Estruturas Algébricas

Lista 2

1) Dê um exemplo de uma função entre dois R módulos que seja somesnte morfismo de grupo abeliano mas não seja morfismo de R módulo.

2) Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$, onde (m, n) é o máximo divisor comum entre m e n.

3) Seja A um grupo abeliano, $a \in A$ e $n \in \mathbb{Z}$, $(n > 0)$, mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathbb{Z}_n & \rightarrow & A \\ & \bar{k} & \mapsto & k.a \end{array}$$

está bem definida como morfismo de $\mathbb{Z}$ módulos se, e somente se $n.a = 0$.

4) Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, A) \cong A_n$, onde

$$A_n = \{a \in A | n.a = 0\}$$

5) Seja a um elemento do centro do anel R e M um R módulo à esquerda. Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} L_a : & M & \rightarrow & M \\ & m & \mapsto & a.m \end{array}$$

é um endomorfismo de R módulo de M.

6) Mostre que se R é um anel comutativo, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} L : & R & \rightarrow & \mathrm{End}_R(M) \\ & a & \mapsto & L_a \end{array}$$

é um morfismo de R módulos.

7) Mostre que, se R é comutativo, então $R \cong \mathrm{End}_R(R)$ como anéis.

8) Seja R um anel comutativo e $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Mostre que $\varphi(\mathrm{Tor}(M)) \subseteq \mathrm{Tor}(N)$.

9) Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos (à esquerda) , mostre os isomorfismos de grupos abelianos, para N um R-módulo qualquer:

a) ${}_R\mathrm{Hom}(N, \prod_{i\in I} M_i) \cong \prod_{i\in I} {}_R\mathrm{Hom}(N, M_i)$.

b) ${}_R\mathrm{Hom}(\oplus_{i\in I} M_i, N) \cong \prod_{i\in I} {}_R\mathrm{Hom}(M_i, N)$.

10) Dizemos que um R-módulo M é simples, ou irredutível, se não possuir submódulos não triviais (isto é, submódulos diferentes de $\{0\}$ e M). Mostre que, se M é um módulo simples se, e somente se ele for cíclico.

11) Seja M um R módulo simples e $f \in {}_R\mathrm{Hom}(M, N)$, então ou f é o morfismo nulo, ou é injetivo.

12) Um elemento $e \in R$ é dito ser um idempotente central se $e^2 = e$ e $ea = ae$ para todo $a \in R$. Mostre que se e é um idempotente central de R e M é um R módulo à esquerda, então $M \cong e.M \oplus (1 - e).M$.

13) Seja M um R-módulo simples, mostre que ${}_R\mathrm{End}(M)$ é um anel de divisão.

14) Seja $R = \mathbb{Z}[x]$ e $A = \mathbb{Z}[t_1, t_2, ...]$ o anel de polinômios nas infinitas variáveis t_1, t_2, etc, com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Mostre que A tem estrutura de R módulo pela ação $x^n \cdot 1 = t_n$ e $x^n \cdot t_i = t_{i+n}$. Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & R & \to & A \\ & p(x) & \mapsto & p(x) \cdot 1_A \end{array}$$

é um morfismo de R módulos mas não é morfismo de anéis.

15) (Teorema chinês do resto para módulos) Seja R um anel comutativo e I_1, I_2, ..., I_n ideais de R tais que $I_i + I_j = R$ para $i \neq j$. Mostre que

$$\frac{M}{(I_1 \dots I_n)M} \cong \frac{M}{I_1 M} \times \cdots \times \frac{M}{I_n M}.$$