A à margem M do rio é de $3m$ e que $\operatorname{tg} 70° = 2,75$, calcular a largura do rio (figura 26).

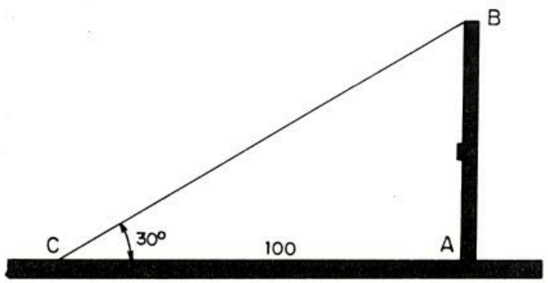

Figura 25

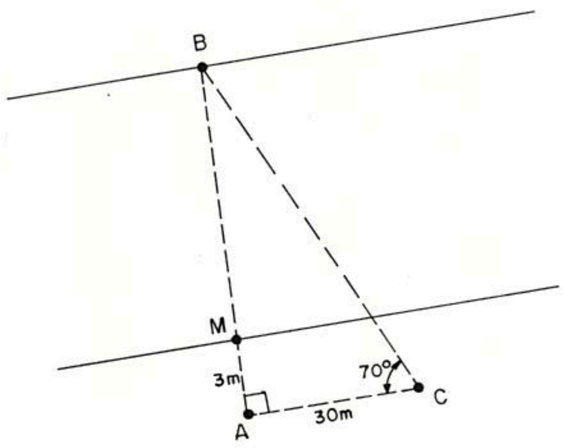

Figura 26

9. Se o observador do Problema 8 tivesse esquecido sua tabela de funções trigonométricas, ele poderia obter um valor aproximado para $\operatorname{tg} 70°$, desenhando um triângulo retângulo tal que um dos ângulos fosse $70°$, e medindo os seus lados. Faça isso e confira com o valor acima.

10. Com régua graduada e compasso

a) Construa um ângulo agudo cujo seno é $0,76$.

b) Construa um ângulo agudo cujo cosseno é $1/3$.

c) Construa um ângulo agudo cuja tangente é $3,2$.

11. Um observador em uma planície vê ao longe uma montanha segundo um ângulo de 15° (ângulo no plano vertical formado por um ponto no topo da montanha, o observador e o plano horizontal). Após caminhar uma distância d em direção à montanha, ele passa a vê-la segundo um ângulo de 30°. Qual é a altura da montanha?

12. Considere agora que o observador do problema 11 encontrou um ângulo α na primeira medição e β na segunda medição. Determinar a altura da montanha em função de α, β e d.

13. a) Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética. Qual é o cosseno do maior ângulo agudo?

b) Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica. Qual é o cosseno do maior ângulo agudo?

14. Um triângulo retângulo tem hipotenusa 1 e perímetro $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$. Qual é a medida do menor de seus ângulos?

15. Considere a seqüência de segmentos $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ como na figura 27, onde cada segmento é perpendicular a um lado do ângulo $\widehat{O}$. Sabendo que $\overline{A_0A_1} = a$ e $\widehat{O} = \alpha$, determine o comprimento de A_nA_{n+1}.

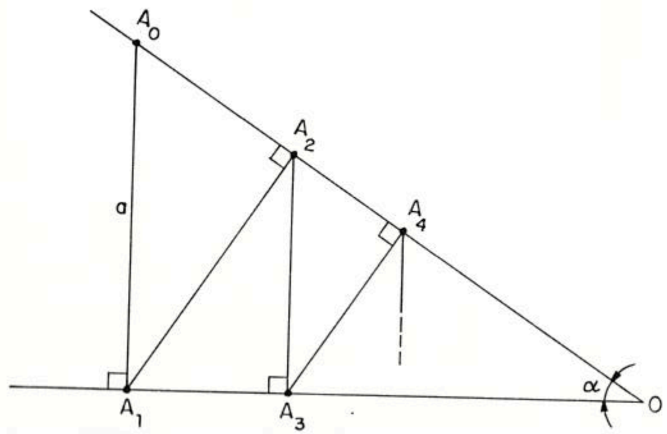

Figura 27

16. Construir com régua e compasso um triângulo retângulo conhecendo a hipotenusa e a soma dos catetos.

17. Determine, usando argumentos geométricos, o valor máximo de $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

18. A diagonal de um paralelepípedo retângulo forma com as três arestas concorrentes ângulos α, β e γ. Determine uma relação entre os cossenos desses ângulos.

19. a) Use a figura 28 para provar que

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

b) Calcule as funções trigonométricas de 15°.

