

Substituindo-se S_i por $(n-2) \cdot 180^\circ$, vem:
 $S_e + (n-2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ$
 $S_e + n \cdot 180^\circ - 360^\circ = n \cdot 180^\circ$

$$S_e = 360^\circ$$

105. Expressões do ângulo interno (a_i) e do ângulo externo (a_e) de um polígono regular.

Os ângulos internos de um polígono regular são congruentes.

$$n \cdot a_i = S_i \implies n \cdot a_i = (n-2) \cdot 180^\circ \implies a_i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Os ângulos externos de um polígono regular são congruentes.

$$n \cdot a_e = S_e \implies n \cdot a_e = 360^\circ \implies a_e = \frac{360^\circ}{n}$$

E, ainda

$$a_i + a_e = 180^\circ$$

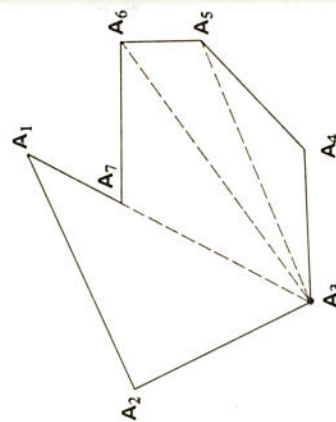
106. Observação

A expressão $S_i = (n-2) \cdot 180^\circ$ vale para todo polígono convexo de n lados ($n \geq 3$).

Ela é válida também para alguns polígonos côncavos mas não é válida para todos os polígonos côncavos.

Ao lado está um exemplo de um polígono côncavo e nele não vale a relação.

O polígono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ é um heptágono côncavo, tem 7 lados e é dividido por diagonais que partem de A_3 em 4 triângulos e não em 5 o que ocorreria se ele fosse convexo.



7 lados
 4 triângulos
 $S_i = 4 \cdot 180^\circ$
 $S_i = 720^\circ$

EXERCÍCIOS

I.156 Um polígono regular possui a partir de um de seus vértices tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Ache:

- o polígono
- o total de diagonais
- a soma dos ângulos internos
- a soma dos ângulos externos
- a medida de cada ângulo interno e de cada ângulo externo.

Solução

1) Número de diagonais do hexágono

$$\left(n = 6, d = \frac{n(n-3)}{2} \right) \implies d = \frac{6(6-3)}{2} \implies d = 9$$

2) Novo polígono

De cada vértice partem $n-3$ diagonais. Então:

$$n-3 = 9 \implies n = 12.$$

a) O polígono é o dodecágono ($n = 12$).

$$b) d = \frac{n(n-3)}{2} \implies d = \frac{12(12-3)}{2} \implies d = 54 \text{ (diagonais)}.$$

$$c) S_i = (n-2) \cdot 180^\circ \implies S_i = (12-2) \cdot 180^\circ \implies S_i = 1800^\circ$$

$$d) A \text{ soma dos ângulos externos é constante: } S_e = 360^\circ$$

$$e) n \cdot a_e = 360^\circ \implies 12 \cdot a_e = 360^\circ \implies a_e = 30^\circ$$

$$a_i + a_e = 180^\circ \implies a_i = 180^\circ - 30^\circ \implies a_i = 150^\circ.$$

I.157 Calcular a soma dos ângulos internos de um eneágono.

I.158 Calcular a soma dos ângulos internos de um decágono.

I.159 Calcular a soma dos ângulos internos de um icosaágono.

I.160 Qual é o polígono, cuja soma dos ângulos internos vale 1800° ?

I.161 Calcular o número de diagonais de um decágono.

I.162 Calcular o número de diagonais de um icosaágono.

I.163 Determinar o polígono cujo número de diagonais é o triplo do número de lados.

I.164 Determinar o polígono cujo número de diagonais é o quádruplo do número de lados.

I.165 Determinar o polígono que tem 9 diagonais distintas.

I.166 Determine o maior ângulo de um pentágono cujos ângulos internos estão na razão $3 : 3 : 3 : 4 : 5$.

I.167 Quantas diagonais podemos traçar, partindo de um vértice de um polígono convexo de 20 lados?

I.168 Determine os números de lados de um polígono convexo sabendo que de um de seus vértices partem 25 diagonais.

I.169 Podem os ângulos internos e externos de um polígono regular apresentar medidas iguais? Em que caso isto ocorre?

I.170 Determine o polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é igual ao número de diagonais multiplicado por 180° .

I.171 Determine o número de diagonais de um polígono regular convexo cujo ângulo externo vale 24° .

I.172 A razão entre o ângulo interno e o ângulo externo de um polígono regular é 9. Determine o número de lados do polígono.

I.173 O ângulo interno de um polígono regular vale 1,5 vezes o seu ângulo externo. Determine o número de lados do polígono.

I.174 O ângulo externo de um polígono regular é igual ao dobro do seu ângulo interno. Determine o número de diagonais desse polígono.

I.175 A soma dos ângulos internos com a dos ângulos externos de um polígono regular vale 1800° . Determine o número de diagonais do polígono.

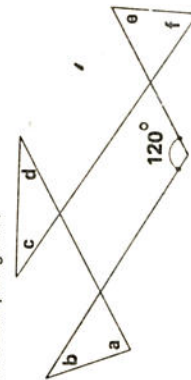
I.176 Determine o número de lados de um polígono convexo regular cujo ângulo interno é o quádruplo do externo.

I.177 Determine o número de lados de um polígono regular $ABCDE \dots$, sabendo que as bissetrizes $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo que vale $\frac{2}{9}$ do seu ângulo interno.

I.178 Determine a medida do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um polígono regular $ABCD \dots$ de 20 lados.

I.179 As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de 24° . Determine o número de diagonais desse polígono.

