

Estruturas Algébricas

Lista 3

- 1) Seja n um inteiro positivo, determine os morfismos de $\mathbb{Z}$ módulos f e g tais que a sequência abaixo seja exata

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

- 2) Seja $n = rs$ um inteiro positivo, mostre que a sequência de $\mathbb{Z}_n$ módulos abaixo é exata

$$0 \rightarrow r\mathbb{Z}_n \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{g} s\mathbb{Z}_n \rightarrow 0,$$

onde f é a inclusão e g é a multiplicação por s .

- 3) Sejam $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ e $\mathbb{V}_3$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, tais que existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow \mathbb{V}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{V}_2 \xrightarrow{g} \mathbb{V}_3 \rightarrow 0$$

mostre que $\dim(\mathbb{V}_2) = \dim(\mathbb{V}_1) + \dim(\mathbb{V}_3)$.

- 4) Sejam $\mathbb{V}_0, \dots, \mathbb{V}_n, \mathbb{K}$ espaços vetoriais tais que haja uma sequência exata

$$0 \rightarrow \mathbb{V}_0 \xrightarrow{f_0} \mathbb{V}_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} \mathbb{V}_n \rightarrow 0$$

Mostre que

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(\mathbb{V}_i) = 0.$$

- 5) Considere o diagrama comutativo de morfismos R módulos à esquerda abaixo com linhas exatas.

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array}$$

Mostre que

- a) $\text{Im}(v) \cap \text{Im}(f') = v(\text{Ker}(w \circ g))$.
b) $\text{Ker}(v) + \text{Ker}(g) = v^{-1}(\text{Im}(f' \circ u))$
c) $\frac{\text{Im}(v) \cap \text{Im}(f')}{\text{Im}(v \circ f)} \cong \frac{\text{Ker}(w \circ g)}{\text{Ker}(v) + \text{Ker}(g)}$.

- 6) Mostre que $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ é uma sequência exata se R módulos se, e somente se, existirem morfismos a, b, c e d tais que o diagrama abaixo seja comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M \\
 \downarrow a & \nearrow b & \downarrow c & \nearrow d & \\
 P & & Q & &
 \end{array}$$

e que as sequências $K \xrightarrow{a} P \rightarrow 0$, $0 \rightarrow Q \xrightarrow{d} M$ e $0 \rightarrow P \xrightarrow{b} L \xrightarrow{c} Q \rightarrow 0$ sejam exatas.

- 7) Considere o diagrama abaixo com diagonais exatas. Mostre que $\text{Ker}(g) = \text{Coker}(f)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & L' & & N \\
 & & \uparrow & \nearrow u' & \uparrow v \\
 & & & M & \\
 & & \downarrow f & \nwarrow u & \downarrow v' \\
 & & L & & N' \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 0 & & & & 0
 \end{array}$$

- 8) Considere o diagrama abaixo de morfismos de R módulos com linhas e colunas exatas. Mostre que u''' é monomorfismo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & L & \xrightarrow{v} & M & \xrightarrow{w} & N \\
 & & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow k \\
 & & H' & \xrightarrow{u'} & L' & \xrightarrow{v'} & M' & \xrightarrow{w'} & N' \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow g' & & \downarrow h' & & \\
 0 & \longrightarrow & H'' & \xrightarrow{u''} & L'' & \xrightarrow{v''} & M'' & & \\
 & & \downarrow f'' & & \downarrow g'' & & & & \\
 & & H''' & \xrightarrow{u'''} & L''' & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
 \end{array}$$