas. Vamos utilizar estes conceitos nos problemas que serão analisados logo adiante.

A partir destas áreas elementares, é possível calcular as áreas de quaisquer regiões planas delimitadas por polígonos, pois toda região deste tipo admite uma triangularização [5]. Assim, a partir da triangularização, ao calcularmos as áreas de todos os triângulos envolvidos na figura e somá-los, obteremos a área da figura plana desejada. Para figuras planas delimitadas por curvas mais gerais, utiliza-se um processo de limite, aproximando-se a curva que delimita a região por polígonos de número cada vez maior de lados. No entanto, este tratamento fica fora do escopo do presente artigo.

Exercício 1 *Mostre que a área de um trapézio é igual ao produto entre a média aritmética das medidas dos lados paralelos (bases) e a altura do trapézio.* (**Sugestão:** *Divida o trapézio em dois triângulos cujas bases são os lados paralelos do trapézio)*

Semelhança e Homotetia

Uma semelhança é, intuitivamente falando, uma transformação realizada sobre uma dada figura que preserva as proporções e posições relativas entre suas partes. Qualquer movimento rígido, de rotação, translação ou reflexão é uma semelhança, uma vez que todas as medidas são estritamente preservadas. Mas, se efetuarmos uma mudança global de escalas, também as proporções são preservadas. Este é o princípio básico utilizado pelos profissionais que trabalham com maquetes. A apresentação que faremos de semelhança, embora com algumas modificações, é fortemente baseada na exposição dada no texto [3].

Definição 2 *Uma transformação de semelhança (ou simplesmente uma semelhança) de razão r em um plano Π é um par (σ, r) em que $\sigma : \Pi \to \Pi$ é uma função, e r é um número real estritamente positivo, tal que, para todo par de pontos $A, B \in \Pi$ temos $\sigma(A)\sigma(B) = rAB$.*

Definição 3 *Duas figuras planas, isto é, dois subconjuntos Ω e Ω' de pontos do plano, são ditos semelhantes se existir uma transformação de semelhança σ no plano tal que $\sigma(\Omega) = \Omega'$.*

Podemos, de fato definir transformações de semelhança para quaisquer espaços vetoriais. Mas neste artigo nos restringiremos a semelhanças no plano.

Primeiramente, é importante ressaltarmos as propriedades geométricas das semelhanças, pois são estas propriedades que as tornam tão úteis no estudo da geometria como um todo. Talvez um dos resultados mais simples e mais importantes é o fato de que toda transformação de semelhança preserva colinearidade entre pontos.

Teorema 5 *Uma transformação de semelhança associa pontos colineares a pontos colineares e pontos não colineares a pontos não colineares.*

Demonstração: Seja σ uma transformação de semelhança de razão r e sejam A, B e C três pontos colineares no plano. Sem perda de generalidade, suponha que B esteja entre A e C, isto é, o ponto B pertence ao segmento $\overline{AC}$. Assim

$$AC = AB + BC.$$

Sejam $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$, temos que

$$A'C' = rAC = r(AB + BC) = rAB + rBC = A'B' + B'C'.$$

Portanto, os pontos A', B' e C' são colineares. Por outro lado, suponha agora que os três pontos A, B e C formem um triângulo, isto é, não são colineares. Pela desigualdade triangular temos

$$AC < AB + BC, \qquad AB < AC + BC, \qquad BC < AB + AC.$$

Novamente, sejam $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$, assim

$$A'C' = rAC < r(AB + BC) = rAB + rBC = A'B' + B'C'.$$

De igual modo, conseguimos provar que $A'B' < A'C' + B'C'$ e $B'C' < A'B' + A'C'$. Logo, os três pontos A', B' e C' não são colineares. ■

Também é imediato que uma semelhança é uma aplicação injetiva, conforme a seguinte proposição.

Proposição 6 *Uma semelhança $\sigma : \Pi \to \Pi$ de razão $r > 0$ é uma aplicação injetiva no plano.*

Demonstração: Sejam dois pontos $A, B \in \Pi$ tais que $A' = \sigma(A) = \sigma(B) = B'$, assim $A'B' = 0$. Por outro lado $A'B' = rAB$. O que nos leva à conclusão que $AB = 0$, ou seja $A = B$. Portanto σ é uma aplicação injetiva. ■

A injetividade nos garante que se duas figuras não se intersectam, então dada uma semelhança no plano, as figuras semelhantes a elas por esta semelhança também não se intersectarão. O fato de uma semelhança ser uma função nos diz que se duas figuras se intersectam, então dada uma semelhança no plano, as figuras semelhantes a elas também se intersectarão.

Enunciaremos aqui, sem demonstração, uma série de resultados que nos garantem que as transformações de semelhança preservam bem as características dos objetos transformados.

Teorema 7 *(1) A imagem de uma (semi)reta por uma semelhança é uma reta.*

(2) A imagem inversa de uma (semi)reta por uma semelhança é uma reta.

