Acho que deveria haver uma tabela salarial especial para profes-sores aprovados nesse exame.

Acho que o ensino até a 8ª série deveria ser obrigatório, com o mesmo currículo para todos os estados do país.

Acho que o poder público deveria instituir programas de capaci-tação, a fim de preparar os professores para os exames de habili-tação.

Acho que o ensino médio deve continuar sendo bifurcado, não em clássico ou científico, como era antigamente, mas em acadêmico e profissional, devendo este último preparar diretamente o jovem para o mercado de trabalho.

Estas são, em resumo, minhas propostas.

2. Qual é mesmo a definição de polígono convexo?

Quando pensamos num polígono convexo, imaginamos que todos os seus vértices apontam para fora, ou seja, que ele não possui vértices reentrantes. Como os dois polígonos da esquerda na Figura 2.1.

(A definição matematicamente correta de vértices salientes e reentrantes será dada a seguir.)

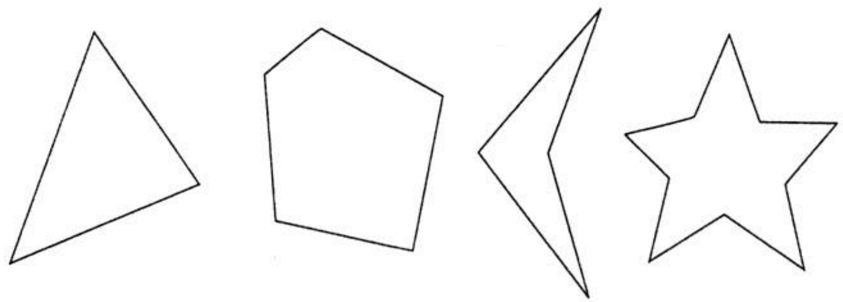


Figura 2.1. Dois polígonos convexos e dois não convexos

Essa idéia intuitiva necessita, entretanto, uma formulação mais precisa, para poder ser usada com segurança e generalidade. Além disso, há outras maneiras de pensar num polígono convexo. Conforme o contexto, uma dessas definições pode ser mais adequada do que as outras. Por isso é conveniente conhecer as principais alternativas e saber mostrar que elas são equivalentes.

A seguir, daremos três definições diferentes de polígono convexo e provaremos a equivalência lógica entre elas.

Chamamos *polígono* a uma linha poligonal fechada sem auto-
erseções, isto é, cada lado é um segmento de reta que tem apenas
n ponto comum com o lado anterior e com o seguinte, mas não
m os demais.

Às vezes, a palavra "polígono" também designa a região do plano
nitada por essa linha poligonal fechada sem auto-interseções. Por
emplo, quando falamos da área de um polígono, é claro que nos
ferimos à região poligonal, não à linha que a limita.

Um subconjunto F do plano chama-se uma *figura plana convexa*
ando, para quaisquer dois pontos X e Y em F, o segmento de
a XY está inteiramente contido em F.

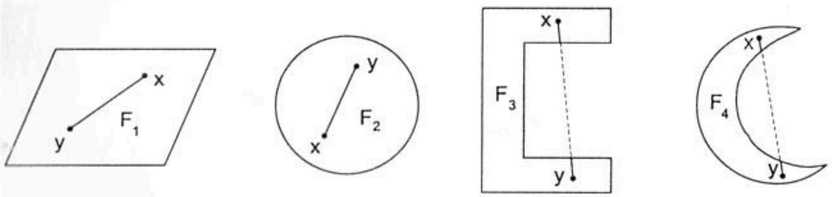


Figura 2.2. Duas figuras planas convexas e duas não convexas

imeira definição

Um polígono diz-se convexo *quando a região por ele limitada
é uma figura plana convexa.*

Segue-se desta definição que, em particular, toda diagonal (seg-
nto de reta que une dois vértices não consecutivos) de um
lígono convexo está inteiramente contida na região por ele limi-
la.

Para a segunda definição, lembremos que toda reta r decompõe o
no em duas regiões que têm r como fronteira comum. Chamare-
s essas regiões as *margens* de r.

As margens de uma reta são figuras planas convexas. Se os pon-
X e Y estão em margens opostas da reta r, o segmento de reta

XY corta r. (Este é um dos axiomas fundamentais da Geometria Plana.)

Diz-se que r é uma *reta de apoio* do polígono P quando P tem pelo menos um ponto em comum com r e está contido inteiramente numa das margens de r.