I.180 Aumentando-se o número de lados de um polígono de 3, seu número de diagonais aumenta de 21, determine o número de diagonais desse polígono.



I.181 Na figura ao lado, determine a soma das medidas dos ângulos $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} + \hat{f}$.

I.182 Dados dois polígonos com n e $n + 6$ lados, respectivamente, calcular n sabendo-se que um dos polígonos tem 39 diagonais mais do que o outro.

I.183 Três polígonos convexos tem n , $n + 1$, $n + 2$ lados respectivamente. Sendo 2700° a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos, determine o valor de n .

I.184 Os números que exprimem o número de lados de três polígonos estão em P.A. de razão 3. Determinar o número de diagonais de cada um dos polígonos sabendo que a soma de todos os seus ângulos internos vale 3240° .

Solução:

Se os números que exprimem o número de lados de três polígonos estão em P.A. (progressão aritmética) de razão 3, então eles são:

$$n_1 = n - 3; \quad n_2 = n; \quad n_3 = n + 3$$

$$\text{Logo: } (n - 3 - 2)180^\circ + (n - 2)180^\circ + (n + 3 - 2)180^\circ = 3240^\circ$$

$$(n - 5)180^\circ + (n - 2)180^\circ + (n + 1)180^\circ = 3240^\circ$$

$$(n - 5 + n - 2 + n + 1)180^\circ = 3240^\circ$$

$$3n - 6 = 18 \implies 3n = 24 \implies n = 8.$$

Então:

$$n_1 = 5 \quad \text{e} \quad d_1 = \frac{5(5 - 3)}{2} = 5 \quad \quad n_2 = 8 \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{8(8 - 3)}{2} = 20$$

$$n_3 = 11 \quad \text{e} \quad d_3 = \frac{11(11 - 3)}{2} = 44.$$

I.185 Três polígonos têm o número de lados expressos por números inteiros consecutivos. Sabendo que o número total de diagonais dos três polígonos é igual a 28, determine o polígono com maior número de diagonais.

I.186 Dois polígonos convexos têm o número de lados expressos pelos números n e $n + 4$. Determinar o valor de n sabendo que um dos polígonos tem 34 diagonais mais do que o outro.

I.187 Um polígono convexo tem 5 lados mais do que o outro. Sabendo que o número total de diagonais vale 68, determine o número de diagonais de cada polígono.

I.188 Dados dois polígonos regulares, com $(n + 1)$ lados e n lados, respectivamente, determine n sabendo que o ângulo interno do primeiro polígono excede o ângulo interno do segundo de 5° .

I.189 (FEI-79) O menor ângulo de um polígono convexo mede 139° , e os outros ângulos formam com o primeiro uma progressão aritmética de razão 2. Determinar o número de lados do polígono.

I.190 Consideremos um quadrilátero convexo com dois ângulos opostos retos. Prove que as bissetrizes dos outros dois ângulos internos do quadrilátero são semi-retas paralelas entre si.

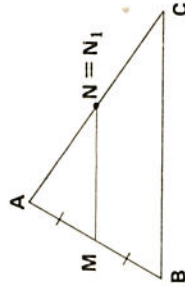
b) Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, então esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.

Seja ABC , o triângulo,

Hipótese

$$\overline{MN} \parallel BC, \overline{AM} \equiv \overline{MB}, N \in \overline{AC} \Rightarrow \overline{AN} \equiv \overline{NC}$$

Tese



Demonstração

Seja N_1 o ponto médio de $\overline{AC}$. Pelo teorema anterior $\overline{MN_1} \parallel BC$. Como a reta paralela à reta $\overline{BC}$ por M é única (postulado das paralelas, item 71), $N \in \overline{AC}$ e $N_1 \in \overline{AC}$, vem que $N = N_1$.
Logo, $\overline{AN} \equiv \overline{NC}$.

123. Base média do trapézio

a) Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então
1º) ele é paralelo às bases
2º) ele é igual à semi-soma das bases.

Seja $ABCD$ um trapézio (não paralelogramo) de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$,

Hipótese

$$\overline{AM} \equiv \overline{DM}, \overline{BN} \equiv \overline{CN} \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ) \overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ 2^\circ) \overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \end{cases}$$

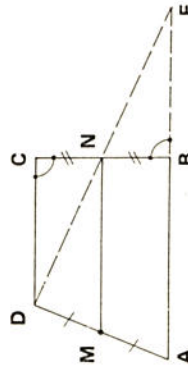
Tese

Demonstração

Seja E o ponto de intersecção das retas $\overline{DN}$ e $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C} \xrightarrow{\text{ALA}} (\hat{B} \equiv \hat{C}, \overline{BN} \equiv \overline{CN}, \hat{N} \text{ o.p.v.}) \Rightarrow \overline{EN} \equiv \overline{DN} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{ALA}} \triangle BEN \equiv \triangle CDN \Rightarrow \overline{EN} \equiv \overline{DN} \quad (1) \text{ e } \overline{BE} \equiv \overline{CD} \quad (2)$$



No $\triangle ADE$, em vista de (1), M e N são pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$ respectivamente.

Logo,

$$1^\circ) \overline{MN} \parallel \overline{AE} \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

$$2^\circ) \overline{MN} = \frac{\overline{AE}}{2} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{BE}}{2} \xrightarrow{(2)} \overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$

b) Se um segmento paralelo às bases de um trapézio tem uma extremidade no ponto médio de um dos outros lados e a outra extremidade no quarto lado, então esta extremidade é ponto médio deste lado.

Se $ABCD$ é um trapézio não paralelogramo.