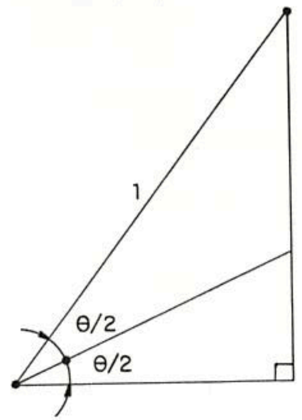

Figura 28

20. Fazendo $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$, e usando a relação do exercício anterior prove que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{2t}{1-t^2}.$$

21. Sabendo que $\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = 0{,}4$, $0° < \theta < 90°$, calcule $\operatorname{tg}\theta$.

22. Sabendo que $\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{tg}\theta = 0{,}45$, $0° < \theta < 90°$, calcule $\cos\theta$.

23. Dois observadores A e B estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver uma pedra P na outra margem. Com seus teodolitos eles medem os ângulos $P\widehat{A}B = \alpha$ e $P\widehat{B}A = \beta$. Sabendo que $\overline{AB} = 120m$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$ e $\operatorname{tg}\beta = 3$, determine a largura do rio.

24. Para prolongar uma estrada reta r deve-se perfurar um túnel em um morro. É conveniente que duas equipes trabalhem simultaneamente nos pontos de entrada E e de saída S do túnel. Descrever um processo pelo qual, sem sair do plano do terreno, é possível marcar o ponto S e a direção r de saída (admita que, com exceção do morro, o terreno é plano).

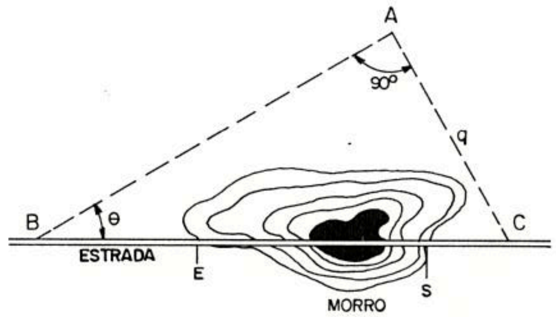

Figura 29

25. Um ponto A dista $5cm$ de um círculo de $3cm$ de raio. São traçadas as tangentes AB e AC ao círculo. Calcule o seno do ângulo $B\widehat{A}C$.

26) Calcule seno e cosseno de 36°.

27. Um astronauta em órbita vê uma fração da superfície da Terra chamada *calota esférica*. O diâmetro desta calota é visto pelo observador segundo um ângulo 2θ. Determine em função de θ e do raio R da Terra, a área da superfície do planeta vista pelo astronauta. (A área de uma calota esférica é dada por $A = 2\pi Rh$ onde R é o raio da esfera e h é a altura da calota.)

28. Use as figuras 30a e 30b para deduzir as fórmulas

a) $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b + \operatorname{sen}b \cdot \cos a$

b) $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b - \operatorname{sen}b \cdot \cos a$

29. Calcule seno e cosseno de 6° e indique um processo para obter uma tabela de senos de 3 em 3 graus.

30. Aristarco de Samos observou que quando a Lua está exatamente meio cheia, o ângulo Lua-Terra-Sol mede aproximadamente 87° (v. figura abaixo). Mostre que esta observação implicaria que a distância da Terra ao sol é mais que 18 vezes e menos que 20 vezes a distância da terra à lua. (Aristarco cometeu um compreensível erro de observação. O ângulo $\widehat{LTS}$ mede aproximadamente $89°51'$ e a distância da Terra ao sol é cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua.)

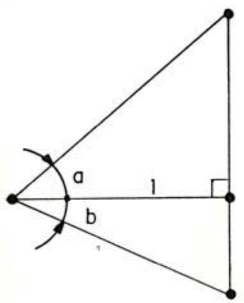

Figura 30a

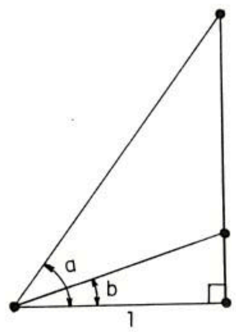

Figura 30b

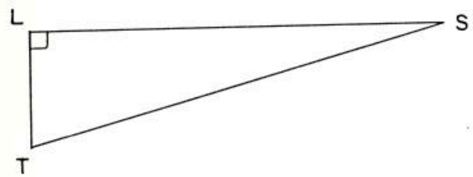

Figura 31

3. Extensões das funções trigonométricas

1. Introdução

O comprimento de um segmento está bem definido nos livros de Geometria (ver, por exemplo [**2**] cap. 1). Porém, o comprimento de uma curva não tem definição fácil. Ajustar sobre uma curva um arame e depois esticá-lo dá uma boa noção intuitiva do que seja o comprimento dessa curva, mas naturalmente, não serve como definição. Para o círculo em particular, dizemos que o seu comprimento C é o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos convexos nele inscritos. Não entraremos aqui nos detalhes desta definição. O leitor interessado poderá consultar [**1**] pág. 153. Diremos apenas que todo círculo tem um comprimento C, e admitiremos que

"o número π é o comprimento de um semi-círculo de raio 1*".*

Desta forma, no círculo de raio 1, $C = 2\pi$ e conseqüentemente, no círculo de raio $R, C = 2\pi R$ porque dois círculos quaisquer são semelhantes. (Veja [**2**], pág. 47 para a demonstração desta afirmação e [**2**] pág. 50 para uma definição equivalente do número π.)