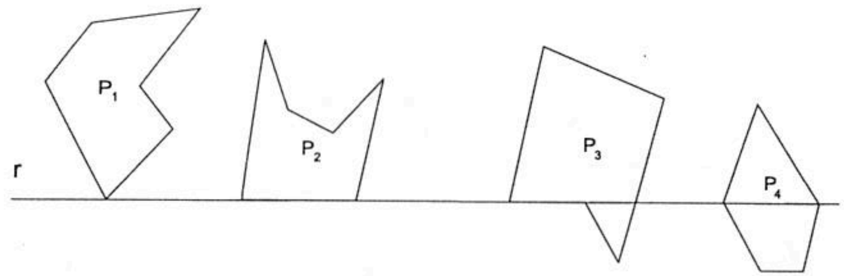


Figura 2.3. r é a reta de apoio dos polígonos P_1 e P_2 mas não de P_3 nem de P_4

Segunda definição

Um polígono chama-se convexo *quando o prolongamento de qualquer dos seus lados é uma reta de apoio.*

Por exemplo, dos polígonos na Figura 2.3, apenas P_4 é convexo.

Sejam A, B e C vértices consecutivos de um polígono P. Diz-se que B é um vértice *saliente* do polígono P quando é possível escolher um ponto M no interior do segmento AB e um ponto N no interior de BC de modo que o segmento MN esteja contido na região limitada por P.

Se o vértice B não é saliente, diz-se que ele é um vértice *reentrante* do polígono P.

Isto significa que para quaisquer pontos M no interior de AB e N no interior de BC, o segmento MN não está contido na região limitada pelo polígono P.

Na Figura 2.6, adiante, os vértices A, B e D são salientes e C é reentrante no polígono $ABCD$.

Para formular a terceira definição de polígono convexo, definimos um *ziguezague* $ABCD$ como uma poligonal com três lados, AB, BC e CD, dispostos de modo que AB e CD se situem em margens opostas da reta (que contém o segmento) BC.

Notemos que se $ABCD$ é um ziguezague contido no polígono P, então um dos vértices B, C é saliente e o outro reentrante.

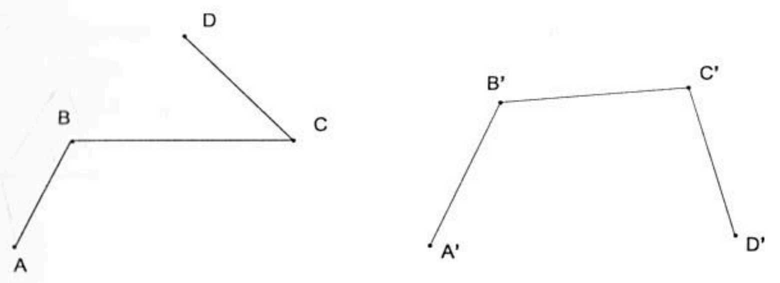


Figura 2.4. A poligonal $ABCD$ é um ziguezague mas $A'B'C'D'$ não é

Terceira definição

Um polígono diz-se convexo *quando não contém ziguezagues.*

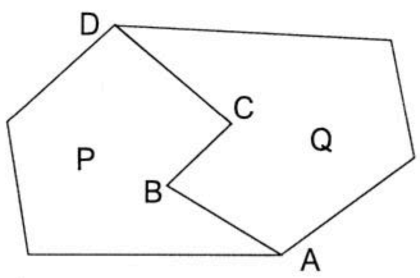


Figura 2.5. No ziguezague $ABCD$, o vértice C é saliente para o polígono P e reentrante para Q. O contrário ocorre com o vértice B

Para demonstrar a equivalência entre estas três definições de polígono convexo, usaremos a noção de "ponta" de um polígono.

Sejam A, B, C vértices consecutivos do polígono P. Diz-se que B é uma *ponta* de P quando o segmento AC é uma diagonal interna desse polígono. Toda ponta é um vértice saliente mas nem todo vértice saliente de um polígono é uma ponta.

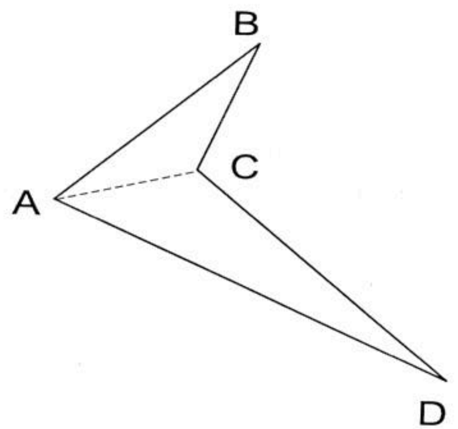


Figura 2.6. Dois polígonos convexos e dois não convexos

Lema *Todo polígono tem pelo menos uma ponta.*

Demonstração: Um polígono P, de n lados, decompõe-se, mediante diagonais internas, em $n-2$ triângulos justapostos (para uma prova veja a seção 3, a seguir). Cada um dos n lados de P pertence a um desses $n-2$ triângulos. Pelo *princípio da casa dos pombos* há dois lados de P no mesmo triângulo. O vértice comum a esses dois lados é uma ponta de P. (O princípio da casa dos pombos diz que se n pombos são colocados em m casas e $n > m$ então pelo menos uma casa vai abrigar dois ou mais pombos.)