Hipótese

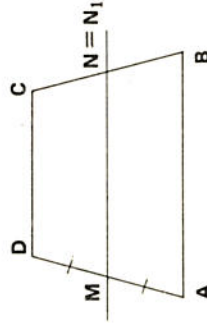
$$(\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}, \overline{AM} \equiv \overline{DM}, N \in \overline{AC}) \Rightarrow \overline{BN} \equiv \overline{CN}$$

Tese

Demonstração

Seja N_1 o ponto médio de $\overline{BC}$. Pelo teorema anterior $\overline{MN_1} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Como a reta paralela à reta $\overline{AB}$ pelo ponto M é única (postulado das paralelas, item 71), $N \in \overline{BC}$ e $N_1 \in \overline{BC}$, vem que $N = N_1$.

Logo, $\overline{BN} \equiv \overline{CN}$.



EXERCÍCIOS

I.191 Calcular os lados de um retângulo cujo perímetro mede 40 cm, sabendo que a base excede a altura de 4 cm.

I.192 Determinar a base e a altura de um retângulo, sabendo que o perímetro vale 288 m e que a base excede de 4 m o triplo da altura.

I.193 Calcular os lados de um paralelogramo, sabendo que o seu perímetro mede 84 m e que a soma dos lados menores representa $\frac{2}{5}$ da soma dos lados maiores.

I.194 A soma de dois ângulos opostos de um paralelogramo é igual a $\frac{5}{13}$ da soma dos outros dois ângulos opostos. Determine-os.

I.195 Determine as medidas dos ângulos de um paralelogramo sabendo que a diferença entre dois consecutivos é igual a $\frac{1}{9}$ da soma dos seus ângulos.

I.196 Provar que as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo, cortam-se em ângulo reto.

I.197 Em um trapézio retângulo, a bissetriz de um ângulo reto forma com a bissetriz do ângulo agudo do trapézio um ângulo de 110° . Determine o maior ângulo do trapézio.

I.198 A diagonal de um losango forma com um dos seus lados um ângulo igual à terça parte de um reto. Determinar os quatro ângulos do losango.

I.199 A bissetriz de um ângulo obtuso do losango faz com um dos lados um ângulo de 55° . Determinar o valor dos ângulos agudos.

I.200 A base maior de um trapézio isósceles mede 12 cm e a base menor 8 cm . Calcular o comprimento dos lados não paralelos sabendo que o perímetro é 40 cm .

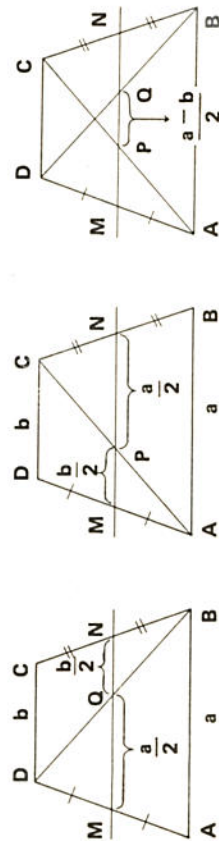
I.201 Um dos ângulos internos de um trapézio isósceles é os $\frac{2}{7}$ do ângulo externo adjacente. Determinar os quatro ângulos do trapézio.

I.202 A soma dos ângulos consecutivos de um trapézio é igual a 78° e sua diferença 4° . Determinar o maior ângulo do trapézio.

I.203 Seja $ABCD$ um trapézio de base maior $\overline{AB} = a$ e base menor $\overline{CD} = b$. Sendo M o ponto médio de $\overline{AD}$, N o ponto médio de $\overline{BC}$. Os pontos P e Q são os pontos de interseção de $\overline{MN}$ com as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ respectivamente. Dados a e b , calcular MN , MP , MQ , NP , NQ e PQ .

Solução:

É uma aplicação dos itens 122 e 123 da teoria. Sendo MN base média do trapézio, MN é paralela às bases e daí os pontos P e Q são os respectivos pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.



Usando a base média de triângulo e de trapézio, temos:

$$\overline{MN} = \frac{a+b}{2}; \overline{MP} = \frac{b}{2}; \overline{MQ} = \frac{a}{2}; \overline{NP} = \frac{a}{2}; \overline{NQ} = \frac{b}{2} \text{ e}$$

$$\overline{PQ} = \overline{MQ} - \overline{MP} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{a-b}{2}$$

I.204 A base média de um trapézio vale 20 cm e a base maior é os $\frac{3}{2}$ da base menor. Determinar as bases.

I.205 Em um trapézio são dadas as bases $\overline{AB} = 20\text{ cm}$ e $\overline{CD} = 12\text{ cm}$. Considere os pontos P e Q médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e, depois os pontos R e S médios dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Calcule os segmentos $\overline{PR}$, $\overline{RQ}$ e $\overline{RS}$.

I.206 Determine as medidas dos ângulos formados pelas bissetrizes internas de um trapézio em que dois ângulos agudos consecutivos medem 80° e 60° .

I.207 Com um arame de 36 m de comprimento construímos um triângulo equilátero e depois um quadrado. Determinar a razão entre o lado do triângulo e o lado do quadrado.

I.208 A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é metade da hipotenusa.

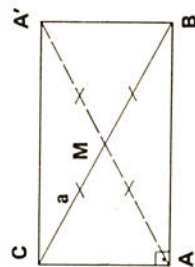
Solução

A de hipotenusa a e $\overline{AM}$ mediana relativa à hipotenusa de medida m .

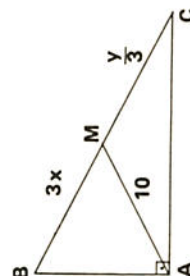
Por paralelas pelos pontos B e C aos catetos obtemos o ponto A' :

$$ABA'C \text{ é retângulo} \Rightarrow \overline{AA'} \equiv \overline{BC} \Rightarrow \overline{AA'} = a$$

$$ABA'C \text{ é retângulo} \Rightarrow \overline{AA'} \cap \overline{BC} = \{M\}$$



$$\text{e } \overline{AM} \equiv \overline{MA'} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{a}{2}.$$



I.209 Na figura, calcule x e y . M é ponto médio de $\overline{BC}$.