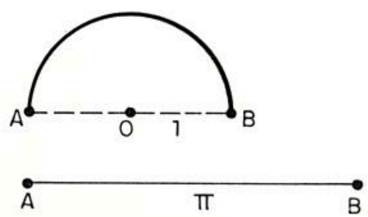

Figura 32

Escrevendo $C/2R = \pi$, vemos que o número π é a razão entre o comprimento de qualquer círculo e o seu diâmetro, sendo aproximadamente igual a 3,14159265. Uma pequena história deste número pode ser encontrada na Revista do Professor de Matemática, nº19, ou em [3], página 202.

Exercícios

1. Em que quadrante se tem simultaneamente:
   a) $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$?.
   b) $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\operatorname{tg}\theta < 0$?.
   c) $\cos\theta > 0$ e $\operatorname{tg}\theta > 0$?.

2. A que quadrantes pode pertencer θ, se:
   a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{4}$.
   b) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
   c) $\operatorname{tg}\theta = 7\sqrt{3}$.

3. Calcule
   a) $\operatorname{sen} 345°$.
   b) $\cos 210°$.
   c) $\operatorname{tg} 135°$.

4. Para que valores de $\theta, 0 \leq \theta < 2\pi$, se tem:
   a) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2}$.
   b) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   c) $\operatorname{tg}\theta = -1$.
   d) $\cos\theta = 2$.

5. Calcule:
   a) $\operatorname{tg} 1.935°$.
   b) $\operatorname{sen} 3.000°$.
   c) $\cos\dfrac{12\pi}{5}$.
   d) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$.
   e) $\operatorname{sen}\dfrac{10\pi}{3}$.
   f) $\dfrac{\cos 765° - \operatorname{sen} 1.395°}{\operatorname{tg} 1.410°}$.

6. Verifique que as igualdades abaixo valem para todo valor de $x \neq 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, onde n é um número inteiro qualquer. Tais igualdades são

   a) $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$.
   b) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

7. Determine o conjunto dos números reais x para os quais $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Seja s o lado de um polígono regular de n lados e R o raio do círculo inscrito neste polígono. Mostre que: $s = 2R\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

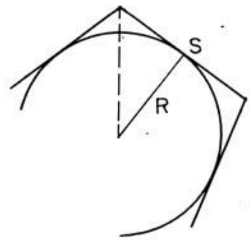

Figura 49

9. Mostre que o perímetro de um pentágono regular inscrito em um círculo unitário é dado por $10\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$.

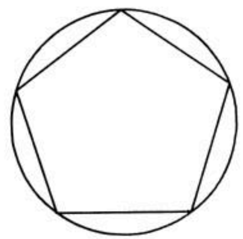

Figura 50

10. Encontre as três menores soluções positivas da equação

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

11. Determine o conjunto dos números reais x tais que

$$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

12. Quantos são os valores distintos de $\cos \frac{k\pi}{3}$, k inteiro?

13. Determine para que valores de x a função $y = 5 - \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ assume seu valor máximo.

14. Determine o conjunto dos números reais x tais que $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$.

15. Verdadeiro ou falso?

a) $\operatorname{sen} 2 > 0$
b) $\cos 4 < 0$
c) $\operatorname{sen} 3 > \operatorname{sen} 2$
d) $\cos 3 > \cos 2$
e) $\operatorname{tg} 5 > \operatorname{tg} 6$
f) $\cos \frac{\pi}{4} > \cos 1$
g) $\cos \sqrt{3} < 0$

16. Para que valores de x tem-se $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$?

17. Verifique que as extremidades dos arcos x e $-x$ são simétricas em relação ao eixo das abscissas; que as extremidades dos arcos x e $\pi - x$ são simétricas em relação ao eixo das ordenadas e que as extremidades dos arcos x e $\pi + x$ são simétricas em relação à origem. Conclua que:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x.$$

18. Verifique que as extremidades dos arcos x e $\frac{\pi}{2} - x$ são simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Conclua que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x,$$

e

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$$

19. Usando os resultados dos exercícios 17 e 18, mostre que

$$\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} + x) = \cos x, \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2} - x) = -\cos x, \quad \cos(\tfrac{3\pi}{2} - x) = -\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tg}(\tfrac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x,$$

$$\operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2} + x) = -\cos x, \quad \cos(\tfrac{3\pi}{2} + x) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tg}(\tfrac{3\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x.$$

20. Sabendo que $m\widehat{AP} = x$, verifique, observando as figuras abaixo que $\operatorname{ctg} x = t, \sec x = s$ e $\operatorname{cosec} x = s'$.