O teorema seguinte estabelece a equivalência entre as três defi-
ões de polígono convexo dadas acima.

orema 1
Cada uma das seguintes afirmações a respeito de um polígono P plica as demais:

A região limitada por P é uma figura plana convexa;
A reta que contém qualquer lado de P é uma reta de apoio;
P não possui ziguezagues.

monstração: Provaremos as implicações 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

$\Rightarrow$ 2). Admitindo 1), suponhamos, por absurdo, que 2) seja falsa, o é, que exista um lado AB do polígono P e pontos X, Y da região limitada por P situados em margens opostas da reta AB, como Figura 2.7.

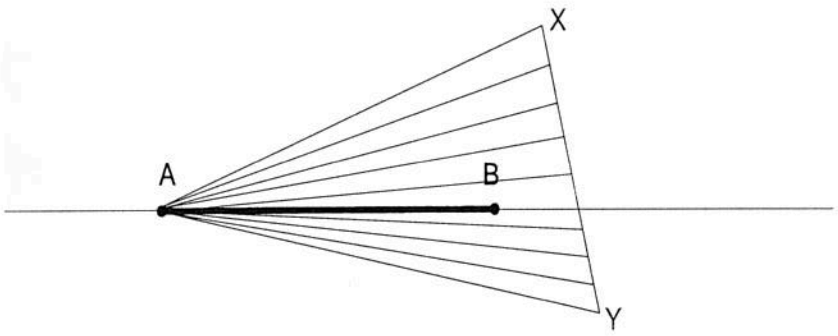


Figura 2.7. Provando que 1) $\Rightarrow$ 2).

Sendo F convexa, todos os pontos do segmento XY, e daí todos os pontos do triângulo AXY, obtidos ligando A aos pontos de XY, estão contidos em F. Então AB não é lado de P. Contradição.

2) $\Rightarrow$ 3). Se $ABCD$ é um ziguezague, AB e CD estão em margens opostas da reta BC. Portanto, um polígono onde a reta que contém qualquer dos seus lados é de apoio não pode conter ziguezagues.

3) $\Rightarrow$ 1). Para provar esta última implicação suponhamos, por absurdo, que exista um polígono P, com n lados, que não contém ziguezagues mas a região F, por ele limitada, não é uma figura plana convexa. Tomemos P de modo que n seja o menor possível. Então 3) $\Rightarrow$ 1) para polígonos com menos de n lados. Pelo lema, existem vértices consecutivos L, A, B, C, D de P tais que B é uma ponta. A diagonal AC decompõe P em dois polígonos justapostos: o triângulo ABC e um polígono Q, de $n-1$ lados, que não contém ziguezagues, logo limita uma figura plana convexa G.

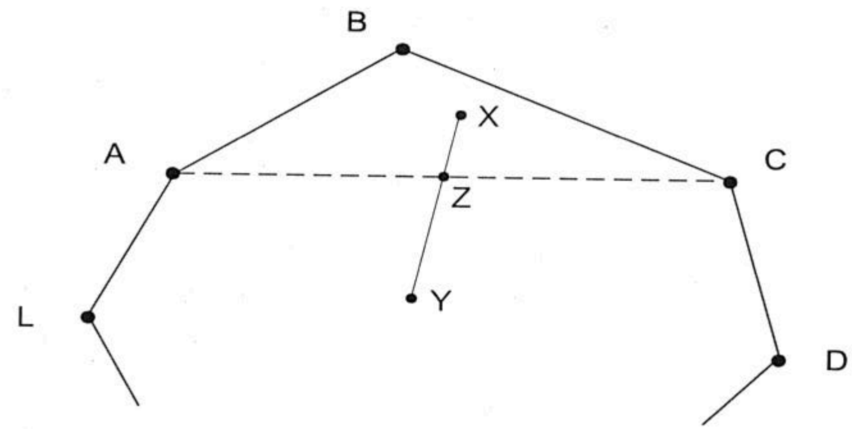


Figura 2.8. O polígono P decomposto no triângulo ABC e no polígono Q, de $n-1$ lados.

ssim, para provar que F é uma figura plana convexa, basta ar um ponto X no triângulo ABC, um ponto Y na região G e trar que o segmento de reta XY está contido em F. Como já vi- que 1) $\Rightarrow$ 2), sabemos que AC é uma reta de apoio para Q, logo Y estão em margens opostas de AC. Além disso, como $LABC$ BCD não são ziguezagues, X e Y estão na mesma margem em ção às retas AB e BC. Tudo isto significa que o segmento XY a a reta AC mas não as retas AB ou BC. Noutras palavras, o nento XY sai do triângulo ABC por um ponto Z do segmento . Então XZ está contido no triângulo ABC e ZY está contido região G, logo XY está contido na região F, como queríamos nonstrar.