(3) A imagem de um segmento por uma semelhança é um segmento.

(4) A imagem inversa de um segmento por uma semelhança é um segmento.

(5) A imagem de uma circunferência (um círculo) por uma semelhança é uma circunferência (um círculo), seus centros estão correlacionados e o raio da imagem é o raio da primeira multiplicado pela razão de semelhança.

(6) A imagem inversa de uma circunferência (um círculo) por uma semelhança é uma circunferência (um círculo), seus centros estão correlacionados e o raio da pré imagem é o raio da circunferência dada (do círculo dado) dividido pela razão de semelhança.

(7) Uma semelhança associa pontos interiores (exteriores, de fronteira) a pontos interiores (exteriores, de fronteira).

(8) Uma semelhança associa ângulos a ângulos.

(9) Uma semelhança associa uma poligonal a uma outra poligonal com o mesmo número de vértices e arestas.

Estes fatos geométricos nos ajudam a provar um resultado importante, que garante que toda semelhança é uma bijeção.

Teorema 8 *Uma semelhança $\sigma : \Pi \to \Pi$ de razão $r > 0$ é uma bijeção no plano.*

Demonstração: Já demonstramos a injetividade anteriormente. Só nos resta agora demonstrar a sobrejetividade. Primeiramente, devemos observar que no conjunto imagem da semelhança σ deve haver três pontos não colineares, pois no plano existem três pontos não colineares e toda semelhança associa pontos não colineares a pontos não colineares. Sejam $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$ estes três pontos e seja P um ponto arbitrário que queremos provar que também faz parte do conjunto imagem. Considere as distâncias de P aos pontos A', B' e C', respectivamente $a = A'P$, $b = B'P$ e $c = C'P$. Então o ponto P está na intersecção de três circunferências: a circunferência de centro A' e raio a, a circunferência de centro B' e raio b e a circunferência de raio C' e raio c. O teorema anterior nos garante que estas circunferências, respectivamente, são imagens da circunferência de centro A e raio $\frac{a}{r}$, da circunferência de centro B e raio $\frac{b}{r}$ e da circunferência de centro C e raio $\frac{c}{r}$. Como as imagens destas três circunferências se intersectam no ponto P e a semelhança é uma função injetora, temos que estas três circunferências também se intersectam em um ponto X. Também é fácil verificar que três circunferências cujos centros não são colineares podem ter, no máximo, um ponto em comum. Portanto, o ponto P é a imagem por esta semelhança do ponto X, garantindo a sobrejetividade. ■

Ao trabalharmos com semelhanças como bijeções, torna-se interessante analisarmos o que ocorre quando fazemos a composição de diversas semelhanças, bem como sabermos como uma determinada semelhança se decompõe em transformações de semelhança mais elementares. Primeiramente, precisamos entender que o conjunto das transformações de semelhança é fechado pela composição, isto é, a composta de duas transformações de semelhança é também uma semelhança. Em termos técnicos, o conjunto das transformações de semelhança no plano constitui um grupo.

Proposição 9 *(1) A composta de duas transformações de semelhança é uma transformação de semelhança.*

(2) A inversa de uma transformação de semelhança é uma transformação de semelhança.

Demonstração: (1) Sejam ρ e σ duas semelhanças com razões de semelhança, respectivamente, iguais a r e s. Sejam dois pontos A e B no plano. Denotemos $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$, $A'' = \rho(A')$ e $B'' = \rho(B')$. Então temos

$$A''B'' = rA'B' = rsAB.$$

Portanto, a composta $\rho \circ \sigma$ é uma semelhança de razão rs.

(2) Como uma semelhança é uma bijeção, então sempre existe a inversa. Seja σ uma semelhança de razão r e sejam A e B dois pontos quaisquer do plano. Denotando $A' = \sigma(A)$ e $B' = \sigma(B)$, temos que $A = \sigma^{-1}(A')$ e $B = \sigma^{-1}(B')$. Logo

$$A'B' = rAB, \text{ ou seja, } AB = \tfrac{1}{r}A'B'.$$

Portanto, σ^{-1} é uma semelhança de razão $\frac{1}{r}$. ■

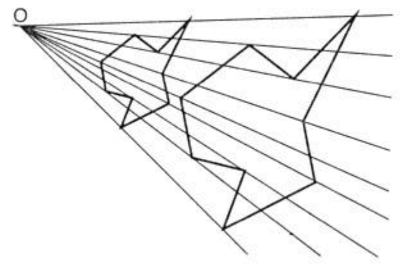
Finalmente, falta-nos identificar as semelhanças elementares, de forma que toda transformação de semelhança possa ser escrita como a composta destas semelhanças. É uma ideia equivalente a escrevermos os números naturais como produtos de números primos. Em primeiro lugar, é importante notar que toda isometria (translações, rotações, simetrias axiais, simetrias centrais e composições destas) são semelhanças. A única liberdade que uma semelhança pode ter em relação a uma isometria é exatamente a mudança de escala. Vamos apresentar as transformações de semelhança mais elementares que permitem mudança de escala, as homotetias.