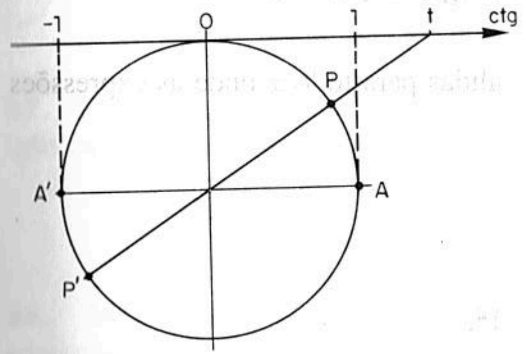

Figura 51a

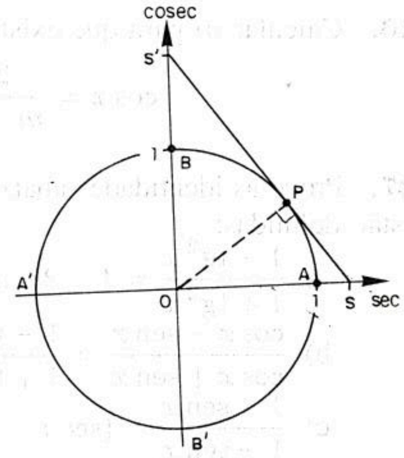

Figura 51b

21. Determine as imagens das funções secante, co-secante e cotangente.

22. Prove as relações

$$\operatorname{ctg} x = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}, & \text{se } x \neq k\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{se } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$$

23. Se x está no segundo quadrante e $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$, calcule as demais funções de x.

24. Determine todas as soluções da equação

$$\sec\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

25. Prove as identidades abaixo, para $x \neq n\pi/2$:

a) $\sec x \cdot \operatorname{ctg} x = \operatorname{cosec} x$.

b) $\dfrac{\sec x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \operatorname{sen} x$.

c) $\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 2\operatorname{sen}^2 x - 1$.

26. Calcular m para que exista um ângulo x com

$$\cos x = \frac{2}{m-1} \text{ e } \operatorname{tg} x = \sqrt{m-2}$$

27. Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.

b) $\dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$.

c) $\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} = (\sec x - \operatorname{tg} x)^2$.

d) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x} = 1 + \cos x$.

28. Sabendo que $\operatorname{tg} x + \sec x = \frac{3}{2}$, calcular $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

29. Sabendo que $\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2$, calcular $\operatorname{tg} x$.

30. Sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = m$, calcular $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

31. Sabendo que $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1$, provar que $\cos^4 x + \cos^2 x = 1$.

32. Provar que para quaisquer números reais a e b,

$$2(1 - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \geq \cos^2 a + \cos^2 b$$

33. Sabendo que

$$\begin{cases} 1 + \cos x = a \operatorname{sen} x \\ 1 - \cos x = b \operatorname{sen} x \end{cases}$$

encontre uma relação entre a e b.

34. Calcule k de modo que as raízes da equação

$$x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$$

sejam o seno e o cosseno de um mesmo ângulo.

35. Sabendo que

$$\begin{cases} a \sec x = 1 + \operatorname{tg} x \\ b \sec x = 1 - \operatorname{tg} x \end{cases}$$

encontre uma relação entre a e b.

36. Prove que para todo x

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x - 2\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x = 0$$

37. Prove a identidade abaixo, válida para todo x onde a expressão do lado esquerdo está bem definida.

$$\frac{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x}{2\cos^3 x - \cos x} = \operatorname{tg} x$$

38. Determinar para que valores de a a equação $1 + \operatorname{sen}^2 ax = \cos x$ admite alguma solução não nula.

39. De um triângulo ABC são dados o lado $\overline{BC} = a$ e o ângulo $\widehat{ABC} = \alpha$. Determinar em cada um dos casos: $\alpha < 90°, \alpha = 90°$ e $\alpha > 90°$ que valores pode ter o lado AC para garantir a existência do triângulo. Determine ainda, em que caso pode existir mais de uma solução.

40. É possível provar que tomando círculos centrados em O os arcos determinados nestes círculos por duas semi-retas OA e OB são proporcionais aos seus raios, isto é,

$$\frac{S_1}{OA_1} = \frac{S_2}{OA_2} = \frac{S_3}{OA_3} \cdots$$

(ver Figura 52a).