I.210 No triângulo ABC de lados $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 14$ e $\overline{AC} = 11$, os pontos D , E e F são pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule o perímetro do triângulo DEF .

1.211 Calcule o perímetro do triângulo ABC sendo $\overline{MN} = 7$ cm, $\overline{NR} = 4$ cm e $\overline{MR} = 8$ cm, e M , N , R , pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

1.212 Prove que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

1.213 Num trapézio retângulo em que o ângulo agudo mede 45° , a altura é igual à diferença das bases.

1.214 Prove que a altura de um trapézio retângulo que tem o ângulo agudo medindo 30° é igual à metade do lado não perpendicular às bases.

1.215 Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

Solução

Seja $ABCD$ um quadrilátero; M , N , P e Q os respectivos pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

$$\left. \begin{aligned} \Delta ABC &\Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AC} \text{ e } \overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2} \\ \Delta DAC &\Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{AC} \text{ e } \overline{PQ} = \frac{\overline{AC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{PQ} \text{ e } \overline{MN} \equiv \overline{PQ} \Rightarrow MNPQ \text{ é paralelogramo.}$

1.216 Que condições devem obedecer as diagonais de um quadrilátero convexo para que os pontos médios de seus lados sejam vértices de um losango? E de um retângulo?

1.217 Que condições devem obedecer as diagonais de um quadrilátero convexo para que os pontos médios de seus lados sejam vértices de um quadrado?

1.218 Prove que as bissetrizes dos ângulos obtusos de um paralelogramo são paralelas.

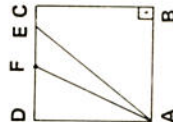
1.219 Prove que as bissetrizes dos ângulos formados pelas diagonais de um retângulo são paralelas aos lados do retângulo.

1.220 Num trapézio isósceles $ABCD$, a base menor $\overline{AB}$ é congruente aos lados não paralelos. Prove que as diagonais são bissetrizes dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ do trapézio.

1.221 Num paralelogramo $ABCD$ tracemos sua diagonal $\overline{AC}$. Pelos vértices B e D tracemos dois segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{DQ}$ perpendiculares à diagonal $\overline{AC}$, com P e Q pertencentes a $\overline{AC}$. Prove que $\overline{BP}$ é congruente a $\overline{DQ}$.

1.222 Pelo ponto médio M da base $\overline{BC}$ de um triângulo isósceles ABC tracemos os segmentos $\overline{MP}$ e $\overline{MQ}$ respectivamente paralelos aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo. Prove que $APMQ$ é um losango.

1.223 Na figura, $ABCD$ é um quadrado, onde $\overline{BC} + \overline{CE} = \overline{AE}$. Sendo F o ponto médio de $\overline{DC}$, prove que: $\widehat{BAE} = 2\widehat{FAD}$.



PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

1º) BARICENTRO – MEDIANAS

124. As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que, a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

Hipótese

Tese

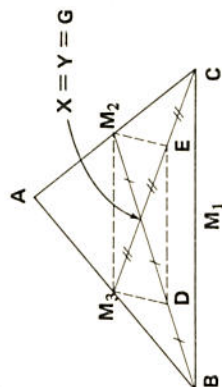
$$\overline{AM}_1, \overline{BM}_2, \overline{CM}_3 \text{ são medianas} \Rightarrow \begin{cases} 1) \overline{AM}_1 \cap \overline{BM}_2 \cap \overline{CM}_3 = \{G\} \\ 2) \overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}_1, \overline{BG} = 2\overline{GM}_2, \overline{CG} = 2\overline{GM}_3 \end{cases}$$

Demonstração

Seja X o ponto tal que

$$\overline{BM}_2 \cap \overline{CM}_3 = \{X\}$$

Considerando os pontos médios D e E de $\overline{BX}$ e $\overline{CX}$ temos o que segue:



$$\left. \begin{aligned} (\Delta ABC, \overline{AM}_3 \equiv \overline{BM}_3, \overline{AM}_2 \equiv \overline{CM}_2) &\Rightarrow \overline{M}_2\overline{M}_3 \parallel \overline{BC} \text{ e } \overline{M}_2\overline{M}_3 = \frac{\overline{BC}}{2} \\ (\Delta XBC, \overline{XD} \equiv \overline{BD}, \overline{XE} \equiv \overline{CE}) &\Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC} \text{ e } \overline{DE} = \frac{\overline{BC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

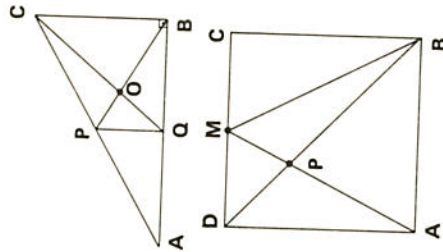
I.224 Considerando os quatro pontos notáveis de um triângulo, pergunta-se:

- Quais os que podem ser externos ao triângulo?
- Qual o que pode ser ponto médio de um lado?
- Qual o que pode ser vértice do triângulo?

I.225 Num triângulo ABC , os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem respectivamente 86° e 34° . Determine o ângulo agudo formado pela mediatriz relativa ao lado BC e pela bissetriz do ângulo C .

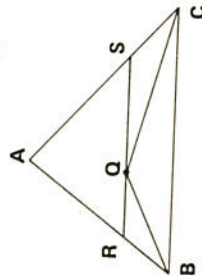
I.226 Em um triângulo ABC os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem respectivamente 70° e 60° . Determine a razão entre os dois maiores ângulos formados pelas interseções das três alturas.