Definição 4 *Uma homotetia de centro O e razão $r > 0$ é uma função $h : \Pi \to \Pi$ tal que:*

(h1) $h(O) = O$.

(h2) Para qualquer ponto $A \neq O$, $h(A) = A'$ é um ponto sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$ tal que $OA' = rOA$.

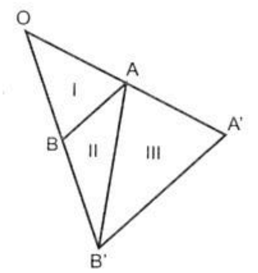
A figura abaixo nos mostra como é uma homotetia.



Vamos mostrar que toda homotetia é uma transformação de semelhança que associa retas paralelas. Além do mais, vamos verificar que toda transformação de semelhança é a composição de uma homotetia com uma isometria, ou seja, toda a responsabilidade pela mudança de escala é devida a uma homotetia (é óbvio que temos uma liberdade infinita de escolhas para esta homotetia, pois a mesma pode ser feita com centro em qualquer ponto escolhido).

Teorema 10 *Uma homotetia é uma transformação de semelhança que associa cada reta ou a si própria ou a uma reta paralela.*

Demonstração: Seja uma homotetia h de centro O e razão r. Primeiramente, é fácil ver que se uma determinada reta passa pelo ponto O, todos os seus pontos serão associados a pontos sobre a mesma reta, isto devido à própria definição de homotetia. Para verificarmos que h é uma transformação de semelhança, considere dois pontos A e B no plano. Se, por exemplo $A = O$ então $h(O) = O$ e $h(B) = B'$ é tal que $OB' = rOB$, por definição, o que já verificaria a propriedade de semelhança neste caso particular. Então, suponhamos que ambos os pontos A e B sejam diferentes de O. Ainda assim, temos dois casos a verificar, o caso em que eles são colineares com O e o caso em que A, O e B formam um triângulo. Se A, O e B são colineares, podemos ter que O está entre A e B, isto é, estão em semirretas opostas em relação a O, ou podemos ter que A e B estão sobre a mesma semirreta em relação a O. No primeiro caso, temos $AB = AO + OB$, então $A'B' = A'O + OB' = rAO + rOB = r(AO + OB) = rAB$. No segundo caso (sem perda de generalidade, suponha que A esteja entre O e B), temos que $OB = OA + AB$. Assim, $A'B' = OB' - OA' = rOB - rOA = r(OB - OA) = rAB$. Isto verifica a condição de semelhança para todos os casos em que A, B e O são colineares. Falta-nos o caso mais difícil: quando A, O e B não são colineares. Na figura seguinte, vamos fazer a ilustração para $r > 1$, mas o raciocínio é completamente análogo para o caso $r < 1$.



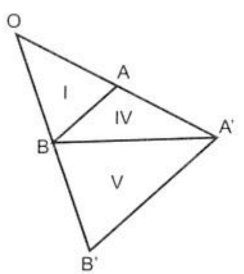
Como $OB' = rOB$, da figura acima deduzimos que a área do triângulo formado pelas regiões I e II é igual a r vezes a área do triângulo correspondente à região I, pois são dois triângulos de mesma altura. Também temos, devido ao fato que $OA' = rOA$, que a área do triângulo formado pelas regiões I, II e III é igual a r vezes a área do triângulo formado pelas regiões I e II. Assim

$$A(I) + A(II) = rA(I) \quad \Rightarrow \quad A(II) = (r-1)A(I) \tag{1}$$

e

$$\begin{aligned} & A(I) + A(II) + A(III) = r(A(I) + A(II)) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & rA(I) + A(III) = rA(I) + rA(II) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & A(III) = rA(II). \end{aligned} \tag{2}$$

Agora, considere a mesma região mas com outra configuração de triângulos, conforme a figura abaixo.



Nesta figura, temos a seguinte relação:

$$A(I) + A(IV) = rA(I) \quad \Rightarrow \quad A(IV) = (r-1)A(I). \tag{3}$$

Comparando as fórmulas (1) e (3), temos que $A(IV) = A(II)$. Como são dois triângulos de base $\overline{AB}$, concluímos que eles devem ter a mesma altura, o que nos leva à conclusão que $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{A'B'}$. Por outro lado, a fórmula (2) nos diz que a área do triângulo correspondente à região III é r vezes a área do triângulo relativo à região II. Como estes triângulos possuem a mesma altura, a razão entre as medidas de suas bases deve ser igual a r, portanto $A'B' = rAB$. ■