Este fato se relaciona com a medida do raio da Terra feita por Eratóstenes (grego, 200 anos a.C.). Consultando as observações astronômicas acumuladas durante séculos na biblioteca de Alexandria, Eratóstenes soube que em Siena, 5.000 estádios (medida grega de comprimento) ao sul de Alexandria, o sol se refletia no fundo de um poço ao meio dia de um certo dia de cada ano. Ao meio-dia deste tal dia, Eratóstenes mediu o ângulo que o raio do Sol fazia com a vertical de Alexandria, achando aproximadamente 7°. Mostre que este processo dá para o raio da Terra o valor aproximado de $\frac{250.000}{2\pi}$ estádios.

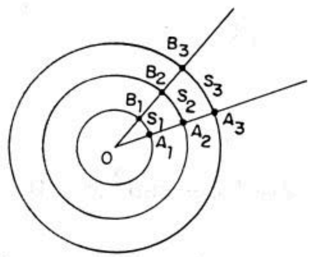

Figura 52a

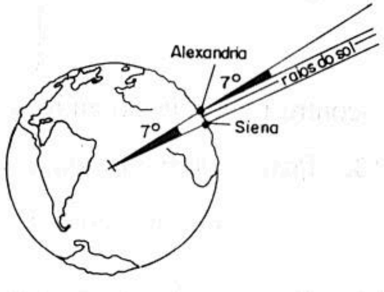

Figura 52b

4. As leis do seno e do cosseno

1. As fórmulas de adição

Nesta seção, vamos deduzir as fórmulas que calculam as funções trigonométricas da soma e da diferença de dois arcos cujas funções são conhecidas. Para obter a primeira delas devemos lembrar que a distância entre dois pontos do plano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Consideremos então no círculo unitário os pontos P e Q tais que $m\widehat{AP} = a$ e $m\widehat{AQ} = b$ (figura 53). Como $P = (\cos a, \operatorname{sen} a)$ e $Q = (\cos b, \operatorname{sen} b)$, a distância d entre os pontos P e Q é dada por

$$d^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2.$$

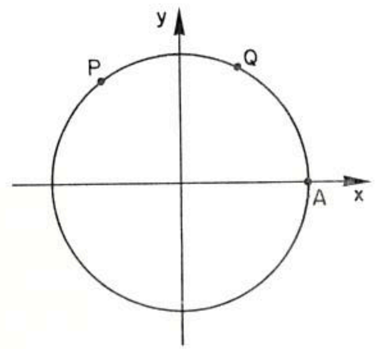

Figura 53

Desenvolvendo os quadrados e lembrando que $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ obtemos

$$d^2 = 2 - 2(\cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b).$$

Mudemos agora o nosso sistema de coordenadas girando os eixos de um ângulo b em torno da origem (figura 54).

fato, traçando a altura BD do triângulo ABC temos:

a) Se $\hat{A}$ é agudo, observando a figura 59A, temos

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\hat{A};$$

b) Se $\hat{A}$ é obtuso, observando a figura 59B, temos

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}(\pi - \hat{A}) = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\hat{A};$$

c) Se $\hat{A}$ é reto,

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc \cdot 1 = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\hat{A},$$

ficando provada em qualquer caso a afirmação (7).

Para demonstrar agora a lei dos senos, começamos por multiplicar por a (comprimento do lado BC do triângulo) a relação (7) para obter

$$aS = \frac{1}{2}abc\,\text{sen}\,\hat{A} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{abc}{2S}.$$

Por raciocínio inteiramente análogo, temos ainda para a área do triângulo ABC as expressões

$$S = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,\hat{B} \tag{8}$$

$$S = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\hat{C} \tag{9}$$

o que nos permite escrever

$$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{abc}{2S} \quad \text{e} \quad \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

Temos então que em qualquer triângulo ABC vale a relação

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}.$$

conhecida como a *lei dos senos.*

É importante notar que esta relação nos informa que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo cujos lados medem $\text{sen}\,\hat{A}$, $\text{sen}\,\hat{B}$ e $\text{sen}\,\hat{C}$. Diversas relações entre ângulos de um triângulo podem ser obtidas daí. Por exemplo, é verdade que em qualquer triângulo ABC vale a desigualdade

$\text{sen}\,\hat{A} < \text{sen}\,\hat{B} + \text{sen}\,\hat{C}$ porque em qualquer triângulo devemos ter $a < b + c$.

