

Álgebra I

3a Lista de Exercícios

- 1) Sejam R e S anéis, mostre que o produto cartesiano $R \times S$ possui estrutura de anel com as operações

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$$

- 2) Seja $\{R_i\}_{i \in I}$ uma família de anéis e considere o produto cartesiano

$$\mathcal{R} = \prod_{i \in I} R_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in R_i\}$$

- a) Mostre que as projeções canônicas $\pi_i : \mathcal{R} \rightarrow R_i$ definidas como $\pi_i((a_j)_{j \in I}) = a_i$ são homomorfismos de anel (a estrutura de anel em $\mathcal{R}$ é análoga à do exercício anterior, só que com um número arbitrário de anéis no produto cartesiano).
- b) Mostre que, se houver uma família de homomorfismos $f_i : S \rightarrow R_i$, onde S é um anel, existe um único homomorfismo de anéis $\bar{f} : S \rightarrow \mathcal{R}$ tal que $f_i = \pi_i \circ \bar{f}$ para todo $i \in I$.
- 3) Mostre que a composta de dois homomorfismos de anéis também é um anel.
- 4) Mostre que, se um homomorfismo de anéis é invertível como função, então a sua função inversa também é um homomorfismo de anéis.
- 5) Seja $f : R \rightarrow S$ um epimorfismo de anéis em que R possui unidade. Mostre que se $a \in R$ for um elemento inversível em R , então $f(a)$ será inversível em S .
- 6) Verifique que a função

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{C} &\rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ a + bi &\mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é um monomorfismo de anéis entre o corpo dos complexos e o anel das matrizes 2×2 reais.

- 7) Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real e $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ o conjunto das transformações lineares de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$. Mostre que $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ é um anel com a soma ponto a ponto e o produto dado pela composição de transformações lineares.
- 8) Considere $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real de dimensão igual a n . Seja também $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{V}$. Mostre que esta base determina um isomorfismo entre o anel das transformações lineares $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ e o anel das matrizes $n \times n$ reais dado por

$$\begin{aligned} f : \quad \mathcal{L}(\mathbb{V}) &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ T &\mapsto (T(e_1) T(e_2) \cdots T(e_n)) \end{aligned}$$

onde $T(e_i)$ é o vetor coluna que representa a imagem do vetor e_i da base pela transformação T . Descreva a inversa.

- 9) Dê um exemplo de um homomorfismo unital e de um não unital entre o corpo dos reais e o anel $M_n(\mathbb{R})$.

- 10) Mostre que nenhuma aplicação $f : R \rightarrow S$ em que

$$R = \{x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q}\}, \quad S = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$$

e que satisfaça $f(x + y\sqrt{2}) = x + y\sqrt{3}$ é um isomorfismo de anel.

- 11) Mostre que os únicos homomorfismos $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ são o morfismo nulo e o morfismo identidade.
- 12) Mostre que um homomorfismo de um corpo K sobre si mesmo, ou é nulo ou é isomorfismo.
- 13) Determine todos os homomorfismos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.
- 14) Qual o corpo de frações de um corpo K ?
- 15) Mostre que o corpo de frações de um domínio é único a menos de isomorfismo.