A própria demonstração deste teorema é um belíssimo exemplo do uso de áreas para resolução de problemas geométricos. Note que utilizamos várias vezes o princípio que foi discutido na seção anterior, que a razão entre as áreas de dois triângulos de mesma altura é igual à razão entre suas bases. Para também transitarmos no sentido contrário, isto é, para utilizarmos técnicas de semelhanças para a resolução de problemas de áreas, precisamos de mais alguns resultados que estão relacionados com semelhanças de triângulos. Mas antes vamos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 11 *Toda transformação de semelhança é a composição de uma homotetia e de uma isometria.*

Demonstração: Considere uma semelhança σ de razão r, sejam A, B e C três pontos não colineares e sejam ainda $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$. Podemos efetuar uma homotetia h de centro A e razão r. Então, tomando os pontos $A = h(A)$, $B'' = h(B)$ e $C'' = h(C)$, temos que os triângulos $\Delta AB''C''$ e $\Delta A'B'C'$ são congruentes pelo caso LLL. Logo existe uma isometria f, que associa o ponto A ao ponto A', o ponto B'' ao ponto B' e o ponto C'' ao ponto C'. Como todos os outros pontos do plano estão unicamente determinados pelas suas distâncias a três pontos não colineares fixos, temos que a semelhança σ é a composta $f \circ h$. ■

As ferramentas mais importantes de semelhança em geometria estão relacionadas com semelhanças de triângulos. Dois triângulos são semelhantes se existir uma transformação de semelhança que mapeia um deles no outro. Denotaremos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ para indicarmos que os dois triângulos são semelhantes, ou seja, que existe uma semelhança $\sigma : \Pi \to \Pi$ tal que $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$. Os resultados a seguir mostram critérios para reconhecermos se dois triângulos são semelhantes.

Teorema 12 (**Teorema Fundamental de Semelhança de Triângulos**) *Considere um triângulo ΔABC e pontos $D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$. Então os triângulos ΔABC e ΔADE são semelhantes se, e somente se, $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$.*

Demonstração: Suponha que os triângulos sejam semelhantes. Portanto existe $r > 0$ tal que $AD = rAB$ e $AE = rAC$. Então os pontos D e E são imagem por uma homotetia de centro A e razão r, respectivamente, dos pontos B e C, o que nos leva à conclusão que $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$.

Suponha, por outro lado, que $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$. Então os triângulos ΔDEB e ΔDEC possuem a mesma área, pois a base de ambos é o segmento $\overline{DE}$ e a altura de ambos é a distância entre estas duas retas paralelas (faça a figura). Assim

$$\begin{aligned}\frac{A(\Delta ABE)}{A(\Delta ADE)} &= \frac{A(\Delta ADE) + A(\Delta DEB)}{A(\Delta ADE)} = \\ &= \frac{A(\Delta ADE) + A(\Delta DEC)}{A(\Delta ADE)} = \\ &= \frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ADE)}.\end{aligned}$$

Como a razão entre as áreas destes triângulos é igual à razão entre as bases correspondentes, temos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{r}.$$

Assim, uma homotetia de centro A e razão r associaria o ponto B ao ponto D e o ponto C ao ponto E. Portanto $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. ■

Teorema 13 *Considere os triângulos ΔABC e ΔDEF.*

(1) (Caso ângulo-ângulo, AA) Se $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e $\angle ABC \equiv \angle DEF$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

(2) (Caso lado-ângulo-lado, LAL) Se $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

(3) (Caso lado-lado-lado, LLL) Se $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demonstração: (1) Considere o ponto $X \in \overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AX} \equiv \overline{DE}$, e considere a semirreta $\overrightarrow{XZ}$ tal que Z esteja do mesmo lado que C e $\angle AXZ \equiv \angle DEF$ (a existência deste ponto e desta semirreta estão garantidos pelos axiomas da geometria elementar). Podemos facilmente mostrar que, nestas condições $\overleftrightarrow{XZ} // \overleftrightarrow{BC}$, portanto existe um ponto Y no cruzamento da semirreta $\overrightarrow{AC}$ com a semirreta $\overrightarrow{XZ}$. Pelo teorema fundamental $\Delta ABC \sim \Delta AXY$ e pelo caso ALA de congruência de triângulos,

temos que $\Delta AXY \equiv \Delta DEF$, e portanto, se são congruentes, são semelhantes. Compondo estas duas semelhanças obtidas, podemos concluir que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

(2) Considere os pontos $X \in \overrightarrow{AB}$ e $Y \in \overrightarrow{AC}$ tais que $\overline{AX} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{AY} \equiv \overline{DF}$. Como

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = r,$$

temos que

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC} = r.$$

Portanto, a homotetia de centro A e razão r mapeia os pontos B e C, respectivamente, nos pontos X e Y, o que faz com que $\Delta ABC \sim \Delta AXY$. Por outro lado, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $\Delta AXY \equiv \Delta DEF$, e portanto, estes triângulos são semelhantes. Compondo as duas semelhanças, temos finalmente que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