Para mostrar uma aplicação, consideremos o problema de calcular a distância de um ponto para o outro, inacessível. Por exemplo, um observador está em um ponto A e deseja conhecer a distância deste ponto à um ponto P, como na figura 60. Como a medida não pode ser feita diretamente, o observador escolhe um ponto B qualquer (desde que P possa ser visto de B) e mede a distância $\overline{AB} = c$ e os ângulos $\widehat{PAB} = \alpha$ e $\widehat{PBA} = \beta$. Aplicando então a lei dos senos no triângulo PAB temos

$$\frac{\overline{PA}}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}(\pi - \alpha - \beta)} \text{ ou seja,}$$

$$\overline{PA} = \frac{c \cdot \text{sen}\,\beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}.$$

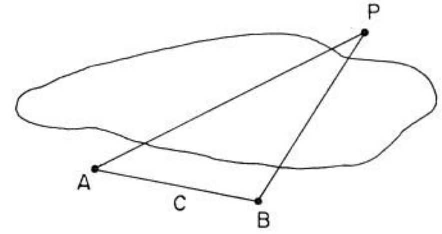

Figura 60

Exercícios

1. Os arcos a e b do primeiro quadrante são tais que $\text{sen}\,a = 3/5$ e $\text{sen}\,b = 12/13$. Calcular $\cos(a + b)$.

2. Os ângulos agudos a e b são tais que $\text{tg}\,a = 1/2$ e $\text{tg}\,b = 1/3$. Mostre que $a + b = 45°$.

3. Se $\text{sen}\,a = 4/5$ e $\cos b = 3/5$, sendo a do segundo quadrante e b do primeiro quadrante, calcular $\text{sen}(a - b)$.

4. Se $\text{sen}\,a = \frac{1}{3}$, calcular $\text{sen}\,2a$ e $\cos 2a$.

5. Se $\text{tg}\,a = \frac{1}{2}$, calcular $\text{tg}\,2a$ e $\text{tg}\,3a$.

6. Provar que em todo triângulo não retângulo ABC, $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$.

7. Calcular

a) $y = \operatorname{sen} 15° \cdot \cos 15°$

b) $y = \sqrt{3}\operatorname{sen} 15° + \cos 15°$ NÃO

c) $y = \frac{1+\operatorname{tg} 15°}{1-\operatorname{tg} 15°}$

8. Calcular $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$ e $\cos \frac{x}{2}$ em função de $\cos x$.

9. Se $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{24}$, calcular $\operatorname{sen} \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2}$ e $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

10. Sendo $2\operatorname{sen} x + \cos x = 1$, calcule $\operatorname{tg} x$.

11. Calcule

a) $y = \cos 36° \cdot \cos 72°$.

b) $y = \operatorname{sen} 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40°$.

12. Demonstre as identidades

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \operatorname{cosec} 2x$

b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \operatorname{ctg} 2x$

c) $\frac{\sec^2 x}{2-\sec^2 x} = \sec 2x$

d) $\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

e) $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x} = 2\cos^2 x$

f) $\frac{1}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \cos 2x$

g) $\frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

13. Determine o maior ângulo de um triângulo cujos lados medem 3, 5 e 7.

14. Calcule as diagonais de um paralelogramo de lados 3 e 4 e que tem um ângulo de 60°.

15. Determine os lados de um triângulo ABC no qual se tem $a = 3$, $\hat{A} = 30°$ e $\hat{B} = 45°$.

16. Os lados de um triângulo ABC medem $a = 4, b = 5$ e $c = 6$. Mostre que $\hat{C} = 2\hat{A}$.

17. Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

18. Calcule o cosseno do ângulo formado por duas faces de um octaedro regular.

19. Dois círculos são tangentes entre si e aos lados de um ângulo dado $2x$. Conhecendo o raio R do círculo maior, calcular o raio do círculo menor.

20. Mostre que o comprimento da mediana relativa ao vértice A do triângulo ABC de lados a, b e c é

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

21. Prove que em qualquer paralelogramo, a soma dos quadrados dos lados é igual a soma dos quadrados das diagonais.

22. Se $a \cdot \operatorname{sen} x + \cos x = a$, calcule $\cos x$.

23. Encontre uma relação entre a, b e c sabendo que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a \\ \cos x + \cos y = b \\ \cos(x-y) = c \end{cases}$$

24. Dado $\operatorname{sen} x = -24/25$, x no terceiro quadrante, calcular $\operatorname{sen}(x/2)$, $\cos(x/2)$ e $\operatorname{tg}(x/2)$.

25. Calcule $y = \frac{1}{\operatorname{sen} 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}$.

NÃO

26. Calcular $\operatorname{sen} 3x$ em função de $\operatorname{sen} x$.

27. Prove que $4\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} 3x$.

28. Mostre que $\operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 20° = 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} 10°$.

29. Obtenha um polinômio de coeficientes inteiros que admita $\operatorname{sen} 10°$ como raiz. Determine as outras raízes e prove que $\operatorname{sen} 10°$ não pode ser escrito na forma p/q, onde p e q são inteiros, ou seja, é um número irracional.
Sugestão: use o exercício 26.