I.227 Determine as medidas dos três ângulos obtusos formados pelas mediatrizes de um triângulo equilátero.



I.228 Na figura, Q é o ponto médio de AB . QP é paralelo a BC . Sendo $AC = 30$ cm, determine PQ .

I.229 Na figura, $ABCD$ é retângulo, M é o ponto médio de CD e o triângulo ABM é equilátero. Sendo $AB = 15$, calcule AP .



I.230 Determinar o perímetro do triângulo ARS da figura, onde AB e AC medem 15 cm e 18 cm respectivamente, sendo BQ e CQ as bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC e RS paralelo a BC .

I.231 As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC formam um ângulo de 116° . Determinar a medida do menor ângulo formado pelas alturas relativas aos lados AB e AC desse triângulo.

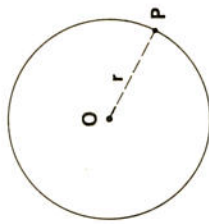
I.232 As três bissetrizes de um triângulo ABC se encontram num ponto O . Determine as medidas dos ângulos $\hat{AOB}$, $\hat{AOC}$ e $\hat{BOC}$ em função dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo.

I.233 As bissetrizes externas de um triângulo ABC formam um triângulo MNP . Prove que o ângulo $\hat{MPN}$ que se opõe ao lado BC do triângulo ABC é o complemento do ângulo $\hat{A}$ desse triângulo.

CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

I. DEFINIÇÕES — ELEMENTOS

132. Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o *centro* e a distância dada é o *raio* da circunferência.



Dados: um plano α , um ponto O de α e uma distância r ,

$$\lambda(O, r) = \{P \in \alpha \mid d_{O,P} = r\}$$

onde $\lambda(O, r)$ representa a circunferência de centro O e raio r .

133. Posição de Ponto e Circunferência

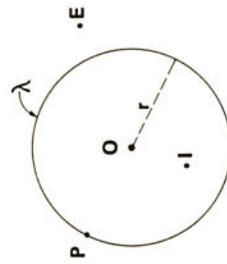
Dado um ponto P e uma circunferência $\lambda(O, r)$

$$P \text{ é interno a } \lambda \iff d_{P,O} < r$$

$$P \text{ pertence a } \lambda \iff d_{P,O} = r$$

$$P \text{ é externo a } \lambda \iff d_{P,O} > r$$

Na figura, I é interno a λ , P pertence a λ e E é externo a λ .



I.234 Dar a posição de duas circunferências de raios r e R sendo d a distância entre seus centros, nos casos abaixo:

- | | | |
|----------------|--------------|-------------|
| a) $r = 2$ cm; | $R = 5$ cm; | $d = 10$ cm |
| b) $r = 5$ cm; | $R = 10$ cm; | $d = 15$ cm |
| c) $r = 3$ cm; | $R = 7$ cm; | $d = 4$ cm |
| d) $r = 6$ cm; | $R = 10$ cm; | $d = 0$ cm |
| e) $r = 6$ cm; | $R = 8$ cm; | $d = 10$ cm |

I.235 Determine o número de tangentes comuns que podemos traçar a duas circunferências nos casos abaixo:

- As circunferências são concêntricas.
- As circunferências são exteriores.
- As circunferências são secantes.
- As circunferências são tangentes exteriormente.
- As circunferências são tangentes interiormente.

I.236 Pode um setor circular coincidir com um segmento circular? Cite o caso.

I.237 Em que caso um setor circular é um semi-círculo?

I.238 O que podemos dizer da reta que passa pelo ponto de tangência de duas circunferências tangentes entre si, sabendo que essa reta é perpendicular à reta que passa pelos centros dessas circunferências?

I.239 É possível obtermos uma corda que passa pelo ponto médio do diâmetro de uma circunferência?

I.240 Duas circunferências são secantes, sendo de 20 cm a distância entre seus centros. Sabendo que o raio da maior circunferência mede 11 cm, determine o raio da menor que é múltiplo de 6.

I.241 A distância entre os centros de duas circunferências tangentes exteriormente é de 33 cm. Determinar seus diâmetros sabendo que a razão entre seus raios é $\frac{4}{7}$.

I.242 Determine a medida de um dos lados não paralelos de um trapézio isósceles, circunscrito a um círculo, sabendo que suas bases medem 30 cm e 10 cm respectivamente.

I.243 (CESCEM-68) Seja P o ponto de tangência da circunferência inscrita no triângulo ABC , com o lado AB . Se $\overline{AB} = 7$, $\overline{BC} = 6$ e $\overline{AC} = 8$, quanto vale $\overline{AP}$?

I.244 Considere um triângulo ABC de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, e sejam P , Q e R os pontos em que os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, tangenciam a circunferência inscrita. Calcular os segmentos $\overline{AR} = x$, $\overline{BP} = y$ e $\overline{CQ} = z$.

Solução:

Temos:

$$\begin{aligned}\overline{AR} &= x \implies \overline{AQ} = x \\ \overline{BP} &= y \implies \overline{BR} = y \\ \overline{CQ} &= z \implies \overline{CP} = z\end{aligned}$$

Dai vem:

$$x + y = c \quad (1)$$

$$x + z = b \quad (2)$$

$$y + z = a \quad (3)$$

$$2x + 2y + 2z = a + b + c$$

$$\text{Fazendo } a + b + c = 2p$$

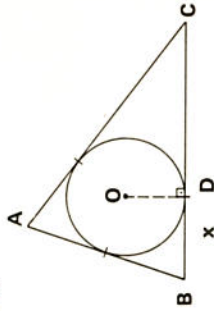
$$(\text{onde } p \text{ é semi-perímetro})$$

$$2(x + y + z) = 2p \implies x + y + z = p \quad (4)$$

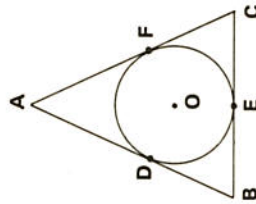
$$(4) - (1) \implies z = p - c; \quad (4) - (2) \implies y = p - b;$$

$$(4) - (3) \implies x = p - a$$

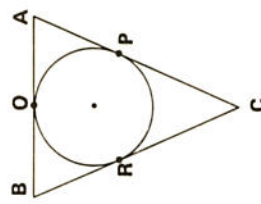
I.245 Na figura, determine a medida do segmento $\overline{BD}$ sabendo que a circunferência de centro O está inscrita no triângulo ABC , e que os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ medem respectivamente 6 cm, 8 cm e 10 cm.