Para finalizar, breves observações sobre as definições acima pro- tas:

A primeira definição é a que melhor se adapta aos padrões atuais da Matemática, tanto Pura como Aplicada. Ela se aplica literalmente a figuras sólidas com um número qualquer de dimensões. Dela resulta facilmente que a interseção de duas ou mais figuras convexas é uma figura convexa. Por isso é simples deduzir dela que um polígono é convexo se, e somente se, tem exatamente dois pontos em comum com qualquer reta que passa pelo seu interior. (Isto seria uma quarta definição de polígono convexo.)

A segunda definição também se estende a poliedros em espaços com um número qualquer de dimensões. Ela permite caracterizar um polígono convexo como o conjunto das soluções (x, y) de um sistema de desigualdades lineares do tipo $ax + by \leq c$. Por isso desempenha papel fundamental em Programação Linear.

As duas primeiras definições têm caráter global enquanto a terceira é nitidamente local. Para verificar se um dado polígono é convexo no sentido das duas primeiras definições é necessário examinar (várias vezes) todos os seus lados ao mesmo tempo. Já na terceira definição, para cada lado, olha-se apenas para o lado

à sua esquerda e para o lado à sua direita. Do ponto de vista computacional, isto é bem mais simples. Por outro lado, a não existência de ziguezagues só faz sentido no plano. Além disso, trata-se de uma hipótese da qual, em que pese seu grande apelo geométrico, é difícil deduzir conseqüências. (Compare 3) $\Rightarrow$ 2) com as outras implicações.)

[Agradeço a Paulo Cezar P. Carvalho, por observações esclarecedoras.]

3. A soma dos ângulos (internos ou externos) de um polígono (convexo ou não)

Introdução

Todos sabem que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale dois ângulos retos. Este é um dos resultados centrais da Geometria Euclidiana. Ele se estende facilmente para mostrar que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a $n-2$ vezes 2 ângulos retos. Há, porém, uma certa confusão quando se trata de considerar polígonos não convexos. A maioria dos livros elementares não considera este caso. Alguns textos utilizados em nossas escolas chegam mesmo a dizer que se um polígono de n lados não é convexo a soma dos seus ângulos internos pode não ser igual a $n-2$ retos e a soma dos seus ângulos externos pode não ser igual a 4 retos.

A dificuldade para polígonos não-convexos se concentra em dois pontos cruciais: o primeiro é a decomposição de um polígono, por meio de diagonais internas, em triângulos adjacentes e o segundo é a própria definição de ângulo externo.

Nosso objetivo aqui é esclarecer esses pontos, mostrando que todo polígono de n lados, convexo ou não, decompõe-se, mediante $n-3$ diagonais internas que não se cortam, em $n-2$ triângulos adjacentes. Portanto, a soma dos ângulos internos desse polígono é igual a $n-2$ vezes dois retos e a soma dos seus ângulos externos (convenientemente definidos) é igual a 4 retos. Tudo igualzinho ao caso de polígonos convexos, exceto que agora as $n-3$ diagonais não são traçadas a partir do mesmo vértice do polígono.

ma dos ângulos internos de um triângulo

Começaremos recordando o caso de um triângulo cujos ângulos ernos chamaremos de α, β e γ. A partir de agora, a letra R nificará sempre um ângulo reto.

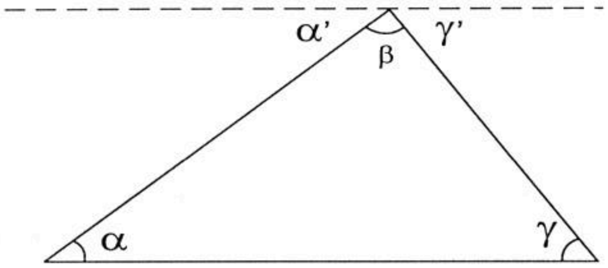


Figura 3.1. A demonstração tradicional

A demonstração tradicional de que $\alpha+\beta+\gamma = 2R$ se faz traçando o vértice de β uma paralela ao lado oposto, observando que $\alpha =$ $\gamma = \gamma'$ como ângulos alternos internos e que $\alpha' + \beta + \gamma' = 2R$. Esta é a demonstração que os livros trazem e que nós costumos repetir em classe. Dentro do princípio de que sempre vale ena, para quebrar a monotonia e arejar as idéias, olhar para as sas fundamentais sob vários ângulos (sem trocadilho), vejamos as outras demonstrações deste fato.

