Geometria Quantitativa I

Lista 3

1) Mostre que as três bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo se cruzam em um mesmo ponto. Mostre também que este ponto é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

2) Mostre a equivalência das três formulações a seguir do axioma das paralelas:

(i) Se uma reta cruza outras duas retas, fazendo angulos colaterais internos cuja soma das medidas é menor que 180°, então estas duas retas se cruzarão deste mesmo lado.

(ii) Dada uma reta e um ponto fora da mesma, existe uma única reta paralela à reta dada passando pelo ponto dado.

(iii) Se duas retas são paralelas a uma terceira, então são paralelas entre si.

(iv) Se uma determinada reta cruza uma reta, então ela cruza com qualquer outra reta paralela a esta.

(v) Se uma reta cruza outras duas retas que são paralelas entre si, então esta determina ângulos alternos internos congruentes.

3) Mostre que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°.

4) Mostre que a medida de um ângulo externo a um triângulo é igual à soma das medidas dos outros dois ângulos internos do triângulo que não lhe são adjacentes.

5) Considere um triângulo isósceles ΔABC, com $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, e seja $D \in \overline{AB}$ tal que $\overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$. Determine o ângulo interno $\angle A$ do triângulo.

6) Considere um triângulo isósceles ΔABC, com $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, e sejam $D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$ tais que $\overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EA}$. Determine o ângulo interno $\angle A$ do triângulo.

7) Enuncie e demonstre um resultado um resultado que generalize os dois exercícios anteriores.

8) Mostre que a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é sempre a metade da medida do ângulo central correspondente.

9) Sejam A, B e C pontos sobre uma circunferência. Mostre que $A\widehat{B}C = 90°$ se, e somente se $\overline{AB}$ for um diâmetro da circunferência.

10) Seja $\angle BAC$ um ângulo qualquer se $r \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $s \perp \overleftrightarrow{AC}$, então r e s não são paralelas.

11) Mostre que as mediatrizes dos lados de um triângulo qualquer se cruzam em um único ponto e que este ponto de encontro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

12) Utilizando o resultado anterior, mostre que dados três pontos não colineares existe uma única circunferência que passa por estes três pontos.

13) Seja $ABCD$ um quadrilátero (leia os vértices sempre em um sentido, ou horário, ou anti-horário). Mostre que os pares de lados opostos são paralelos se, e somente se os respectivos pares forem congruentes entre si (este quadrilétero é chamado um paralelogramo)

14) Mostre que se um quadrilátero possui um par de lados opostos congruentes e paralelos, então é um paralelogramo.

15) Considere um triângulo ΔABC e sejam M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{AC}$. mostre que $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $MN = \frac{BC}{2}$.

16) Mostre que as medianas de um triângulo se cruzam no mesmo ponto e que este ponto divide as medianas na proporção de $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$.

17) Mostre que um triângulo é isósceles se, e somente se tiver duas medianas congruentes.

18) Mostre que um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se suas diagonais se cruzam no ponto médio.

19) Mostre que, se um quadrilátero possui os quatro ângulos internos retos (um retângulo), então é um paralelogramo e suas diagonais possuem o mesmo comprimento.

20) Dê um exemplo de um quadrilátero que possui as diagonais congruentes, mas não é um retângulo.

21) Mostre que se um quadrilátero possui os quatro lados congruentes (um losango), então é um paralelogramo e suas diagonais são perpendiculares.

22) Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares mas não é um losango.