(3) Considere a homotetia h de centro A e razão

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = r.$$

Denomine $X = h(B)$ e $Y = h(C)$. Portanto, temos que $\Delta ABC \sim \Delta AXY$. Por outro lado, temos que $AX = rAB = DE$, $AY = rAC = DF$ e $XY = rBC = EF$. Pelo caso LLL de congruência de triângulos, podemos concluir que $\Delta AXY \equiv \Delta DEF$. Novamente, compondo estas semelhanças, obtemos que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. ■

Este teorema nos diz que não precisamos verificar todos os detalhes de dois triângulos para sabermos se eles são congruentes. Basta verificarmos dois ângulos, ou a razão entre dois lados e o ângulo entre eles ou a razão entre os três lados respectivos. Isto se deve ao fato que um triângulo é uma figura bastante simples, e portanto possui uma certa rigidez, pois tem apenas um número limitado de combinações possíveis de medidas de lados e ângulos.

Exercício 2 *Mostre que, se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ e $\Delta DEF \sim \Delta XYZ$, então $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$.*

Exercício 3 *Considere dois triângulos semelhantes ΔABC e $\Delta A'B'C'$. Mostre que escolhidas as bases respectivas nos dois triângulos, por exemplo $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, as suas alturas respectivas também estão na mesma proporção, isto é, $\frac{H'}{H} = \frac{A'B'}{AB}$.*

O último grande resultado que nos auxiliará na resolução de problemas geométricos é a relação que existe entre áreas de figuras semelhantes. Basicamente, o que se tem é que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Proposição 14 *Seja $\sigma : \Pi \to \Pi$ uma semelhança de razão r e sejam Ω e Ω' duas regiões do plano Π, delimitadas por curvas fechadas e simples, tais que $\Omega' = \sigma(\Omega)$. Então $A(\Omega') = r^2 A(\Omega)$.*

Demonstração: Iniciemos com o caso mais simples: Quando a região Ω for um triângulo ΔABC, então $\Omega' = \Delta A'B'C'$, onde $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ e $C' = \sigma(C)$. Escolhamos como base, por exemplo $\overline{AB}$, e seja H a medida da altura relativa a esta base. Então $A'B' = rAB$ e $H' = rH$, onde H' é a altura relativa à base $\overline{A'B'}$. Logo

$$A(\Delta A'B'C') = \frac{1}{2}A'B'.H' = \frac{1}{2}rAB.rH = r^2.\frac{1}{2}AB.H = r^2.A(\Delta ABC).$$

Se Ω for um polígono, é possível mostrar que existe uma triangulação para este polígono [4]. Portanto, podemos subdividir a região Ω em triângulos $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$. Sejam $\Delta_i' = \sigma(\Delta_i)$, para $i = 1, \ldots, n$. Assim, a região Ω' ficará subdividida em triângulos $\Delta_1', \Delta_2', ..., \Delta_n'$. Portanto

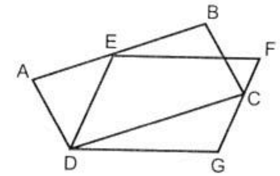
$$A(\Omega') = \sum_{i=1}^{n} A(\Delta_i') = \sum_{i=1}^{n} r^2 A(\Delta_i) = r^2 A(\Omega).$$

Para regiões delimitadas por curvas fechadas e simples em geral, o procedimento é estimar a área da região por um limite entre polígonos inscritos e circunscritos de número arbitrário de lados que aproximem a curva (isto é, tenham os vértices sobre a curva). Como para cada polígono a relação vale, pode-se mostrar que esta relação permanece no limite. ■

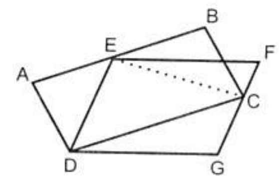
Análise de Problemas Selecionados

Nesta seção, vamos analisar alguns problemas de teor olímpico de níveis variados que envolvam os conceitos apresentados nas seções anteriores.

Problema 1 *Sejam $ABCD$ e $DEFG$ dois paralelogramos tais que $C \in \overline{FG}$ e $E \in \overline{AB}$, conforme a figura seguinte. Mostre que ambos os paralelogramos possuem a mesma área.*



Resolução: Este é um problema bem simples, cujo propósito básico é exercitar nossa capacidade de reconhecer a mesma figura em posições diferentes. O único artifício necessário para a resolução deste problema é a construção do segmento $\overline{EC}$, conforme nos mostra a figura abaixo.



Agora, só nos resta observar que o triângulo ΔCED pode ser visto de duas maneiras diferentes: primeiramente, se considerarmos como base o lado $\overline{CD}$ temos que este triângulo possui a mesma base e a mesma altura que o paralelogramo $ABCD$. Portanto

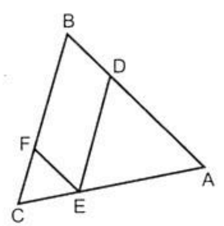
$$A(\Delta CED) = \frac{1}{2}A(ABCD).$$

Por outro lado, se considerarmos a base do triângulo como o lado $\overline{DE}$, verificamos que este mesmo triângulo possui a mesma base e mesma altura que o paralelogramo $DEFG$. Portanto

$$A(\Delta CED) = \frac{1}{2}A(DEFG).$$

Destas duas igualdades, decorre a igualdade entre as áreas dos paralelogramos dados.