Mostremos, por exemplo, como a fórmula $\alpha+\beta+\gamma = 2R$ decorre um caso particular.

Suponhamos, então, que o triângulo seja retângulo. Seus âgulos α, β e R. Duas cópias juntas deste triângulo formam um ângulo. (Com efeito, AB é paralelo a CA' porque os ângulos rnos internos são iguais a α.

mo AC é perpendicular a AB, segue-se que AC e $A'C$ são perdiculares e analogamente, AB e $A'B$ também são perpendicuas.) Logo $\alpha + \beta = R$ e, daí, $\alpha + \beta + R = 2R$.

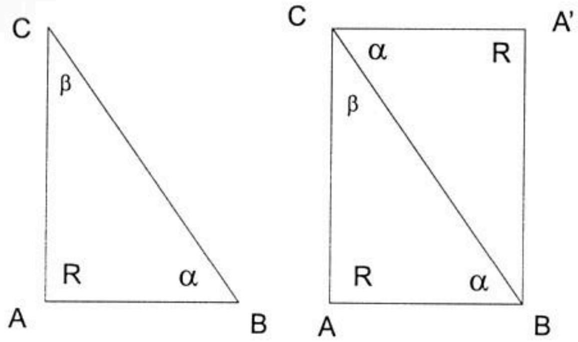


Figura 3.2. Um caso particular significativo

O caso geral reduz-se a este, baixando-se a altura sobre o maior lado. (Essa altura cai sempre no interior do triângulo.) Isto decompõe o triângulo arbitrário em dois triângulos retângulos. Usando o caso particular já provado, e observando que $\beta = \beta' + \beta''$, temos

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta' + \beta'') + \gamma = (\alpha + \beta') + (\beta'' + \gamma) = R + R = 2R.$$

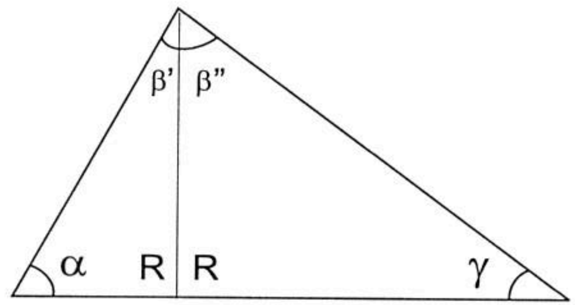


Figura 3.3. O caso geral resulta do particular

Outra maneira de provar a fórmula $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ consiste em considerar primeiro os ângulos externos a, b e c do triângulo dado mostrar que $a + b + c = 4R$. Como $\alpha = 2R - \alpha$, $\beta = 2R - b$ e $\gamma = 2R - c$, ter-se-á então

$$\alpha + \beta + \gamma = 6R = (a + b + c) = 6R - 4R = 2R.$$

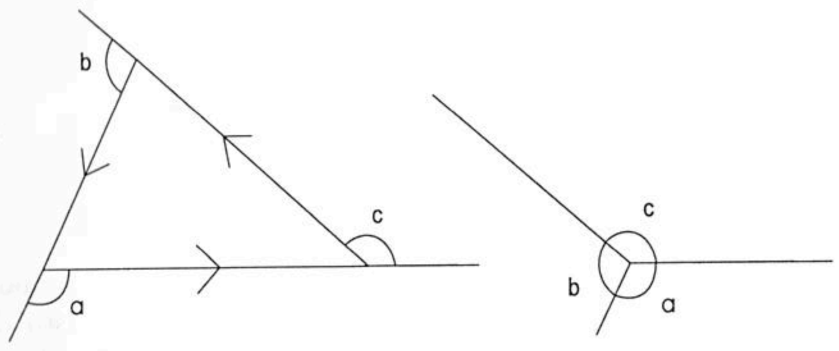


Figura 3.4. A soma dos ângulos externos

A demonstração de que $a + b + c = 4R$ se faz fixando um ponto qualquer e, a partir dele, traçando semi-retas paralelas aos três lados do triângulo. Elas determinam 3 ângulos iguais a a, b e c os quais, juntos, dão uma volta completa no plano, logo $a + b + c = 4R$.

Nesta última demonstração, há um cuidado a tomar. Para cada lado do triângulo, há duas semi-retas (opostas) partindo do ponto pré-fixado e paralelas a esse lado. Se trocarmos uma delas por sua oposta não teremos mais 3 ângulos iguais a a, b e c. Para escolher as semi-retas certas, dá-se uma volta ao longo do triângulo, marcando com setas o sentido do percurso (figura acima), e tomam-se as semi-retas que corespondem ao sentido de cada seta.

