

Geometria Quantitativa I

Lista 2

- 1) Defina o que é a mediana relativa a um dos lados de um triângulo.
- 2) Defina o que é a altura relativa a um dos lados de um triângulo.
- 3) Mostre que um triângulo é isósceles se, e somente se tiver duas medianas congruentes.
- 4) Mostre que um triângulo é isósceles, se, e somente se tiver duas bissetrizes internas congruentes.
- 5) Mostre que um triângulo é isósceles se, e somente se tiver duas alturas congruentes.
- 6) Seja um triângulo $\triangle ABC$ com $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e seja $M \in \overline{BC}$, mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:
 - (i) $\overline{AM}$ é mediana relativa a $\overline{BC}$,
 - (ii) $\overline{AM}$ é altura relativa a $\overline{BC}$,
 - (iii) $\overline{AM}$ é bissetriz do ângulo $\angle BAC$.

Por outro lado, mostre que, se em um triângulo $\triangle ABC$ quaisquer dois dos itens da questão anterior são equivalentes, então $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$.

- 7) Mostre que em um triângulo, ao maior lado se opõe o maior ângulo.
- 8) Mostre que em um triângulo, ao maior ângulo se opõe o maior lado.
- 9) Seja um triângulo de lados com medidas a , b e c . Mostre que

$$\begin{array}{lll} a + b < c & a + c < b & b + c < a \\ |a - b| < c & |a - c| < b & |b - c| < a \end{array}$$

- 10) Considere um triângulo de lados com medidas a , b e c e sejam m_a , m_b e m_c as medidas das medianas relativas aos respectivos lados. Mostre que

$$\frac{a + b + c}{2} < m_a + m_b + m_c < a + b + c$$

- 11) Considere um triângulo $\triangle ABC$ e P um ponto em seu interior. Mostre que $PB + PC < AB + AC$.

- 12) (Problema de Heron) Considere uma reta r e pontos A e B do mesmo lado em relação a r . Determine um ponto P sobre a reta r tal que $AP + PB$ é mínimo. Mostre que este ponto P é único.
- 13) Seja $\overleftrightarrow{AB}$ uma reta e $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ uma circunferência de centro O e raio r . Mostre que a intersecção de $\mathcal{C}$ com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ consiste de zero, um, ou dois pontos.
- 14) Mostre que se a intersecção de uma reta com uma circunferência for um único ponto (reta tangente à circunferência), então esta reta é perpendicular a um raio da circunferência (o segmento que liga o centro ao ponto de tangência).
- 15) Mostre que dados uma reta r e um ponto P (sobre a reta r ou fora dela), existe uma única perpendicular a r passando por P .
- 16) Considere $\overline{AB}$ um segmento. Mostre que um ponto P é equidistante de A e B se, e somente se estiver sobre a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando pelo ponto médio de $\overline{AB}$.
- 17) Defina o que é a distância de um ponto a uma reta. Mostre que esta distância é exatamente o comprimento do segmento perpendicular à reta passando pelo ponto.
- 18) Considere um ângulo $\angle BAC$. Mostre que um ponto no interior deste ângulo é equidistante dos lados do mesmo se, e somente se, estiver sobre sua bissetriz.
- 19) Defina o que é o diâmetro de um conjunto. Mostre que o diâmetro de uma circunferência é igual ao dobro da medida do raio.
- 20) Mostre que duas tangentes à mesma circunferência passando pelo mesmo ponto são congruentes.