Problema 2 *Considere em um triângulo ΔABC os pontos $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ e $F \in \overline{BC}$ tais que $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{AB}$, conforme nos ilustra a figura seguinte. Se a área do triângulo ΔADE é quatro vezes a área do triângulo ΔCEF calcule a razão entre as áreas dos triângulos ΔBFD e ΔABC.*



Resolução: Como $\overleftrightarrow{DE}//\overleftrightarrow{BC}$, temos, pelo teorema fundamental, que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. Também, $\overleftrightarrow{EF}//\overleftrightarrow{AB}$. Logo, pelo teorema fundamental, temos que $\Delta ABC \sim \Delta EFC$. Portanto, também concluímos que $\Delta ADE \sim \Delta EFC$. Como

$$\frac{A(\Delta ADE)}{A(\Delta CEF)} = 4,$$

podemos concluir, pelo último teorema da seção anterior, que a razão de semelhança entre estes dois triângulos é igual a 2, ou seja

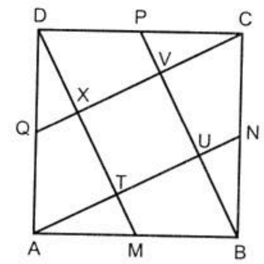
$$\frac{AD}{EF} = \frac{AE}{EC} = \frac{DE}{FC} = 2.$$

Como $EDBF$ é um paralelogramo, temos que $DE = BF$. Assim $\frac{BF}{FC} = 2$ ou seja, $BF = \frac{2}{3}BC$ e $FC = \frac{1}{3}BC$. Desta segunda igualdade, concluímos que a razão de semelhança entre ΔEFC e ΔABC é igual a $\frac{1}{3}$. Portanto, sua altura relativa ao lado $\overline{FC}$, que vamos denotar por h, será um terço da altura do triângulo ΔABC relativa ao lado $\overline{BC}$, que vamos denotar aqui por H. Novamente, como $EDBF$ é um paralelogramo, sua altura relativa ao lado $\overline{BF}$ também se iguala a h. Assim

$$\begin{aligned} A(\Delta BFD) &= \frac{1}{2}BF.h = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}BC.\frac{1}{3}H = \\ &= \frac{2}{9}(\frac{1}{2}BC.H) = \frac{2}{9}A(\Delta ABC). \end{aligned}$$

Portanto, a razão entre as áreas dos triângulos ΔBFD e ΔABC é igual a $\frac{2}{9}$.

Problema 3 *Na figura seguinte, $ABCD$ é um quadrado e M, N, P e Q são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Mostre que $TUVX$ é um quadrado e calcule a razão entre as áreas de $TUVX$ e $ABCD$.*



Resolução: Deixamos ao seu encargo a verificação de que $TUVX$ é, de fato, um quadrado. Isto requer, basicamente, uma análise dos ângulos envolvidos e algumas semelhanças e congruências de triângulos.

Para o cálculo da área de $TUVX$, podemos começar identificando as regiões que formam o quadrado original $ABCD$. Podemos ver que este quadrado é formado pela união (não disjunta) do quadrado $TUVX$ e dos triângulos ΔABN, ΔBCP, ΔCDQ e ΔDAM. Como dissemos, estas regiões não são duas a duas disjuntas, pois cada triângulo intersecta outros dois triângulos. Assim, a área do quadrado $ABCD$ não é simplesmente a soma das áreas do quadrado $TUVX$ com as áreas dos quatro triângulos, pois cada uma das intersecções, que correspondem aos triângulos ΔAMT, ΔBNU, ΔCPV e ΔDQX é contada duas vezes. Portanto, para obtermos a área correta de $ABCD$ temos que subtrair uma vez a área de cada um destes triângulos da interseção, ou seja

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(TUVX) + A(\Delta ABN) + A(\Delta BCP) \\ &\quad + A(\Delta CDQ) + A(\Delta DAM) - A(\Delta AMT) \\ &\quad - A(\Delta BNU) - A(\Delta CPV) - A(\Delta DQX). \end{aligned} \tag{4}$$

Notemos ainda que, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que

$$\Delta ABN \equiv \Delta BCP \equiv \Delta CDQ \equiv \Delta DAM,$$

e portanto possuem a mesma área. De fato, sendo l a medida do lado do quadrado $ABCD$, temos que

$$A(\Delta ABN) = \frac{1}{2}.\frac{l}{2}.l = \frac{1}{4}l^2 = \frac{1}{4}.A(ABCD).$$