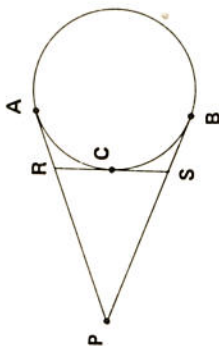
I.246 Na figura, o círculo de centro O é inscrito no triângulo ABC . $\overline{BD} = 4$, $\overline{AF} = 3$ e $\overline{EC} = 5$. Qual é o perímetro do triângulo ABC ?



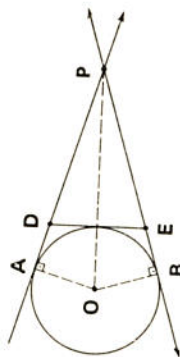
I.247 Na figura, sabendo que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e p o semi-perímetro do triângulo... Prove que $\overline{AP}$ é igual a $p - a$.



- I.248** Um círculo é inscrito num triângulo ABC e tangencia os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respectivamente em P , Q e R . Se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ e o semi-perímetro é p . Calcular $\overline{AR}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CQ}$.

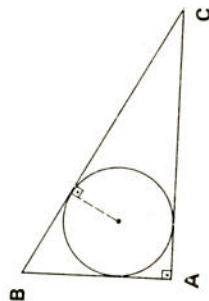


- I.249** Na figura $\overline{PA} = 10$ cm. Calcule o perímetro do triângulo PRS .



- I.250** Na figura, $\overline{PA}$ é igual ao triplo do diâmetro da circunferência. Determine a medida do perímetro do triângulo PDE em função do raio r dessa circunferência.

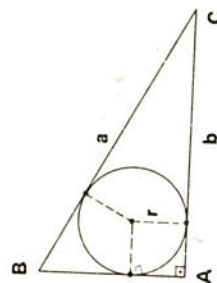
- 1.251** A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 10 cm e o raio do círculo inscrito mede 1 cm . Calcular o perímetro do triângulo.



- 1.252** Na figura, calcule a medida do raio r da circunferência inscrita no triângulo retângulo ABC , sendo $\overline{AB} = 10\text{ cm}$, $\overline{AC} = 24\text{ cm}$ e $\overline{BC} = 26\text{ cm}$.

- 1.253** Determine a medida do diâmetro de um círculo inscrito em um triângulo retângulo cujos lados medem 9 cm , 12 cm e 15 cm .

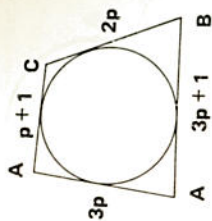
- 1.254** Determine o raio de um círculo inscrito em um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a .



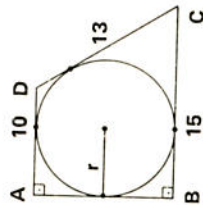
- I.255** Na figura, sendo $2p = a + b + c$ e r o raio do círculo inscrito, calcule a medida da hipotenusa a em função de p e r .

- 126-1

- I.256** Determinar o perímetro do quadrilátero $ABCD$, circuncritível, da figura.

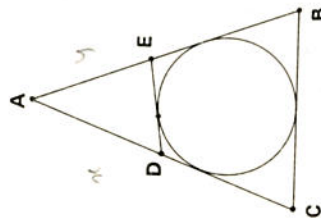


- 1.257 $ABCD$ é um quadrilátero circunscritível cujos lados medem $\overline{AD} = 12$ cm, $\overline{DC} = 9$ cm, $\overline{BC} = x + 7$ e $\overline{AB} = 2x + 1$. Determine o perímetro desse quadrilátero.



- 1.258** Calcule o valor do raio r do círculo inscrito no trapézio retângulo

- 1.259** A diferença de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível é igual a 8 cm e a diferença dos outros dois lados é 4 cm . Determinar os lados do quadrilátero sendo 56 cm a sua soma.

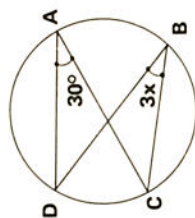


- 1.260** Na figura ao lado, determine o perímetro do triângulo ADE , sabendo que o perímetro do triângulo ABC vale 10 cm , a base $\overline{BC}$ mede 4 cm e que o círculo está inscrito no quadrilátero $BCDE$.

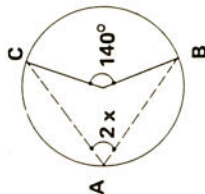
- I.261** Sejam r e R os raios das circunferências inscrita e circunscrita em um triângulo retângulo de catetos a e b . Prove que $a + b = 2(R + r)$.

- 1.262 Prove que a soma dos diâmetros dos círculos inscrito e circunscrito a um triângulo retângulo é igual à soma dos catetos desse triângulo.

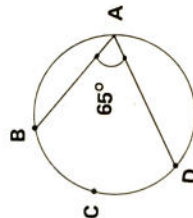
- 1.263** Prove que qualquer paralelogramo circunscrito a uma circunferência é losango.