Soma dos ângulos internos de um polígono

Em seguida, consideremos a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados. Se ele é convexo, não há dificuldade. A partir

de um vértices qualquer, traçamos $n - 3$ diagonais que decompõem o polígono dado em $n - 2$ triângulos justapostos, cuja soma dos ângulos internos é $(n-2) \times 2R$. Esta é, portanto, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados.

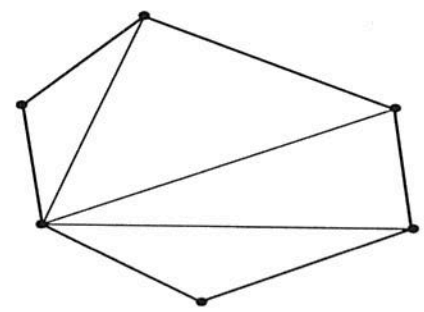


Figura 3.5. Diagonais a partir de um vértice num polígono convexo

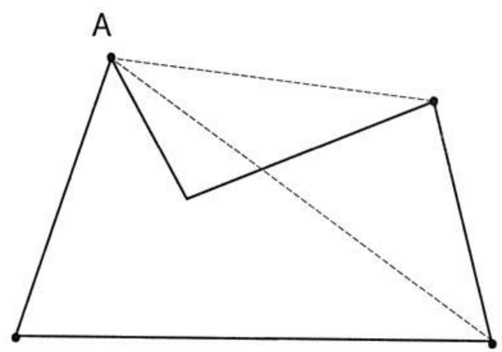


Figura 3.6. Neste pentágono não convexo uma diagonal partindo do vértice A é externa e a outra corta um lado do pentágono

Caso o polígono não seja convexo, a situação requer uma análise mais cuidadosa. Já não podemos mais traçar todas as diagonais a partir de um vértice qualquer, pois algumas delas podem ser externas ou podem cortar outros lados do polígono.

Inicialmente, esclareçamos que a palavra *polígono* significará sempre *polígono simples*, isto é , uma linha poligonal fechada que pode ser inteiramente percorrida sem que se passe mais de uma vez por qualquer dos seus pontos. Algumas vezes, *polígono* significará também a porção do plano limitada por essa poligonal.

Chama-se *diagonal* a todo segmento de reta que une dois vértices não consecutivos de um polígono.

Mostraremos agora que, mesmo não sendo convexo, qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos adjacentes por meio de diagonais convenientes. O teorema a seguir, que exprime este fato, raramente é demonstrado, embora não seja tão difícil assim.

Teorema 1

Traçando-se diagonais internas que não se cortam, pode-se decompor qualquer polígono em triângulos justapostos.

Demonstração: Supondo, por absurdo, que o teorema não seja verdadeiro, podemos achar um polígono P, com n lados, o qual não pode ser decomposto em triângulos na forma estipulada pelo enunciado. Escolhemos P de modo que o número n seja o menor possível. Tomamos uma reta r que não corte P. Chamamos de B o vértice de P situado à menor distância de r. (A reta r intervém nesta demonstração apenas para detectar um vértice "saliente" do polígono.) Sejam A e C os vértices adjacentes a B. Há dois casos possíveis:

Primeiro caso: A, B e C são os únicos vértices do polígono P contidos no triângulo ABC.

Neste caso, o polígono P', obtido de P substituindo-se os lados AB e BC por AC, tem $n-1$ lados. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema não vale. P' pode ser decomposto em triângulos na forma do enunciado. Acrescentando a P' o triângulo ABC, obtemos uma decomposição de P da forma requerida. Isto

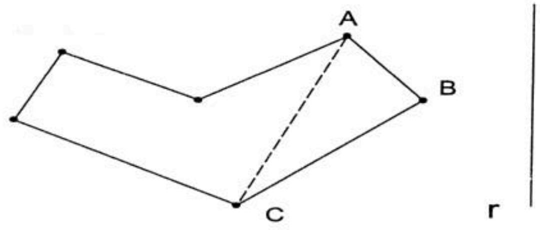


Figura 3.7. B é um vértice saliente. Como o triângulo ABC não contém nenhum outro vértice de P além de A, B e C, a decomposição de P em triângulos começa traçando-se AC.

contradiz que o teorema seja falso para P e conclui a demonstração deste caso.

