

Estruturas Algébricas

Lista 1

- 1) Sejam R e S anéis comutativos e $\varphi : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Mostre que, se M é um S -módulo, então também será um R módulo com a multiplicação $a \cdot_R m = \varphi(a) \cdot_S m$.
- 2) Seja M um R -módulo à esquerda e $I \trianglelefteq R$. Mostre que $IM = \{\sum_i a_i m_i \mid a_i \in I, m_i \in M\}$ é um submódulo à esquerda de M .
- 3) Seja M um R -módulo à esquerda e $I \trianglelefteq R$, um ideal e $IM = \{\sum_i a_i m_i \mid a_i \in I, m_i \in M\}$. Mostre que M/IM é um R/I -módulo com a multiplicação dada por

$$(a + I) \cdot (m + IM) = a \cdot m + IM$$

- 4) Seja M um R -módulo à esquerda e ${}_R N \leq_R M$, mostre que o conjunto

$$\text{Ann}(N) = \{a \in R \mid a \cdot m = 0, \forall m \in N\}$$

é um ideal de R .

- 5) Seja R um anel comutativo, uma derivação em R é uma aplicação aditiva $D : R \rightarrow R$ tal que $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. Mostre que $\text{Der}(R) = \{D : R \rightarrow R \mid D \text{ é derivação}\}$ é um R módulo à esquerda com a multiplicação dada por $a \cdot D(b) = aD(b)$.
- 6) Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam $T, S : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ duas transformações lineares. Defina em $\mathbb{V}$ duas estruturas de $\mathbb{K}[x]$ módulo, denominadas por $\mathbb{V}^T$ e $\mathbb{V}^S$ dadas por

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \cdot v = \sum_{k=0}^n a_k T^k(v),$$

no caso de $\mathbb{V}^T$ e

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \cdot v = \sum_{k=0}^n a_k S^k(v),$$

para o caso de $\mathbb{V}^S$. Mostre que $\mathbb{V}^T \cong \mathbb{V}^S$ como $\mathbb{K}[x]$ -módulos se, e somente se existir um isomorfismo de espaços vetoriais $\varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $S = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$.

- 7) Mostre que, se $\text{mdc}(m, n) = 1$ então o único homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulo entre $\mathbb{Z}_m$ e $\mathbb{Z}_n$ é o homomorfismo identicamente nulo.
- 8) Sejam M e N R -módulos à esquerda. Mostre que $\text{Hom}_{R-}(M, N)$ possui estrutura de R -módulo à direita com a multiplicação dada por

$$(f \cdot a)(m) = f(a \cdot m).$$

- 9) Seja R um anel comutativo e M um R -módulo, mostre que $\text{Hom}_{R-}(R, M)$ possui estrutura de R -módulo e que existe o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \text{Hom}_{R-}(R, M) & \rightarrow & M \\ f & \mapsto & f(\mathbf{1}) \end{array}$$

- 10) Mostre que se M é um R -módulo simples e $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo, então f é o homomorfismo nulo ou um monomorfismo. Mostre que, se N também é simples, então f é nulo ou isomorfismo.
- 11) Mostre que, se M é um R -módulo simples, então $\text{End}_R(M)$ é um anel de divisão, ie, todo elemento não nulo possui inverso.
- 12) Mostre que $f \in \text{Hom}_{R-}(M, N)$ é monomorfismo se, e somente se, para qualquer R -módulo P e quaisquer homomorfismos $g, h \in \text{Hom}_{R-}(P, M)$, tais que $f \circ g = f \circ h$ temos que $g = h$.
- 13) Mostre que $f \in \text{Hom}_{R-}(M, N)$ é epimorfismo se, e somente se, para qualquer R -módulo P e quaisquer homomorfismos $g, h \in \text{Hom}_{R-}(N, P)$, tais que $g \circ f = h \circ f$ temos que $g = h$.
- 14) Sejam N_1 e N_2 dois submódulos de M . Mostre que a função

$$\begin{array}{ccc} f : M/N_1 & \rightarrow & M/N_2 \\ m + N_1 & \mapsto & m + N_2 \end{array}$$

está bem definida como homomorfismo se, e somente se $N_1 \subseteq N_2$, neste caso, f é epimorfismo.

- 15)** Seja $f \in \text{Hom}_{R-}(M, N)$, mostre que para qualquer R módulo P e qualquer homomorfismo $g \in \text{Hom}_{R-}(P, M)$, tal que $f \circ g = 0$, existe um único homomorfismo $\bar{g} \in \text{Hom}_{R-}(P, \text{Ker}(f))$ de forma que $g = \iota \circ \bar{g}$, onde ι é a inclusão canônica $\iota : \text{Ker}(f) \rightarrow M$.
- 16)** Seja $f \in \text{Hom}_{R-}(M, N)$, mostre que para qualquer R módulo P e qualquer homomorfismo $g \in \text{Hom}_{R-}(N, P)$, tal que $g \circ f = 0$, existe um único homomorfismo $\bar{g} \in \text{Hom}_{R-}(\text{Coker}(f), P)$ de forma que $g = \bar{g} \circ \pi$, onde π é o homomorfismo canônico $\pi : N \rightarrow \text{Coker}(f) = M/\text{Im}(f)$.
- 17)** Sejam M, N e P , R -módulos à esquerda. Dado $f \in \text{Hom}_{R-}(M, N)$, mostre que as aplicações seguintes são morfismos de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccc} f_* : \text{Hom}_{R-}(P, M) & \rightarrow & \text{Hom}_{R-}(P, N) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} f^* : \text{Hom}_{R-}(N, P) & \rightarrow & \text{Hom}_{R-}(M, P) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

- 18)** seja $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ e sejam os submódulos $N_1, N_2, \dots, N_n$ tais que $N_i \leq M_i$. Mostre que

$$(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) / (N_1 \oplus \cdots \oplus N_n) \cong (M_1/N_1) \oplus \cdots \oplus (M_n/N_n).$$