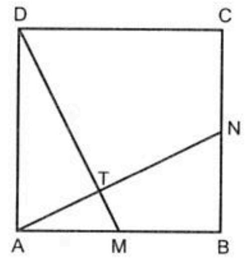
Este é o valor da área dos outros três triângulos congruentes a este. Portanto, da expressão (4) nós concluímos que

$$A(TUVX) = A(\Delta AMT) + A(\Delta BNU) + A(\Delta CPV) + A(\Delta DQX).$$

Deixamos ao seu encargo também a verificação de que os triângulos ΔAMT, ΔBNU, ΔCPV e ΔDQX são todos congruentes (de fato, você já precisou verificar isto para mostrar que $TUVX$ é um quadrado) e logo possuem a mesma área. Portanto

$$A(TUVX) = 4A(\Delta AMT).$$

Agora, só nos resta avaliar a área do triângulo ΔAMT. Faremos alguns detalhes apenas para ilustrarmos as técnicas, mas certamente você já deve ter chegado a estas conclusões anteriormente, por exemplo, para mostrar que os triângulos ΔAMT, ΔBNU, ΔCPV e ΔDQX são todos congruentes. Na figura abaixo, podemos ver que $\angle MAT = \angle NAB$ e que $\angle AMT = \angle DMA \equiv \angle ANB$. Portanto, pelo caso AA de semelhança de triângulos temos que $\Delta AMT \sim \Delta ANB$.



A razão de semelhança pode ser obtida comparando-se os lados $\overline{AM}$ com $\overline{AN}$. Claramente $AM = \frac{l}{2}$, enquanto AN pode ser obtido pelo teorema de Pitágoras:

$$AN = \sqrt{(AB)^2 + (NB)^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{5}}{2}.$$

Assim

$$\frac{AM}{AN} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

A razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança,

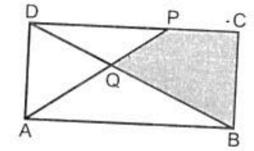
$$\frac{A(\Delta AMT)}{A(\Delta ANB)} = \frac{1}{5}.$$

Como $A(\Delta ANB) = \frac{l^2}{4}$, temos que $A(\Delta AMT) = \frac{l^2}{20}$. Finalmente, chegamos à conclusão que

$$A(TUVX) = 4.A(\Delta AMT) = 4.\frac{l^2}{20} = \frac{l^2}{5}.$$

Portanto, a razão entre a área do quadrado $TUVX$ e a área do quadrado $ABCD$ é igual a $\frac{1}{5}$.

Problema 4 **(Olimpíada de Maio 2011)** *Na figura abaixo, temos o retângulo $ABCD$ com $BC = 5$ unidades de comprimento e as áreas dos triângulos ΔQAB e ΔQPD são, respectivamente, 27 e 12 unidades de área. Calcule a área do quadrilátero $BCPQ$.*



Resolução: O problema consiste em encontrar a área do quadrilátero $BCPQ$, que claramente pode ser obtida efetuando-se a subtração entre a área do triângulo ΔBCD e a área do triângulo ΔQPD. Sabemos somente a altura do triângulo ΔBCD, que é igual a 5, mas não sabemos as bases de qualquer um dos dois triângulos nem a altura do triângulo ΔQPD. Devemos primeiramente notar que, pelo fato de os lados $\overline{DC}$ e $\overline{AB}$ estarem sobre retas paralelas, temos que

$$\angle QDP = \angle BDC \equiv \angle DBA = \angle QBA$$

e também

$$\angle QPD = \angle APD \equiv \angle PAB = \angle QAB.$$

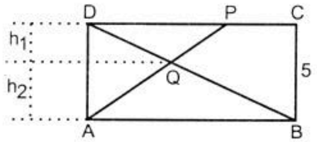
Portanto, pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos que $\Delta QPD \sim \Delta QAB$. Esta semelhança irá nos auxiliar no cálculo das bases e da altura desconhecidas. O enunciado nos fornece a informação que

$$\frac{A(\Delta QAB)}{A(\Delta QPD)} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}.$$

Esta razão entre as áreas dos dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Portanto a razão de semelhança é igual a $\frac{3}{2}$, ou seja

$$\frac{AB}{PD} = \frac{3}{2}. \tag{5}$$

Sabemos que as alturas dos dois triângulos semelhantes também obedecem à mesma razão de semelhança. Denotamos por h_1 a altura do triângulo ΔQPD e por h_2 a altura do triângulo ΔQAB, conforme ilustrado na figura seguinte.



Temos duas informações importantes a respeito destas duas alturas:

$$\begin{aligned} \frac{h_2}{h_1} &= \frac{3}{2} && (6)\\ h_1 + h_2 &= 5. && (7)\end{aligned}$$

Da igualdade (6), temos que $h_2 = \frac{3}{2}.h_1$, e substituindo em (7), obtemos

$$h_1 + \frac{3}{2}h_1 = \frac{5}{2}h_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad h_1 = 2.$$

Este procedimento de comparação entre alturas de triângulos semelhantes cujas alturas resultam em uma soma conhecida é muito útil na resolução de problemas (veja alguns dos problemas propostos no final deste artigo).