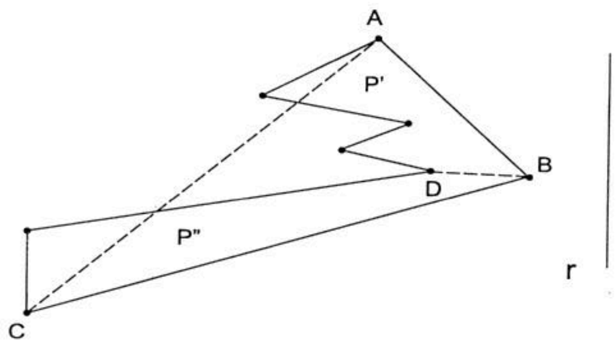
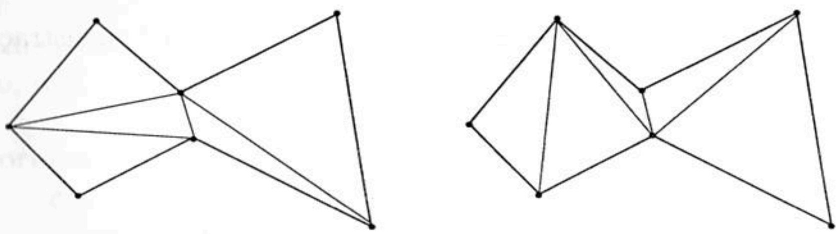


Figura 3.8. O triângulo ABC contém outros vértices de P além de A, B e C. Sendo D o vértice de P contido no triângulo ABC, mais afastado de AC $(D \neq B)$, a decomposição começa com a diagonal BD.

Segundo caso: O triângulo ABC contém outros vértices do polígono P além de A, B e C. Dentre eles, seja D o mais distante do lado AC. Então a diagonal DB não pode conter outros vértices de P além de D e B. Essa diagonal, portanto, decompõe P em dois polígonos adjacentes P' e P'', ambos com menos lados do que P. O eorema vale, então, para P' e P'', que se decompõem em triângulos ustapostos, na forma do enunciado. Juntando essas decomposições om DB, obtemos uma decomposição de P. Contradição. Isto prova segundo caso.

A figura abaixo mostra o mesmo polígono decomposto em triângulos mediante diagonais internas traçadas de duas maneiras liferentes. Nos dois casos, o número de triângulos é igual e o mesmo e dá com o número de diagonais. O teorema seguinte diz que isto ião é uma casualidade.



'igura 3.9. Duas decomposições diferentes do mesmo polígono determinam 5 riângulos e utilizam 4 diagonais. Experimentando outra decomposição qualquer, charemos sempre estes mesmos números.

Teorema 2.

Quando, traçando-se diagonais internas que não se cortam, um polígono P de n lados é decomposto em triângulos justapostos, o número de triângulos é sempre $n-2$ e o número de diagonais é $n-3$.

Demonstração: Supondo, por absurdo, que o teorema seja falso, consideremos P um polígono com o menor número n de lados para o qual o teorema não seja válido. Então P decompõe-se, por meio de d diagonais internas, em t triângulos justapostos, com $d \neq n-3$ ou $t \neq n-2$. Tomemos uma dessas diagonais. Ela decompõe P em dois polígonos adjacentes P' e P'', com n' e n'' lados respectivamente.

Como $n' < n$ e $n'' < n$, o teorema se aplica para P' e P'' com o número correto de triângulos e diagonais. Levando em conta que $n = n' + n'' - 2$, que $t = t' + t''$ e que $d = d' + d'' + 1$, as relações

$$t' = n' - 2, \quad d' = n' - 3, \quad t'' = n'' - 2 \quad \text{e} \quad d'' = n'' - 3$$

implicam imediatamente que $t = n-2$ e $d = n-3$. Esta contradição prova o teorema.

Corolário 1: *A soma dos ângulos internos de qualquer polígono (simples) de n lados é igual a $(n-2) \times 2R$.*

Com efeito, o polígono decompõe-se em $n-2$ triângulos justapostos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é $2R$.

Corolário 2: *A soma dos ângulos externos de qualquer polígono (simples) é igual a $4R$.*

Aqui é necessário lembrar corretamente as noções de ângulo interno e externo de um polígono.

Quando o polígono é convexo, seus vértices são todos salientes e os ângulos internos são menores do que dois ângulos retos. Em cada vértice, o ângulo externo é, por definição, formado por um lado do polígono e o prolongamento do lado adjacente. Isto equivale a dizer que o ângulo externo β é o suplemento do ângulo interno α que tem o mesmo vértice; portanto $\alpha + \beta = 2R$ ou $\beta = 2R - \alpha$.