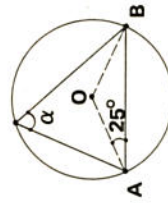
1.264 Na figura ao lado, calcule o valor de x .



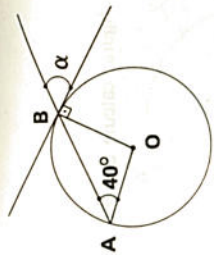
1.265 Na figura, calcule o valor de x .



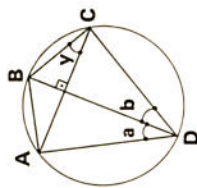
1.266 Na figura, calcule a medida do arco $\widehat{BCD}$.



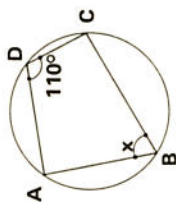
1.267 Na figura, calcule o valor de α .



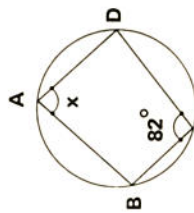
1.268 Na figura, calcule o valor de α .



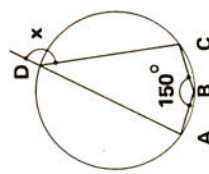
1.269 Na figura, $\widehat{AB} = 50^\circ$, $\widehat{BC} = x$, $\widehat{CD} = b$, calcule y .



1.270 Na figura, calcule o valor de x .

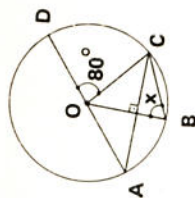


1.271 Na figura, calcule o valor de x .

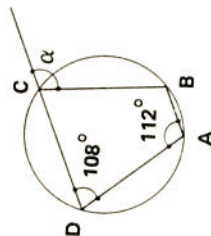


1.272 Na figura, calcule o valor de x .

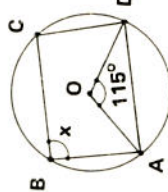
1.273 Na figura, calcule o valor de x .



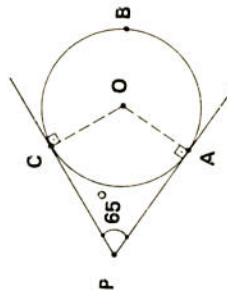
1.274 Na figura, calcule o valor de α .



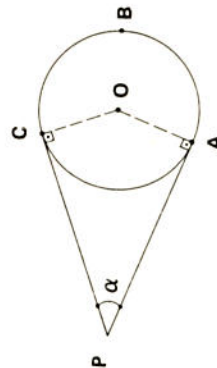
1.275 O arco $\widehat{CD}$ da figura mede 105° , calcule o valor de x .



1.276 Na figura, calcule o valor do arco $\widehat{ABC}$.

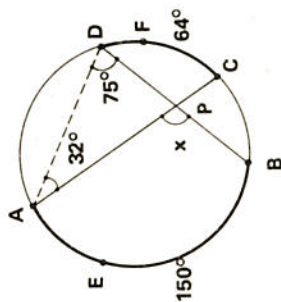


1.277 Na figura, sendo $\widehat{ABC} = 260^\circ$, calcule o valor de α .



1.278 Considere um triângulo equilátero ABC inscrito em um círculo. Determine o menor ângulo formado pelas retas tangentes a esse círculo nos pontos A e B .

1.279 Na figura, os arcos $\widehat{AEB}$ e $\widehat{CFD}$ medem respectivamente 150° e 64° . Calcule o ângulo $\widehat{APB} = x$.



Solução

Considerando o $\triangle APD$ e os ângulos inscritos, temos:

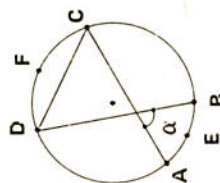
$$\widehat{AEB} = \frac{150^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{AEB} = 75^\circ$$

$$\widehat{CFD} = \frac{64^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{CFD} = 32^\circ$$

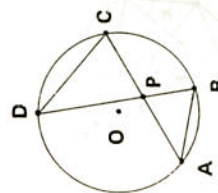
$$x \text{ é externo no } \triangle APD: x = \widehat{AEB} + \widehat{CFD} \\ \Rightarrow x = 75^\circ + 32^\circ = 107^\circ$$

Note que o ângulo excêntrico interior $\widehat{x}$ é dado por $\widehat{x} = \frac{\widehat{AEB} + \widehat{CFD}}{2}$.

1.280 Na circunferência, o arco $\widehat{CFD}$ excede o arco $\widehat{AEB}$ em 50° . Determine suas medidas, sabendo que o ângulo α mede 70° .



1.281 Na figura, o ângulo $\widehat{ACD}$ é igual a 70° e o ângulo $\widehat{APD}$ é igual a 110° . Determine a medida do ângulo $\widehat{BAC}$.



- 1.282 Na figura os arcos $\widehat{AEB}$ e $\widehat{CFD}$ medem respectivamente 140° e 40° . Calcule o ângulo $\widehat{APB} = x$.

Solução

Considerando o $\triangle PAC$ e os ângulos inscritos, temos:

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AEB}}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 70^\circ$$

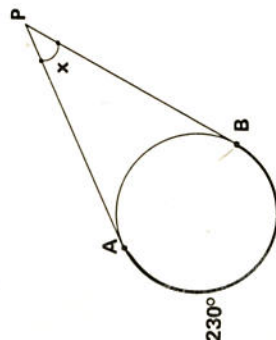
$$\widehat{A} = \frac{\widehat{CFD}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 20^\circ$$

O ângulo $\widehat{C} = 70^\circ$ é externo no $\triangle PAC$:
 $70^\circ = 20^\circ + x \Rightarrow x = 50^\circ$

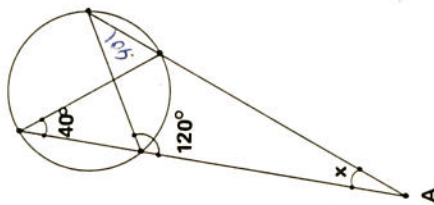
Note que o ângulo excêntrico exterior x é dado por $x = \frac{\widehat{AEB} - \widehat{CFD}}{2}$.