Bem, mas ainda não é tudo. Precisamos conhecer as bases. De novo, a informação no enunciado, que a área do triângulo ΔQPD é igual a 12, nos ajudará nesta tarefa. Vejamos:

$$A(\Delta QPD) = \frac{1}{2}PD.h_1 = \frac{1}{2}PD.2 = 12 \quad \Rightarrow \quad PD = 12.$$

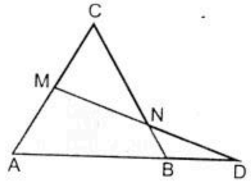
Finalmente, da igualdade (5), concluímos que $AB = 18$. Portanto

$$A(BCPQ) = A(\Delta BCD) - A(\Delta QPD) = \frac{1}{2}18.5 - \frac{1}{2}12.2 = 33.$$

A intenção destes problemas analisados foi explicitar alguns procedimentos e técnicas comuns na resolução de problemas envolvendo o cálculo de áreas e o trato com figuras semelhantes (mais especificamente, triângulos semelhantes). Os problemas propostos a seguir, alguns realmente retirados de olimpíadas, podem ser resolvidos utilizando as mesmas técnicas. E, é claro, como não poderia deixar de ser em problemas olímpicos, com uma boa dose de imaginação e criatividade.

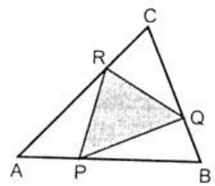
Problemas Propostos

1) Na figura abaixo, ΔABC é um triângulo equilátero com lado igual a 20, o ponto D está sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e $BD = 12$, e M é o ponto médio de $\overline{AC}$. Calcule a área do quadrilátero $ABNM$. (**Dica:** Utilize o mesmo tipo de procedimento de comparação de alturas de triângulos semelhantes que foi utilizado na análise do problema 4)



2) Na figura seguinte, temos que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA} = \frac{1}{2}.$$



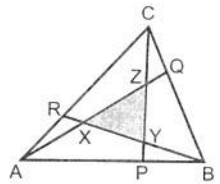
a) Calcule a razão entre a área do triângulo ΔPQR e a área do triângulo ΔABC.

b) Calcule a razão entre a área do triângulo ΔPQR e a área do triângulo cujos lados são congruentes às medianas do triângulo ΔABC.

(**Dica:** Devemos nos lembrar, para resolvermos este problema, que o baricentro, que é o encontro das três medianas, divide cada mediana na razão $\frac{2}{1}$)

3) Na figura abaixo, temos que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA} = \frac{2}{1}.$$



a) Calcule a razão entre a área do triângulo ΔXYZ e a área do triângulo ΔABC.

b) Faça o mesmo cálculo para o caso

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA} = \frac{n}{1}.$$

(**Dica:** Neste problema, você terá que utilizar o procedimento de decomposição da área do triângulo maior nas regiões que o constituem, não se esquecendo de subtrair as regiões de intersecção que são contadas mais de uma vez, como no problema 3. E também utilize a técnica de comparação de alturas em triângulos semelhantes, como no problema 4)

Referências

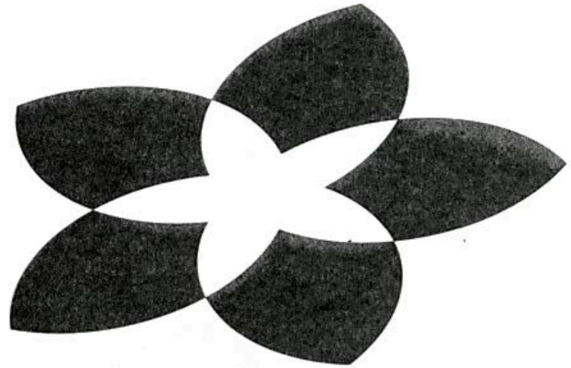
[1]Batista, E. "Áreas, Volumes e Equidecomponibilidade", notas de minicurso, 2ª Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador, BA (2004). Disponível em: http://www.mtm.ufsc.br/∼ ebatista/Escritos_Didaticos_arquivos/Escritos_Didaticos.htm

[2]Batista, E., Carvalho, N.T.B., Pinho, J.L.R.: "Geometria I", 2ª Ed. EAD UFSC (2010).

[3]Lima, E.L.: "Medida e Forma em Geometria", Coleção do Professor de Matemática, Vol 3, 4ª Edição, SBM (2009).

[4]Lima, E.L.: "Isometrias", Coleção do Professor de Matemática, Vol 12, SBM (1996).

[5]Lima, E.L.: "Matemática e Ensino", Coleção do Professor de Matemática, Vol 16, 3ª Edição, SBM (2001).



Curiosidades