Se o polígono não é convexo, ele possui vértices reentrantes. O ângulo interno α num desses vértices reentrantes é maior do que dois ângulos retos. O ângulo externo β ainda é formado por um lado de α e o prolongamento do outro. Entretanto, a fim de que continue valendo a igualdade $\alpha + \beta = 2R$, ou seja, $\beta = 2R - \alpha$, *o ângulo externo β, num vértice reentrante de um polígono não-convexo, deve ter por medida um número negativo*, pois $\alpha > 2R$ implica $\beta = 2R - \alpha < 0$.

Dada esta explicação, o Corolário 2 torna-se evidente. Com efeito, seja S a soma dos ângulos externos de um polígono de n

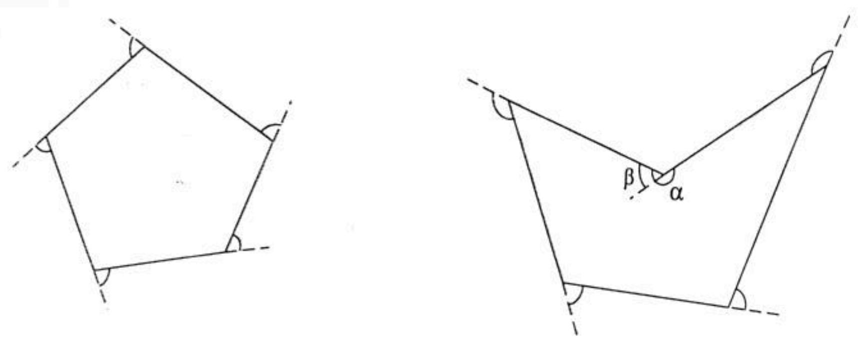


Figura 3.10. Os ângulos externos de um polígono convexo são todos positivos. Se o polígono não é convexo, há pelo menos um ângulo interno α maior do que $2R$. Logo o ângulo externo β é negativo.

lados. A soma dos ângulos internos sendo $(n-2) \times 2R$ e cada um dos n ângulos externos sendo o suplemento do ângulo interno correspondente, temos $S + (n-2) \times 2R = n \times 2R$ e daí $S = 4R$.

Observação: A terceira das demonstrações que demos para a igualdade $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ no caso de um triângulo pode ser facilmente estendida para provar que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados é igual a $4R$. Levando em conta que cada ângulo interno é o suplemento do ângulo externo correspondente, mostra-se sem dificuldade que a soma dos ângulos internos desse polígono é igual a $(n-2) \times 2R$. Tendo chegado a este resultado sem decompor o polígono em triângulos, é natural indagarmos se o mesmo argumento se aplica para um polígono não-convexo. A resposta é sim, mas a prova direta de que a soam dos ângulos externos ainda é $4R$, contando os ângulos girados pelas semi-retas (sem decompor o polígono) é mais trabalhosa e sutil do que a que foi apresentada aqui.

4. Polígonos eqüidecomponíveis

A maneira mais convincente de mostrar que dois polígonos P e P' têm a mesma área é fazer um modelo de P em cartolina, recortá-lo em polígonos menores e depois reagrupar estes polígonos pequenos, uns adjacentes aos outros, de modo a obter um modelo de P'.

Ilustrando esse método, as figuras 4.1, 4.2 e 4.3 a seguir mostram, em três situações diferentes, que a área de um triângulo é igual à área de um retângulo com a mesma base e altura igual à metade da altura do triângulo. Nos três casos, começa-se cortando o triângulo por meio de uma paralela à base, traçada pelo ponto médio de um dos outros dois lados. Na figura 4.1, a altura coincide com um dos lados do triângulo (noutras palavras, o triângulo é retângulo e a base é um dos catetos). Na figura 4.2, a altura incide sobre um ponto interior da base. Na figura 4.3, a altura situa-se no exterior do triângulo.

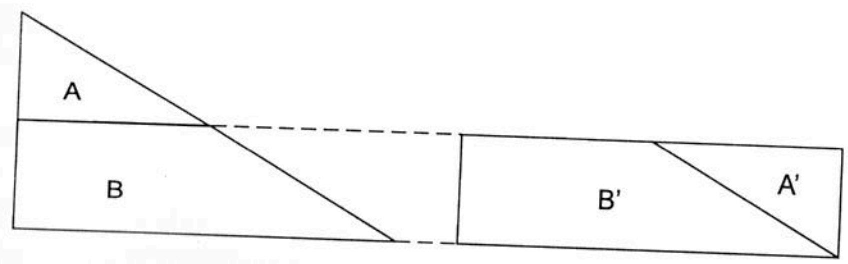


Figura 4.1. A paralela à base, traçada pelo ponto médio da altura, decompõe o triângulo em duas partes (o triângulo A e o trapézio B), as quais são reposicionadas em B' e A' para formarem um retângulo com base igual à do triângulo e altura metade.