- 1.283 Calcule x nas figuras:

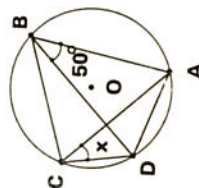
a)



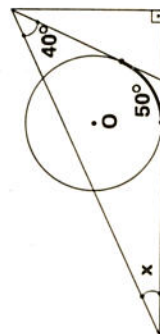
b)



a)

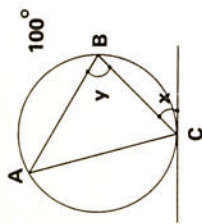


b)

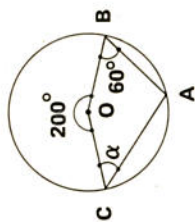


- 1.284 Calcule x nas figuras:

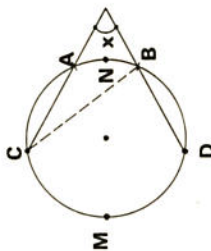
- 1.285 Se $y = 75^\circ$ e $\widehat{AB} = 100^\circ$, calcule x .



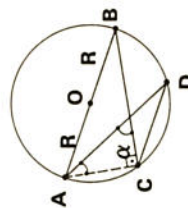
- 1.286 Na figura, o valor de α é:



- 1.287 Na figura ao lado, o arco $\widehat{CMD}$ é igual a 100° e o arco $\widehat{ANB}$ mede 30° . Calcule o valor de x .

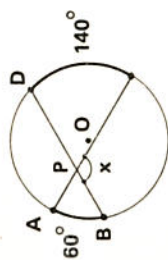


- 1.288 Determine a medida do ângulo α , sabendo que, na figura ao lado $\widehat{CD} = R$.

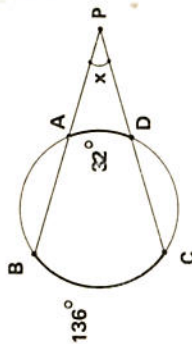


1.289 Calcule x nas figuras:

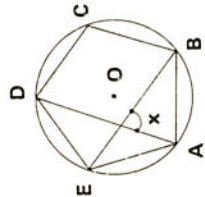
a)



c)



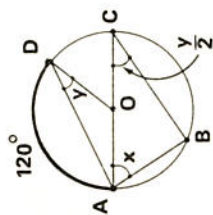
b)



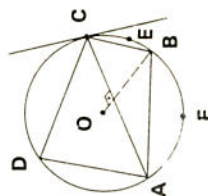
ABCDE é um pentágono regular

1.290 Calcule x nas figuras:

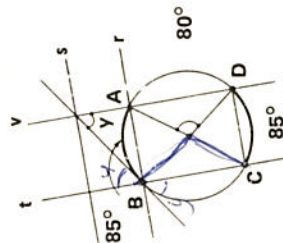
a)



b)

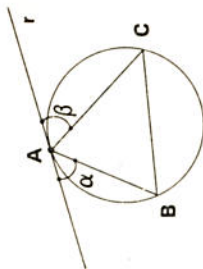


1.291 Na figura, o arco BEC mede 60° ; determine a medida do arco AFB e a medida do ângulo ADC .

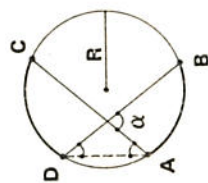


1.292 Na figura $r \parallel s$ e $t \parallel v$, determine y .

1.293 Determine as medidas dos ângulos de um triângulo, obtido pelos pontos de tangência do círculo inscrito com os lados de um triângulo ABC , sendo $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$ e $\hat{C} = 80^\circ$.

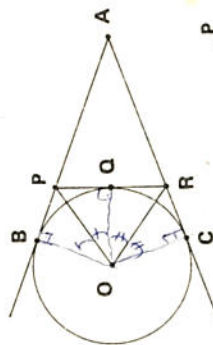


1.294 Determine a razão entre os ângulos α e β da figura ao lado, sabendo que a reta r tangencia a circunferência no ponto A e que os arcos AB , BC e AC são proporcionais aos números 2, 9 e 7.

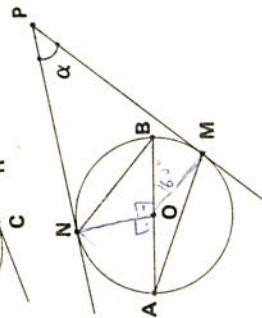


1.295 Na figura, determine a medida do ângulo α , sabendo que o arco AB mede 100° e que o arco CD mede R , sendo R o raio do círculo.

1.296 Determinar o menor ângulo formado por duas retas secantes a uma circunferência, sabendo que essas secantes determinam na circunferência dois arcos cujas medidas valem 30° e 90° .



1.297 Na figura, AB e AC são tangentes ao círculo de centro O e Q é um ponto do arco menor BC . FCR é tangente ao círculo, $\hat{A} = 28^\circ$, achar POH .



1.298 Na figura, AB é um diâmetro, a corda AM é o lado do triângulo equilátero inscrito e BN , o lado do quadrado inscrito. Calcule o ângulo α , formado pelas tangentes PM e PN .

1.299 Seja ABC um triângulo acutângulo e H_1, H_2, H_3 os pés das alturas. Provar que o ortocentro H do triângulo ABC é o incentro do triângulo $H_1H_2H_3$.

1.300 Prove que um trapézio inscrito em um círculo é isósceles.