30. Prove que

a) $\operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$

b) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

c) $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

31. Prove que

a) $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$

b) $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}$

c) $\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$

d) $\cos a - \cos b = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}$.

32. Mostre que $\operatorname{sen} 20° + \operatorname{sen} 40° = \operatorname{sen} 80°$.

33. Mostre que $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

34. Mostre que em todo triângulo ABC, $\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C$.

35. Determine a natureza do triângulo ABC (acutângulo, retângulo ou obtusângulo; equilátero isósceles ou escaleno) no qual:

a) $\operatorname{sen}^2 \hat{A} = \operatorname{sen}^2 \hat{B} + \operatorname{sen}^2 \hat{C}$

b) $\operatorname{sen} \hat{A} = 2 \operatorname{sen} \hat{B} \cos \hat{C}$

c) $\operatorname{sen} \hat{A} = \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}$

d) $\operatorname{sen} \hat{B} + \cos \hat{C} = \cos \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}$

e) $\operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = \cos^2 \frac{\hat{A}}{2}$

f) $\operatorname{sen} 2\hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} = \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} 2\hat{B}$

g) $\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = 1$

36. Mostre que $\dfrac{\operatorname{sen} 30° + \operatorname{sen} 40° + \operatorname{sen} 50°}{\cos 30° + \cos 40° + \cos 50°} = \operatorname{tg} 40°$.

37. Determine os valores máximo e mínimo de

a) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$

b) $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{9}\right)$

38. Mostre que $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 40° = \operatorname{tg} 10°$.

39. Mostre que se $ABCDEFG$ é um heptágono regular convexo então $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

40. As distâncias de um ponto P aos lados AC e BC de um triângulo ABC são m e n. Mostre que, supondo P interior ao triângulo,

$$\overline{CP}^2 = (m^2 + n^2 + 2mn \cdot \cos \hat{C}) \cdot \operatorname{cosec}^2 \hat{C}.$$

41. Um balão foi visto simultaneamente de três estações A, B e C sob ângulos de elevação de 45°, 45° e 60°, respectivamente. Sabendo que A está $3\,km$ a oeste de C e que B está $4km$ ao norte de C, determine a altura do balão.

42. Para determinar a distância entre dois pontos A e B situados além de um rio, marcaram-se dois pontos C e D aquém do rio e mediram-se os ângulos $\widehat{ACB} = 35°, \widehat{BCD} = 20°, \widehat{ADC} = 18°, \widehat{ADB} = 41°$ e a distância $\overline{CD} = 320m$. Calcular a distância $\overline{AB}$.

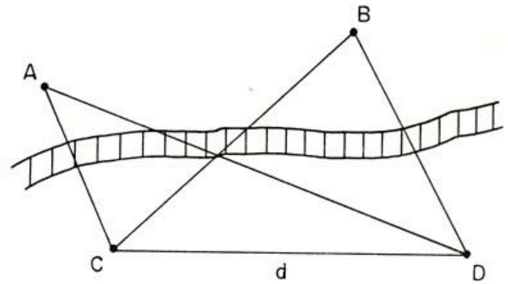

Figura 61

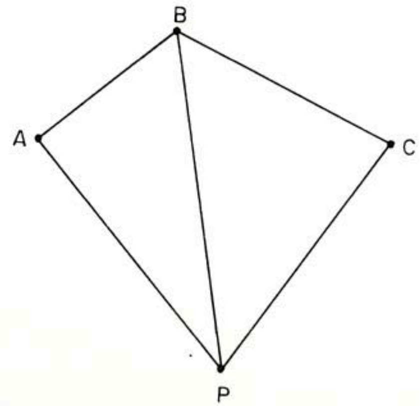

Figura 62

43. No quadrilátero $PABC$ da figura 62 conhecem-se $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 5, \widehat{ABC} = 60°, \widehat{APB} = 20°$ e $\widehat{BPC} = 26°$. Calcular $\overline{PA}, \overline{PB}$ e $\overline{PC}$.

44. Um observador O situado no topo de uma montanha vê dois outros A e B situados no nível do mar. Os observadores A e B medem os ângulos α e β que as linhas AO ee BO formam com o plano horizontal e o observador O mede o ângulo $\widehat{AOB} = r$. Conhecendo a distância $\overline{AB} = d$, calcule a altura da montanha.

45. Mostre que a distância d entre o incentro e o circuncentro de um triângulo é dada por $d = R^2 - 2Rr$ (fórmula de Euler) onde R e r são os raios dos círculos circunscrito e inscrito. Conclua que em qualquer triângulo, $R \geq 2r$. (Incentro e circuncentro são os centros dos círculos inscrito e circunscrito, respectivamente. O primeiro é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos e o segundo é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados.)
Sugestão: Considere um triângulo ABC, seu incentro I e seu circuncentro O. Trace o diâmetro DE do círculo circunscrito perpendicular a BC (A e D estão de um mesmo lado da reta BC). Prove que $\overline{EI} = \overline{EC} = \overline{EB}$, observe que o triângulo ECD é retângulo e portanto $\overline{EC}^2 = 2R(R-r)$ e aplique a lei do cosseno no triângulo OEI.

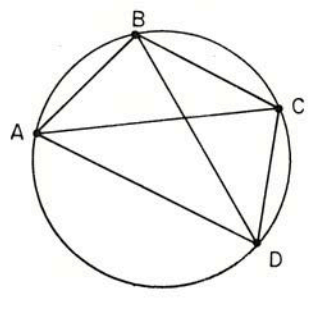

Figura 63

46. O Teorema de Ptolomeu (v. notas históricas) diz que em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos. Na figura 63, este teorema se exprime da seguinte forma:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

a) Demonstre este teorema considerando um ponto E sobre AC tal que $\widehat{ABE} = \widehat{CBD}$ e verificando que os triângulos ABE e DBC são semelhantes e que os triângulos ADB e EBC também são.

b) Considerando o caso em que AD é o diâmetro, mostre que do Teorema de Ptolomeu decorre a fórmula

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a.$$

Sugestão: Observe que se em um círculo de raio R temos um arco $\overset{\frown}{AB} = 2a$, traçando um diâmetro por A, obtemos que o comprimento da corda AB é $\overline{AB} = 2R \operatorname{sen} a$.

47. Mostre que a lei dos senos pode ser escrita

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R,$$

onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

48. De um triângulo ABC são dados os ângulos A, B e C e o perímetro $2p = a + b + c$. Obtenha as expressões abaixo que permitem calcular os lados a, b e c em função dos elementos dados.

$$a = \frac{p \operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}}, \quad b = \frac{p \operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}}, \quad c = \frac{p \operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}}.$$

49. Prove que, dado o triângulo ABC, tem-se:

a) $1 - \cos A = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$

b) $1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc}$

c) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (fórmula de Heron), onde S é a área de ABC.

d) $S = \frac{abc}{4R}$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

50. Prove que, dado o triângulo ABC, tem-se

a) $\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

b) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

c) $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cdot \operatorname{ctg}\frac{A}{2}$

d) $\frac{b-c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

e) $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}}$

51. Mostre que se h_A, h_B e h_C são as alturas de um triângulo ABC,

a) $h_A = 2R \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

b) $\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r}$ onde r é o raio do círculo inscrito no triângulo.

52) Mostre que no triângulo ABC,

a) $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$,

b) $\operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ e mostre ainda que $\operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

5. Equações trigonométricas

Neste capítulo, vamos examinar algumas equações trigonométricas. Elas aparecem naturalmente na solução de problemas de Geometria quando a incógnita escolhida é um ângulo. Se, por exemplo, de um triângulo retângulo conhecemos a hipotenusa a e a soma dos catetos s, para calcular algum outro elemento dessa figura, podemos colocar x para um dos ângulos. Teremos então $\operatorname{sen} x + \cos x = s/a$, que é uma equação trigonométrica. Os métodos usados para resolver as equações mais comuns estão nas seções seguintes.

1. As equações fundamentais

As equações fundamentais são: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \cos x = \cos a$ e $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. Examinemos cada uma delas.

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$

Para que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ é necessário e suficiente que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou que sejam simétricas em relação ao eixo das ordenadas (figura 64). No primeiro caso, x será côngruo a a e no segundo caso, x será côngruo a $\pi - a$. Portanto, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ equivale a $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.

Por exemplo, os valores de x para os quais $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$ são os valores para os quais $3x = x + 2k\pi$ ou $3x = \pi - x + 2k\pi$, isto é, $x = k\pi$ ou $x = \pi/4 + k\pi/2$.

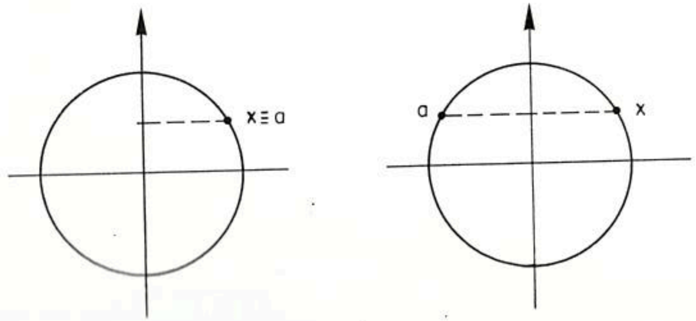

Figura 64